MF Náboj

13.1.2012

MF Náboj 2012 je organizovaný pod záštitou **fyzikálneho korešpondenčného seminára UFO** (ufo.fks.sk).

Samotná stránka MF Náboja 2012 je https://sites.google.com/site/onaboji/.

- O technickú stránku sa postaral **Marián Horňák**.
- O príklady sa postarali **Marián Horňák, Andrej Vlček, Kristína Čevorová, Vladimír Macko, Ľubomír Konrád, Kristína Komanová, Jakub Bahyl**.
- O znenie a vizáž zadaní sa postarali **Marián Horňák, Andrej Vlček, Lucia Simanová** v spolupráci s českým fyzikálnym korešpondenčným seminárom **Výfuk** (vyfuk.fykos.cz/).
- O priebeh súťaže na Slovensku a v Česku sa postarali:

Nitra - Marián Horňák

Poprad - Iveta Šatanková

Púchov - Mária Pastorková

Bratislava - Lucia Simanová

Liptovský Mikuláš - Katarína Gazdová

Lučenec - Mária Budáčová

Banská Bystrica - Kristína Komanová

Piešťany - Mária Vajdová

Michalovce - Jozef Smrek

Žilina - Jakub Bahyl

Praha - Karel Kolář a český fyzikálny korešpondenčný seminár Výfuk

Zadania

1. Rozcvička (matematika)

Albatros sa pokúšal zrátať jednu úlohu. Trvalo mu to. Prvý rok. Ďalší rok. Na začiatku mal 18 rokov. Koľko rokov mal na konci?
Autor: Marián Horňák

2. Záhradky (matematika)

Albatrosy majú záhradky zásadne tvaru štvorca. Malý albatros poleje svoju záhradku s hranou 1 meter za pol hodiny. Koľko mu bude trvať poliať jeho a ockovu záhradku, ak tá má hranu dlhú 2 metre?
Autor: Andrej Vlček

3. Hop, vtákopysk, hop! (matematika)

Vtákopysk Ivan preskočil z jedného miesta na druhé, ktoré bolo vzdialené presne 8 stôp. Koľko metrov Ivan preskočil? Meter má 3.28 stopy.
Autor: Dávid Lupták

4. Pílime (matematika)

Rozrezať drevenú palicu na tri časti albatrosovi trvá 12 minút. Koľko mu trvá rozrezať palicu na štyri časti?
Autor: Vladimír Macko

5. Tapety (matematika)

Albatrosia rodinka sa rozhodla vytapetovať si obývačku. Pán albatros vybral tapetu so šírkou 50cm a vypočítal, že im bude treba 18 metrov takejto tapety. Keď pani albatrosica uvidela, akú vzorku vybral, skoro skolabovala a okamžite vybrala inú, so šírkou 60cm. To zase kolaboval pán albatros, lebo znovu musel rátať, koľko metrov tapiet im bude treba. Zachránite rodinné šťastie a vypočítate koľko?
Autor: Andrej Vlček

6. Bicepsy (matematika a fyzika)

Cicavce a vtáky si raz dávno usporiadali veľké športové preteky. Aby to bolo fér, rozhodcom bol vtákopysk. Jednou z disciplín bolo aj preťahovanie lanom. V rozhodujúcom okamihu pôsobili cicavce na lano celkovou silou $3650N$ a vtáky $3220N$. Predpokladajte, že obe družstvá pôsobili na lano v navzájom opačných smeroch. Gravitačnú silu pôsobiacu na lano neuvažujte. Kto vyhral a aká veľká bola výsledná sila pôsobila na stred lana v rozhodujúcom okamihu?
Autor: PaedDr. Ľubomír Konrád

7. Viažem si kytičku (matematika)

Albatros raz pristál na lúke, kde rástli len červené a modré kvety. Chcel svojej albatrosici dva kvety doniesť, ked si všimol, že keby odtrhol ľubovoľné dva, bol by medzi nimi aspoň jeden modrý. Koľko červených

kvetov tam rástlo?
Autor: Andrej Vlček

8. Proxima (fyzika)

Vačice obľubujú hviezdu Proxima Centauri, pretože je k nám najbližšia. Nato, aby astronómovia vyjadrili jej vzdialenosť, používajú zaujímavú jednotku - svetelný rok, skratka ly. Jeden svetelný rok je vzdialenosť, ktorú prejde svetlo rýchlosťou svetla (akou inou, 300000 km/s) za jeden rok. Proxima je od nás vzdialená $4,2ly$. Ako dlho by trvalo, kým by sa lúč vyžiarený zo Zeme, dostal ku Proxime a prišiel naspäť? Vyjadrite v rozumnych jednotkach.
Autor: Andrej Vlček

9. "Ako sa do hory volá... (fyzika)

...tak sa z hory ozýva", zakričala vačica do hory a jej ozvena sa vrátila za 4 sekundy. Ako rýchlo musí vačica kráčať, aby sa za 10 minút k tejto hore dostala? Rýchlosť zvuku je $315\frac{m}{s}$.
Autor: Marián Horňák

10. Čokolády (matematika)

Sedem albatrosov zje trinásť čokolád za 221 minút. Za koľko minút zje sedemnásť albatrosov tri čokolády?
Autor: Marián Horňák

11. Kocka (matematika)

Albatros vyskočil na jeden vrchol kocky a nezoskočil, až kým neprešiel všetky jej hrany. Jednu hranu prejde za 2 minúty. Koľko mu to najmenej muselo trvať? **Autor:** Andrej Vlček

12. Hodiny Zeme (matematika a fyzika)

Koľko hodín trvá Zemi, kým obehne Slnko? Vyjadrite s presnosťou na celé hodiny! (Vtákopysk Vám ticho pošepkal, aby ste nezabudli na priestupný rok.)
Autor: Marián Horňák

