Řešení úloh 1. ročníku MFNáboje

Úloha 1 ... Rozcvička

Albatros se pokoušel spočítat jednu úlohu. Trvalo mu to. První rok. Další rok. Na začátku mu bylo 18 let. Kolik let mu bylo na konci? *Marián Horňák*

Po prvním roku mu bylo 19. Po dalším 20. Po dalším 21. Po dalším 22. Po dalším 23. Po dalším 24. Po dalším 25. Po dalším 26. Po dalším 27. Po dalším 28. Po dalším 29. Po dalším 30. Po dalším 31. Po dalším 32. Po dalším 33. Po dalším 34. Po dalším 35. Po dalším 36. Po dalším 37. Po dalším 38. Po dalším 39. Po dalším 40. Po dalším 41. Po dalším 42. Po dalším 43. Po dalším 44. Po dalším 45. Po dalším 46. Po dalším 47. Po dalším 48. Po dalším 49. Po dalším 50. Po dalším 51. Po dalším 52. Po dalším 53. Po dalším 54. Po dalším 55. Po dalším 56. Po dalším 57. Po dalším 58. Po dalším 59. Po dalším 60. Po dalším 61. Po dalším 62. Po dalším 63. Po dalším 64. A po posledním 65.

Úloha 2 ... Zahrádky

Albatrosové mají zahrádky zásadně ve tvaru čtverce. Malý albatros zalije svojí zahrádku, která má hranu o délce 1 m, *za půl hodiny. Jak dlouho mu bude trvat zalít jeho a otcovu zahrádku, když ta má hranu dlouhou* 2 m. *Andrej Vlček*

Při zalévání zahrádky je důležitá její plocha. Malý albatros zalije $1\,\mathrm{m}^2$ za 0,5 hodiny. Zalévání $1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 5\,\mathrm{m}^2$ mu bude trvat pětkrát více času a tedy 2,5 hodiny.

Úloha 3 ... Hop, ptakopysku, hop!

Ptakopysk Ivan přeskočil z jednoho místa na druhé, které bylo vzdálené přesně 8 stop. *Kolik metrů Ivan přeskočil, když metr má* 3,28 stop*?* *Dávid Lupták*

Řešíme jednoduchou přímou úměru

$$\begin{aligned} 3{,}28\,\text{stopy} &\ldots 1\,\text{metr} \\ 8\,\text{stop} &\ldots x\,\text{metr} \\ x &= 8 \cdot 1/3{,}28 \approx 2{,}44\,\mathrm{m}\,. \end{aligned}$$

Úloha 4 ... Řezáme

Rozřezat dřevěnou tyč na tři části trvá albatrosovi 12 minut. *Jak dlouho mu bude trvat rozřezat tyč na čtyři části?* *Vladimír Macko*

Při řezání na tři části uděláme dva řezy. Jeden nám trvá $12\,\mathrm{minut}/2 = 6\,\mathrm{minut}$. Při řezání na čtyři části uděláme tři řezy, což zabere $3 \cdot 6\,\mathrm{minut} = 18\,\mathrm{minut}$.

Úloha 5 ... Tapety

Albatrosí rodinka se rozhodla vytapetovat si obývací pokoj. Pan albatros vybral tapety se šířkou 50 cm *a spočítal, že jich bude potřeba* 18 *metrů. Když paní albatrosice uviděla, jaký vzor tapet vybral, téměř omdlela a okamžitě vybrala jinou se šířkou* 60 cm. *To zase téměř omdlel pan albatros a znovu musel počítat, kolik metrů bude potřeba tentokrát. Zachráníte rodinné štěstí a spočítáte kolik metrů?* *Andrej Vlček*

Plocha, kterou chce rodinka vytapetovat, je v obou případech stejná a je daná součinem délky tapet a jejich šířkou. Neznámá délka d nových tapet tak musí splňovat $18\,\mathrm{m} \cdot 0{,}5 = d \cdot 0{,}6$, což znamená $d = 15\,\mathrm{m}$.

Úloha 6 ... Bicepsy

Savci a ptáci si jednou uspořádali velké sportovní závody. Aby to bylo fér, byl rozhodčím ptakopysk. Jednou z disciplín bylo i přetahování lanem. V rozhodujícím okamžiku působili savci na lano celkovou silou 3650 N *a ptáci* 3220 N. *Předpokládejte, že obě družstva působila na lano v navzájem opačných směrech. Gravitační sílu působící na lano neuvažujte. Kdo vyhrál a jak velká byla výsledná síla, která působila na lano v rozhodujícím okamžiku?*
PaedDr. Ľubomír Konrád

Vyhrál samozřejmě ten, kdo tahal větší silou, takže savci. Jelikož skupiny tahali proti sobě, je třeba od sebe síly odečíst $3650\,\mathrm{N} - 3220\,\mathrm{N} = 430\,\mathrm{N}$.

Úloha 7 ... Vážeme si kytičku

Albatros jednou přistál na louce, kde rostly jen červené a modré květy. Chtěl své albatrosici donést dva květy, když si všiml, že kdyby utrhl libovolné dva, byl by mezi nimi alespoň jeden modrý. Kolik červených květů tam rostlo? *Andrej Vlček*

Kdyby tam byly alespoň dva červené květy, mohl by donést dva červené. A jelikož tam nějaký červený je, je tam právě jeden.

Úloha 8 ... Proxima

Vačice mají rády hvězdu Proxima Centauri, protože je k nám nejblíž. Na to, aby astronomové vyjádřili její vzdálenost, používají zvláštní jednotku – světelný rok, zkratka ly*. Jeden světelný rok je vzdálenost, kterou