13. RGB (matematika)

Slepý albatros má v krabičke 19 červených, 20 zelených a 21 modrých guľôčok. Postupne vyťahuje náhodné guľôčky. Minimálne koľko guľôčok musí vytiahnuť, aby si bol mohol byť istý, že vytiahol z každej farby aspoň jednu guľôčku?)
Autor: Marián Horňák

14. Zmrzlina (matematika)

Zmrzlinár albatros má 2 druhy kornútkov a 8 príchutí zmrzliny. Každá zmrzlina sa skladá z jedného kornútka a troch rôznych kopčekov zmrzliny. Koľko rôznych zmrzlín vie spraviť? (Na poradí kopčekov záleží.)
Autor: Marián Horňák

15. Hore a dole (fyzika)

Vačica Janka, známa športovkyňa, si rada zabehne na kopec, ktorý má za domom, a späť. Do kopca beží pomaly rýchlosťou 6 km/h, z kopca rýchlosťou 12 km/h. Počas behu nemá žiadne prestávky - hore na kopci sa hneď otočí a beží späť. Aká je jej priemerná rýchlosť?
Autor: Marián Horňák

16. Xurg a Borg (matematika a fyzika)

V ďalekom vesmíre sa nachádzajú neďaleko od seba dve planétky Xurg a Borg. Ich obyvatelia, vtákopysky, sa jedného dňa rozhodli, že si po obvode svojej planéty natiahnú špagát, aby tak zistili jej obvod. Srandovné je to, že na Borgu zistili, že ich lano je presne o 1 meter dlhšie ako lano na planéte Xurg. Zaujímalo by ich, o koľko väčší majú polomer planéty oproti Xurgu. (Predpokladajte, že planéty sú gule.)
Autor: Jakub Bahyl

17. Poháre (matematika)

Na stole je päť pohárov, prostredný je otočený hore dnom, ostatné sú otočené normálne. Albatros vie na povel otočiť práve dva poháre (otočiť znamená, že ak bol pôvodne hore dnom, teraz bude normálne a naopak). Nájdite spôsob, ak taký spôsob existuje, ako ich pomocou niekoľkých povelov albatros otočí všetky do normálnej polohy. Ak takýto spôsob neexistuje, ukážte prečo.
Autor: Kristína Čevorová

18. Kombajn (fyzika)

Vačica kosila pole. Jej kombajn má $4,7m$ širokú radlicu (to zúbkované vpredu, čím sa kosí) a jej pole má plochu $42,3ha$. Kombajn išiel priemernou rýchlosťou $5,4\,\mathrm{km/h}$. Ako najmenej dlho jej kosenie mohlo trvať?
Autor: Marián Horňák

19. NaCl (fyzika)

Vačica si niesla domov z nákupu kilo soli. Od radosti, že ho má, si vyskakovala, vyskakovala, až soľ skončila vo veľkom susedovom sude s čistou vodou. Vačica chcela svoju soľ naspäť, tak sa ako Pamela Anderson v Baywatchi za ním vrhla. Vytiahnuť sa jej nič nepodarilo, zato vrecko roztrhla a všetku soľ svojimi pohybmi rozpustila vo vode. Doma

si z plaviek vyžmýkala $0,5$ litra slanej vody. Ked sa všetka odparila, ostala po nej len usadenina hmotnosti jedného gramu. Aký objem má susedov sud?
Autor: Andrej Vlček

20. Guľatá planéta (matematika a fyzika)

Vtákopysk vysoký dva metre pristál na dokonale guľatej planéte s polomerom 10km. Ak má vtákopysk oči na vrchu hlavy, ako ďaleko sú veci, čo vidí na obzore?
Autor: Andrej Vlček

21. Kryha (fyzika)

Ktosi kdesi kadejakej vačici o ľadovcových kryhách prezradil, že z nich vytŕča len $\frac{1}{7}$ nad vodu. Akú hustotu majú ľadovce, ak hustota morskej vody je $1025\frac{kg}{m^3}$?
Autor: Andrej Vlček

22. Titanic (fyzika)

Titanic vyplával z rieky na more. Pritom sa vynorilo $1523,6m^3$ tohto oceľového kolosu. Koľko Titanic vážil? Hustota riečnej vody je $1000\frac{kg}{m^3}$, hustota morskej vody je $1030\frac{kg}{m^3}$.
Autor: Marián Horňák

23. Hodiny (matematika a fyzika)

Vtákopyska zaujíma, koľkokrát predbehne veľká ručička malú ručičku na ciferníku v čase od $7:37$ do $16:16$. Vieš to aj Ty?
Autor: Kristína Komanová

24. Lievance (matematika)

Albatros si chce opiecť 3 lievance, každý z oboch strán. Na panvicu sa mu však zmestia len 2 lievance. Opekanie jednej strany jedného lievanca trvá 5 minút. Koľko najmenej môže trvať opečenie všetkých troch lievancov? Ako to má albatros spraviť?
Autor: Marián Horňák

25. Kto šetrí, má za 4 (matematika)

Albatros vložil svojich 10000 strieborných dukátov do spoľahlivej gréckej banky. Tá mu sľúbila, že každý rok mu k peniazom, ktoré tam má, pripočíta 10%. Albatros 4 roky z účtu nič nevyberal, ani tam nič nevkladal. Koľko tam má peňazí?
Autor: Marián Horňák

26. Taký malý súčin... (matematika)

Albatros vynásobil všetky celé čísla od 123456 do 123465 vrátane. Aké sú posledné 2 cifry tohto súčinu?
Autor: Marián Horňák

27. Baktéria (matematika)

Chudák albatros dostal črevnú vtáčiu chrípku. Ostala v ňom jediná baktéria. A tá sa začala deliť. Každá baktéria sa rozdelí na dve, ktoré sa hneď môžu začať deliť, za 4 minúty. Za aký čas od začania delenia bude mať v sebe albatros viac než 1000 baktérií?
Autor: Andrej Vlček

28. Vlak na moste (fyzika)

Most, po ktorom ide vlak s vačicou, je dlhý 600m. Vlak ide rýchlosťou $30\frac{m}{s}$. Aký dlhý je vlak, ak ide po moste $30s$?
Autor: Andrej Vlček

29. Domáci miláčikovia (matematika)

Albatros doma chová pavúky a chrobáky. Dokopy narátal 44 hláv a 290 nôh. Koľko mal pavúkov? (Každý pavúk má 8 nôh a každý chrobák 6 nôh.)
Autor: Marián Horňák

30. Hop, žabka, hop! (matematika)

Žaba rada skáče. A skáče tak, že najskôr skočí o $1m$ dozadu, potom o $2m$ dopredu, potom o $3m$ dozadu, potom o $4m$ dopredu a tak ďalej, až kým neskočí o $42m$ dozadu, lebo 42 je jej obľúbené číslo. Albatros je lenivý a preto skočí iba raz. O koľko metrov a ktorým smerom má albatros skočiť, ak so žabou začínali na tom istom mieste a chcú byť aj po doskákaní spolu?
Autor: Marián Horňák

31. Sirup (fyzika)

Vačica zmiešala $1kg$ vody s hustotou $1\frac{kg}{l}$ a $1kg$ sirupu s hustotou $1,25\frac{kg}{l}$. Aká je hustota výslednej kvapaliny? **Autor:** Marián Horňák

32. Domov dôchodcov (matematika)

Malý albatros prišiel navštíviť obe svoje babky a oboch dedkov do domova. Vnúčikovi starí rodičia svoj vek nepovedali, zato mu prezradili, že vekový priemer ich štyroch a jeho je 73 rokov. Malý albatros by

aspoň chcel vedieť, aký je vekový priemer jeho starých rodičov bez neho. Pomôžete mu? Malý albatros má totiž len 5 rokov...
Autor: Andrej Vlček

33. Idú dve babky po púšti... (fyzika)

Idú dve vačice po Mesiaci a uvidia obrovský valec s piestom. Jedna z nich na piest vyskočí a tlak vo valci sa zvýši z $400Pa$ na $485Pa$. Koľko váži druhá vačica? (Piest vážil $80kg$ a obe vačice spolu vážili $30kg$.)
Autor: Marián Horňák

34. 60-uholník (matematika)

Albatros by rád vedel, aký je uhol pri vrchole pravidelného 60-uholníka. Vieš to aj Ty?
Autor: Marián Horňák

35. Kvark (matematika)

Každý albatros vie, že jadro atómu sa skladá z protónov s nábojom +1 a z neutrónov s nábojom 0. Čo už ale asi nevie, je, že každý protón sa skladá z dvoch u kvarkov a jedného d kvarku a neutrón z dvoch d kvarkov a jedného u kvarku. Aké sú náboje u a d kvarku?
Autor: Andrej Vlček

36. Prechádzka (fyzika)

Vačica sa veľmi rada prechádza po kopcoch Stredozeme. Jedného dňa si dala pomalú oddychovú vychádzku. Výlet si rozdelila na dve časti. Celá prechádzka, dlhá 10km, jej trvala 4 hodiny. Aké dlhé boli jednotlivé časti cesty, ak prvú časť prešla rýchlosťou $0,8\frac{m}{s}$ a druhú časť rýchlosťou

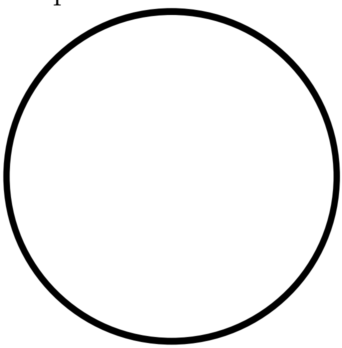
$0,6\frac{m}{s}$?
Autor: Andrej Vlček

37. **Trhnúť o kolečko... (fyzika)**

Vačica Janka a vačica Danka behajú po kruhovej bežeckej dráhe s polomerom $57,3m$. Janka behá o 9 km/h rýchlejšie ako Danka a preto ju práve teraz predbehla. Za aký čas ju predbehne znova?
Autor: Marián Horňák

38. **Stred (matematika)**

Albatros by rád vedel, kde je stred tejto kružnice! Skúste ho presne nájsť pomocou rysovacích pomôcok.



Autor: Andrej Vlček

39. **Youtube (fyzika)**

Vačica má doma pomalý internet. $10\frac{kB}{s}$, ozaj nič moc. Keď si chcela pustiť Ievan polku, zistila, že pesnička je dlhá 2 : 46 a na jej prehranie potrebuje načítať 4980 kB. Aby jej video nesekalo, tak si ju hneď na začiatku pauzla a teraz sleduje progress bar (toho hadíka, ktorý vám zobrazuje, koľko ste už načítali). Pri akom čase má byť progress bar,

aby keď si vačica Ievan polku pustí, nebude jej už sekať?
Autor: Andrej Vlček

40. Misky (matematika a fyzika)

Vtákopysk stojí v obchode pred regálom s miskami. Všetky misky majú rovnaký tvar, len rôznu veľkosť. Vtákopysk si na etikete prečítal, že miska s polomerom $10cm$ má objem $400ml$. On ale potrebuje misku s objemom aspoň $1,5$ litra. Ktorá má aký objem sa nedozvie, ostatné misky majú etikety postŕhané a na cenovkách je uvedený iba ich polomer. Ktorý z polomerov 12, 16, 20, 24, 28, 32, 40, $50cm$ si má vybrať, aby bol spokojný a pritom mu miska čo najmenej zavadzala v skrini?
Autor: Kristína Čevorová

41. Alf a Ilf (fyzika)

Vačica Alf si našla kamaráta vačicu Ilf na Marse. Píšu si spolu SMSky morzeovkou rýchlosťou svetla c. Alf si ale všimol, ze Ilfovi to trvá rôzny čas, kým odpíše, ale Ilf vždy odpíše okamžite, ako mu SMSka dôjde. Alf sa nato pozrel lepšie a stopol si to: najmenší čas odpovede od Ilfa je $T1$ a najväčší $T2$. Ak Zem obieha po kružnici s polomerom R_z, aký je polomer kružnice, po ktorej obieha Mars (R_m)?
Autor: Andrej Vlček

42. Balóny (fyzika)

Odhadnite, koľko héliových balónikov treba nato, aby vás odlepili od podlahy. Vzduch má hustotu $1\frac{kg}{m^3}$, hélium pätinovú vzduchu. Zvyšné parametre? Urobte to ako vačice: proste ich odhadnite :)
Autor: Andrej Vlček

43. Obdĺžnik (matematika)

Albatros si vystrihol svoj obľúbený obdĺžnik a prehol ho pozdĺž jednej uhlopriečky. Uhlopriečka mala dĺžku $10cm$, vzdialenosť zvyšných dvoch vrcholov po preložení bola $6cm$. Akú plochu má odĺžnik?
Autor: Andrej Vlček

44. Bazén (fyzika)

Vačica má doma kruhový bazén bazén s polomerom $3m$ a hĺbkou $1m$. Za 12 hodín ho napustila doplna vodou, ktorá pritekala rúrou s vnútorným polomerom $10cm$. Voda v rúre tiekla konštantnou rýchlosťou. Akou?
Autor: Marián Horňák

Riešenia

$\boxed{1.}$ Po prvom roku mal 19. Po ďalšom roku mal 20. Po ďalšom roku mal 21. Po ďalšom roku mal 22. Po ďalšom roku mal 23. Po ďalšom roku mal 24. Po ďalšom roku mal 25. Po ďalšom roku mal 26. Po ďalšom roku mal 27. Po ďalšom roku mal 28. Po ďalšom roku mal 29. Po ďalšom roku mal 30. Po ďalšom roku mal 31. Po ďalšom roku mal 32. Po ďalšom roku mal 33. Po ďalšom roku mal 34. Po ďalšom roku mal 35. Po ďalšom roku mal 36. Po ďalšom roku mal 37. Po ďalšom roku mal 38. Po ďalšom roku mal 39. Po ďalšom roku mal 40. Po ďalšom roku mal 41. Po ďalšom roku mal 42. Po ďalšom roku mal 43. Po ďalšom roku mal 44. Po ďalšom roku mal 45. Po ďalšom roku mal 46. Po ďalšom roku mal 47. Po ďalšom roku mal 48. Po ďalšom roku mal 49. Po ďalšom roku mal 50. Po ďalšom roku mal 51. Po ďalšom roku mal 52. Po ďalšom roku mal 53. Po ďalšom roku mal 54. Po ďalšom roku mal 55. Po ďalšom roku mal 56. Po ďalšom roku mal 57. Po ďalšom roku mal 58. Po ďalšom roku mal 59. Po ďalšom roku mal 60. Po ďalšom roku mal 61. Po ďalšom roku mal 62. Po ďalšom roku mal 63. Po ďalšom roku mal 64. Po poslednom roku teda mal 65.

$\boxed{2.}$ Pre polievanie záhradky je dôležitá jej rozloha. Malý albatros poleje $1m^2$ za $0,5$ hodiny. Tým pádom poliatie $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 5m^2$ mu bude trvať päťkrát toľko, $2,5$ hodiny.

$\boxed{3.}$ Riešime jednoduchú priamu úmeru:
$3,28$ stopy ... 1 meter
8 stôp ... X metrov
$X = 8/3.28 \cong 2.44$ metra

$\boxed{4.}$ Pri rezaní na 3 časti urobíme 2 rezy. Jeden nám potom trvá $\frac{12}{2}$ minút$=$ 6 minút. Pri rezaní na 4 časti spravíme 3 rezy, čo je $3 \cdot 6 = 18$ minút.

$\boxed{5.}$ Zrejme plocha, ktorú rodinka tapetuje, je pre obe tapety rovnaká a je daná súčinom dĺžky a šírky tapety. Tým pádom musí platiť: $18 \cdot 0,5 = 0,6 \cdot d$, čiže $d = 15m$.

$\boxed{6.}$ Vyhral samozrejme ten, kto ťahal silnejšie, čiže cicavce. Keďže skupiny ťahali proti sebe, sily treba od seba odčítať: $3650N - 3220N = 430N$.

$\boxed{7.}$ Ak by tam boli aspoň dva červené kvety, mohol by doniesť dva červené kvety. A keďže tam nejaký červený je, je tam práve jeden. :)

$\boxed{8.}$ Táto úloha preverovala skôr Vašu čitateľskú gramotnosť, ako vedomosti z fyziky! Svetelný rok je vzdialenosť, ktorú prejde svetlo za rok - to je veta zo zadania. Teda $1ly$ trvá svetlu prejsť 1 rok. Od nás k Proxime a späť je to $2 \cdot 4,2ly = 8.4ly$, teda to bude trvať $8,4$ roka.

$\boxed{9.}$ Zvuku k hore cesta trvala 2 sekundy a 2 sekundy aj cesta späť. Vačici to má trvať 600 sekúnd, teda stačí, ak pôjde 300-krát pomalšie. Teda jej rýchlosť bude

$$\frac{315\frac{m}{s}}{300} = 1,05\frac{m}{s}$$

$\boxed{10.}$ Sedem albatrosov zje trinásť čokolád za 221 minút. Potom sedem albatrosov zje jednu čokoládu za 13-krát kratšiu dobu: $\frac{221}{13} = 17$ minút. Potom jeden albatros zje jednu čokoládu za 7-krát dlhšiu dobu: $7 \cdot 17 = 119$ minút. Potom sedemnásť albatrosov zje jednu čokoládu za 17-krát kratšiu dobu: $\frac{119}{17} = 7$ minút. Teda sedemnásť albatrosov zje tri čokolády za 3-krát dlhšiu dobu: $7 \cdot 3 = 21$ minút.

$\boxed{11.}$ Do každého vrcholu vedú 3 hrany - 3 možné cesty albatrosa. Ak však albatros niekde príde, musí odtiaľ aj odísť (inak by tam zomrel od nudy). Teda do každého vrcholu (okrem toho, kde začína a toho, kde končí) musí albatros 2-krát prísť a 2-krát odísť (ak by tam prišiel a odišiel iba raz, určite by neprešiel jednou z tých troch hrán, ktoré do daného vrcholu vedú). A teda aspoň jednou hranou pri tomto vrchole išiel 2-krát. Toto platí pre 6 vrcholov a každá hrana, po ktorej išiel 2-krát, v nejakom z nich začína alebo končí, a teda prešiel 2-krát po aspoň troch hranách. Keďže kocka má 12 hrán, prešiel aspoň 15 hrán. A to sa dá napríklad ako ABCDAEFGHEFBCGHD (ak si kocku označíme klasicky - spodný štvorec ABCD, štvorec nad ním EFGH) A keďže prechod po hrane mu trvá 2 minúty, prejde to za 30 minút.

$\boxed{12.}$ Každé štyri roky má rok o deň viac. Táto korekcia je práve kvôli tomu, že obeh Zeme okolo Slnka netrvá presne 365 dní, ale o štvrtinu viac, čo sa za 4 roky pozbiera na celý deň navyše. Deň má 24 hodín, teda celkovo obeh trvá $24 \cdot 365,25 = 8766$ hodín.

$\boxed{13.}$ V najhoršom prípade sa mu môže stať, že už vytiahol všetky modré a zelené a ešte ani jednu červenú guľôčku. Teda ani po vytiahnutí 41 guľôčok si nemôže byť istí, že má z každej farby aspoň jednu guličku. Ak však vytiahne 42, môže si tým byť istý, pretože v krabici ostalo 18 guľôčok, ale z každej farby je ich aspoň 19, teda aspoň jedna z každej farby je už vonku.

$\boxed{14.}$ Ku každému z dvoch rôznych kornútkov vieme vybrať prvý kopček z 8 príchutí, druhý zo 7 zvyšných a tretí zo 6 zvyšných. Dokopy teda máme $2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 672$ možností.

$\boxed{15.}$ Nech je dráha dlhá X km. Do kopca bude bežať $\frac{X}{6}$ hodín, z kopca $\frac{X}{12}$ hodín. Spolu teda prejde dráhu $2X$ km za

$$\frac{X}{6} + \frac{X}{12}h = \frac{3X}{12}h = \frac{X}{4}h$$

Priemerná rýchlosť teda bude

$$\frac{2X\text{km}}{0,25\text{h}} = 8\,\text{km/h}$$

$\boxed{16.}$ Označme o_1 obvod planéty Xurg a o_2 obvod planéty Borg. R_1 a R_2 sú porade polomery planét Xurg a Borg. Potom pre obvody planét platí:

$$o_1 = 2 \cdot \pi \cdot R_1$$

a

$$o_2 = 2 \cdot \pi \cdot R_2$$

Vieme, že $o_2 = o_1 + 1m$. Platí teda, že $2 \cdot \pi \cdot R_2 = 2 \cdot \pi \; cdot R_1 + 1m$, odkiaľ $R_2 = R_1 + \frac{1}{2\cdot\pi}$ m, teda

$$R_2 - R_1 = \frac{1}{2 \cdot \pi} m = 0,159m \cong 16cm$$

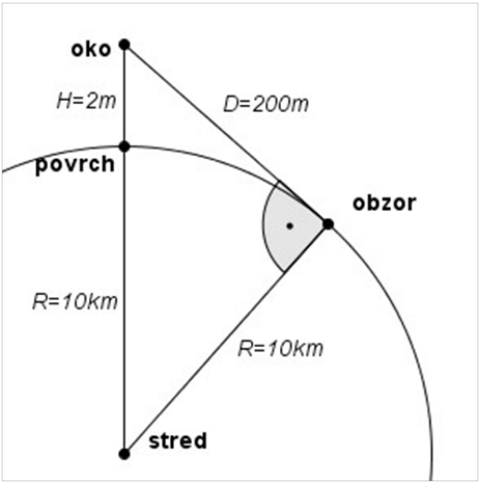
$\boxed{17.}$ Nedá sa to. Všimnime si, ako sa zmení počet pohárov hore dnom po 1 otáčaní. Ak boli oba poháre dole dnom, tak sa zmenší o 2. Ak boli oba hore dnom, zväčší sa o 2. Ak bol jeden hore a druhý dole dnom, nezmení sa. Všimnime si teda, že keďže na začiatku bol počet pohárov hore dnom nepárny, vždy ostane nepárny a teda nemôže byť nulový.

$\boxed{18.}$ Keďže $5,4\frac{hm}{h} = 1,5\frac{m}{s}$, kombajn za sekundu prejde priemerne $1,5m$, teda skosí priemerne $4,7m \cdot 1,5m = 7,05m^2$. Tiež vieme, že $42,3ha = 423000m^2$. Potom skosenie celej plochy mu bude trvať

$$\frac{423000}{7.05}s = 60000s = 1000min = 16h40min$$

$\boxed{19.}$ Keďže vačica soľ dobre všetku rozpustila, koncentrácia soli (množstvo soli na objem tekutiny) vo vode je konštantná. Môžeme ju vypočítať: $\frac{1g}{0,5l} = 2\frac{g}{l} = 2\frac{kg}{m^3}$. Keďže v celom sude sa rozpustil 1 kg soli, sud má objem $0,5m^3$.

$\boxed{20.}$ Uvedomme si, že obzor je práve taký bod, na ktorý keď sa pozeráme, tak smer nášho pohľadu je dotyčnicou k povrchu planéty. Ak by bol nesečnicou, pozeráme sa do neba, ak sečnicou, keby sme sa pozreli o kúsok vyššie, videli by sme stále planétu, čiže by to nemohol byť obzor. Teda smer pohľadu je kolmý na polomer planéty. Čiže trojuholník obzor-oko-stred planéty je pravouhlý a my dve strany poznáme, nie je problém z Pytagorovej vety vypočítať tretiu: 200 metrov.



$\boxed{21.}$ Aby boli sily v rovnováhe, musí sa vztlaková sila rovnať gravitačnej. Teda podľa archimedovho zákona:

$$V_{ponor} \cdot \rho_{vody} \cdot g = V_{celkovy} \cdot \rho_{ladu} \cdot g$$

Keďže nad hladinu trčí $\frac{1}{7}$ objemu, pod hladinou je ponorených zvyšných $\frac{6}{7}$ objemu:

$$\frac{V_{ponor}}{V_{celkovy}} = \frac{6}{7}$$

Dosadíme, vykrátime:

$$\rho_{ladu} = \rho_{vody} \cdot \frac{6}{7}$$

$$\rho_{ladu} = 879 \frac{kg}{m^3}$$

$\boxed{22.}$ Označme si hmotnosť Titanicu ako m. Keďže morská voda je hustejšia, pôsobí na telesá v nej väčšia vztlaková sila, teda plávajúcim telesám stačí menší ponorený objem na to, aby sa vztlaková sila vyrovnala gravitačnej. A na tomto vlastne postavíme aj celé riešenie - vztlaková sila vody na loď je rovná gravitačnej sile, ktorou je loď priťahovaná zemou. V rieke bol ponorený objem V z Titanicu. V mori je ponorený objem $V - 1523,6m^3$. Ak napíšeme Archimedov zákon pre oba prípady, dostaneme dve rovnice s dvoma neznámymi:

$$m \cdot g = 1000\frac{kg}{m^3} \cdot V \cdot g$$

$$m \cdot g = 1030\frac{kg}{m^3} \cdot (V - 1523,6m^3) \cdot g$$

Vyjadríme V z oboch rovníc:

$$V = \frac{m}{1000\frac{kg}{m^3}}$$

$$V = 1523.6m^3 + \frac{m}{1030\frac{kg}{m^3}}$$

Dáme do rovnosti:

$$\frac{m}{1000\frac{kg}{m^3}} = 1523,6m^3 + \frac{m}{1030\frac{kg}{m^3}}$$

Odtiaľ $m = \frac{1000 \cdot 1030 \cdot 1523,6}{30} kg \cong 52310$ ton (reálna hmotnosť Titanicu)

$\boxed{23.}$ O 7 : 37 je minútová ručička tesne pred hodinovou - hodinová je za polovicou cesty medzi číslami 7 a 8, zatiaľ čo minútová len v $\frac{2}{5}$. Teda o chvíľku sa stretnú. Potom sa stretnú ešte medzi 8 a 9, 9 a 10, 10 a 11, na poludnie, medzi 1 a 2, 2 a 3, 3 a 4. Medzi 4 a 5 to už nestihnú, pretože o 16 : 16 je minútová ručička ešte pred 4, zatiaľ čo hodinová už za ňou. Spolu ju teda predbehne 8-krát.

$\boxed{24.}$ Riešenie je 15 minút. Najskôr opečieme prvý a druhý lievanec z jednej strany. Potom prvý z druhej strany, spolu s tretím. A nakoniec opečieme zvyšnú stranu druhého a tretieho lievanca.

$\boxed{25.}$ Keď k nejakej sume pripočítame 10%, zvýšime ju na 110%, čo je ekvivalentné tomu, že ju prenásobíme číslom $1,1$. Toto sa za 4 roky stalo 4-krát, na účte je tým pádom $10000 \cdot 1,1 \cdot 1,1 \cdot 1,1 \cdot 1,1 = 14641$ strieborných dukátov.

$\boxed{26.}$ $123465 \cdot 123464$ má na konci zjavne 0, teda je deliteľné 10. Aj 123460 je deliteľné 10. Spolu je to teda deliteľné 100 a teda na konci musia byť 2 nuly.

$\boxed{27.}$ Keďže každý raz, čo sa baktéria môže deliť, sa delí, tak po každom delení sa počet baktérií zdvojnásobí. Tak pozrime sa, ako bude vyzerať počet baktérií: $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024$. Teda je potrebných 10 delení, čo trvá 40 minút.

$\boxed{28.}$ Začiatočný bod vlaku prejde most za $t = \frac{600m}{30\frac{m}{s}} = 20s$. Zvyšných $10s$ idú po moste len vozne, teda dĺžka samotného vlaku je $30\frac{m}{s} \cdot 10s = 300m$.

$\boxed{29.}$ Ak by to boli všetko iba chrobáky, tak 44 hlavám by prislúchalo $44 \cdot 6 = 264$ nôh. Nôh je však dokopy o 26 kusov viac - sú to nohy pavúkov, ktoré sme nezarátali. Za každého pavúka nám ostali 2 nezarátané nohy, teda pavúkov je $\frac{26}{2} = 13$ kusov.

$\boxed{30.}$ Pozrime sa, na akých pozíciách od začiatku je žaba po jednotlivých skokoch:
$-1,\ 1,\ -2,\ 2,\ -3,\ 3,\ -4,\ 4,\ \dots$
Vidíme, že po párnych skokoch je žaba od začiatku tak ďaleko, ako polovica poradového čísla skoku. Teda po 42. skoku bude žaba $21m$ vpredu. Teda ak chce byť albatros na tom istom mieste, musí skočiť tiež o $21m$ dopredu.

$\boxed{31.}$ Výsledná kvapalina má hmotnosť $2kg$, objem vody v nej je 1 liter, objem sirupu je $\frac{1kg}{1{,}25\frac{kg}{l}} = 0,8l$, teda objem výslednej kvapaliny je $1.8l$. Jej hustota je potom $\frac{2kg}{1{,}8l} = 1,11\frac{kg}{l}$.

$\boxed{32.}$ Súčet vekov starých rodičov a vnúčika je $73 \cdot 5 = 365$ rokov, teda súčet vekov starých rodičov je 360 rokov, teda ich vekový priemer je 90 rokov.

$\boxed{33.}$ Keďže gravitačná konštanta sa nemení, hmotnosť je priamo úmerná gravitačnej sile. To je jediná sila, ktorá vačicu s piestom ťahá k Mesiacu. Prierez piestu sa tiež nemení, teda tlak vo valci je priamo úmerný pôsobiacej sile, čiže sile gravitačnej. Teda, ak tlak $400Pa$ spôsobilo $80kg$, tlak $1Pa$ spôsobí $0,2kg$ a teda tlak $485Pa$ spôsobí $97kg$. To je hmotnosť prvej vačice s piestom. Teda prvá vačica váži $97kg - 80kg = 17kg$. Druhá potom váži $30kg - 17kg = 13kg$.

$\boxed{34.}$ Z dvoch susedných vrcholov spravíme rovnoramenný trojuholník ku stredu opísanej kružnice. Uhol pri strede bude $\frac{360}{60} = 6$ stupňov, teda uhly pri základni budú $\frac{180-6}{2} = 87$ stupňov. Uhol pri vrchole je zložený z dvoch takýchto uhlov, teda má veľkosť $2 \cdot 87 = 174$ stupňov.
Iné riešenie: Možno si všimnúť, že súčet vnútorných uhlov n-uholníka je $(n-2) \cdot 180$ stupňov (možno ho rozložiť na $n-2$ trojuholníkov). Ak máme pravidelný 60 uholník, všetky jeho vnútorné uhly sú rovnaké teda veľkosť jedného bude $\frac{(60-2)\cdot 180}{60} = 174$ stupňov.

$\boxed{35.}$ Náboj neutrónu alebo protónu je jednoducho súčet nábojov vecí vo vnútri, teda musí platiť:

$$2u + d = 1$$

$$u + 2d = 0$$

Máme ľahké dve rovnice o dvoch neznámych. Vidno, že u=-2d, dosadíme:

$$-3d = 1 \Rightarrow d = -1/3 \Rightarrow u = 2/3$$

$\boxed{36.}$ Prvá časť bola dlhá s_1 a trvala mu prejsť t_1, druhá časť bola dlhá s_2 a trvala t_2. Vieme že:

$$0,8m/s = 2,88\,\mathrm{km/h} a 0,6\mathrm{m/s} = 2,16\,\mathrm{km/h}$$

$$t_1 = s_{\frac{1}{2,88\,\mathrm{km/h}}}$$

a

$$t_2 = \frac{s_2}{2,16\,\mathrm{km/h}}$$

Tiež:

$$t_1 + t_2 = 4h$$

a aj

$$s_1 + s_2 = 10\text{km}$$

, do prvej rovnice môžme dosadiť za časy:

$$\frac{s_1}{2,88} + \frac{s_2}{2,16} = 4$$

$$s_1 + s_2 = 10\text{km}$$

Teda máme 2 rovnice s dvoma neznámymi, čo keď vyriešime dostaneme:

$$s_1 = 5.44\text{km}$$

$$s_2 = 4.56\text{km}$$

$\boxed{37.}$ Obvod kruhovej dráhy je $2 \cdot \pi \cdot 57,3m \cong 360m$. Vzhľadom na Danku získava Janka náskok rýchlosťou 9 km/h = 2,5m/s a predbehne ju o kolečko práve vtedy, keď získa náskok rovný obvodu kolečka. To bude za $\frac{360m}{2.5\frac{m}{s}}$ = 144 sekúnd = 2 minúty 24 sekúnd .

$\boxed{38.}$ Zoberme si os ľubovoľnej tetivy. Keďže os úsečky je množina bodov, ktoré majú od jej okrajových bodov rovnakú vzdialenosť, a aj stred kružnice má od oboch krajných bodov rovnakú vzdialenosť (lebo sú to body ležiace na kružnici), tak potom stred kružnice musí ležať na osi ľubovoľnej tetivy. Stačí zobrať dve osi tetív a nájsť ich priesečník - keďže stred musí ležať na oboch, musí byť v priesečníku. Na rovnakom princípe je založená metóda, že si zoberieme tri rôzne body na kružnici, zostrojíme trojuholník a nájdeme jeho stred kružnice opísanej.

$\boxed{39.}$ Skúsme si situáciu predstaviť takto: načítavanie je chlapík A, ktorý vyštartuje hneď a beží pomalšie, prehrávanie videa je rýchlejší chlapík B. Aký musíte dať náskok A, aby ho B dobehol práve na konci dráhy?

Rýchlosť chlapíka A je $10\frac{kB}{s}$, pesnička má $2 \cdot 60 + 46 = 166s$, teda rýchlosť chlapíka B je

$$\frac{3320kB}{166s} = 20\frac{kB}{s}$$

.Dráha je dlhá 1000 kB. Zadanie chce rozdiel časov, za ktorý to chlapíci prebehnú:

$$\frac{1000}{10} - \frac{1000}{20} = 100 - 50 = 50s$$

.

$\boxed{40.}$ Ak sa polomer zväčší k-krát, podstava, ktorá závisí od druhej mocniny polomeru, sa zväčší k $\cdot k$-krát, a k-krát sa musí zväčšiť aj výška, aby sa zachoval tvar.
Teda objem sa celkovo zväčší $k \cdot k \cdot k$-krát. Na $12cm$ sa z $10cm$ polomer zväčší $1,2$-krát, teda objem bude

$$400ml \cdot 1,2 \cdot 1,2 \cdot 1,2 = 692,1ml$$

, čo je málo. Pre polomer 16 cm, bude zväčšenie krát $1,6$, teda objem

$$400ml \cdot 1,6 \cdot 1,6 \cdot 1,6 = 1638,4ml > 1,5l$$

, teda nám stačí a keďže väčší hrniec by nám zbytočne zavadzal, treba zobrať hrniec s polomerom 16 cm.

$\boxed{41.}$ Zrejme sa pri obehu Zeme a Marsu okolo Slnka mení medzi planétami vzdialenosť. Najmenšia a najväčšia nastávajú, keď je Slnko, Mars a Zem na jednej priamke. Najmenšia vzdialenosť je tá, keď sú planéty na jednej strane od Slnka, teda ich vzdialenosť je $R_z - R_m$, najväčšia, keď je Slnko medzi nimi, teda vzdialenosť je Rz+Rm. Pre jednotlivé vzdialenosti potom platí:

$$2 \cdot (R_m - R_z) = c \cdot T_1$$

$$2 \cdot (R_m + R_z) = c \cdot T_2$$

Sčítame rovnice a dostaneme:

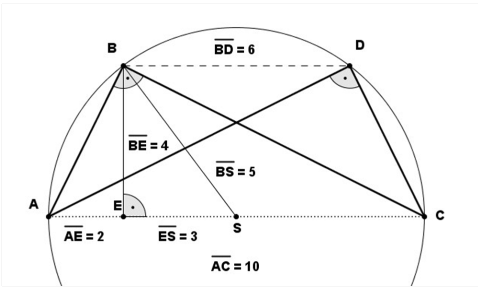
$$R_m = c \cdot \frac{T_1 + T_2}{4}$$

$\boxed{42.}$ Jeden balón je zhruba kocka s rozmermi $20 \cdot 20 \cdot 20cm = 0,008m^3$. Počet balónov nech je N. Ja vážim $50kg$, hustota tela nech je hustota vody, teda mám objem $50l = 0,05m^3$. Hélium má hustotu $0,2kg/m^3$. Ak sa pozerám na moje telo s balónmi ako jedno teleso, potom potom jeho objem je $0,05m^3 + N \cdot V_{balon}$ a hmotnosť $50kg + N \cdot V_{balon} \cdot \rho_{He}$. Potom pre minimálny počet balónov platí rovnosť vztlakovej sily od vzduchu a tiažovej sily:

$$(0,05m^3 + N \cdot V_{balon}) \cdot \rho_{vz} \cdot g = (50kg + N \cdot V_{balon} \cdot \rho_{He}) \cdot g$$

V tomto odhade to vychádza 8000. Budeme veľkorysí a za správne považujeme všetky výsledky z intervalu $800 - 80000$ balónikov.

$\boxed{43.}$ Všimnime si trojuholník ESB. Zrejme úsečka ES má polovičnú dĺžku úsečky BD. Bod S je podľa Talesovej vety stred kružnice opísanej, keďže je v strede uhlopriečky AC. Tým pádom je polomer kružnice opísanej $\frac{10cm}{2} = 5cm$, čiže aj BS meria $5cm$. $ABDC$ je rovnoramenný lichobežník, ktorého dolná základňa je o $4cm$ dlhšia. Vďaka rovnoramennosti sa toto predĺženie rovnomerne rozdelí na obe strany: $|AE| = 2cm$, teda $|ES| = 3cm$. BE je výška, teda máme pravouhlý trojuholník, môžeme použiť Pytagorovu vetu na zistenie dĺžky BE: $4cm$. Potom plocha ABC je $\frac{10cm \cdot 4cm}{2} = 20cm^2$. Trojuholníky sú dva a zhodné, teda plocha obdĺžnika je $40cm^2$.



$\boxed{44.}$ Celé napúšťanie si možno predstaviť tak, že všetka voda bola vo veľmi dlhej rúre a nejaký piest ju pomaly vytláčal von. Piestu trvalo 12 hodín prejsť celú dĺžku rúry a išiel rovnakou rýchlosťou ako voda. Teda ak zistíme dĺžku rúry, budeme vedieť aj túto rýchlosť. Celá rúra musí mať rovnaký objem ako bazén, keďže v nej bolo práve toľko vody, aby ho naplnila. Oba útvary sú valce a objem valca zistíme ako súčin obsahu kruhovej podstavy a výšky:

$$V_{bazen} = \pi \cdot 3m \cdot 3m \cdot 1m$$

$$V_{rura} = \pi \cdot 0,01m \cdot 0,01m \cdot X$$

Odtiaľ

$$X = \frac{3m \cdot 3m \cdot 1m}{0,01m \cdot 0,01m} = 90000m = 90\text{km}$$

Teda piest prešiel 90km za 12 hodín - išiel rýchlosťou $\frac{90\text{km}}{12\text{h}} = 7,5\,\text{km/h}$.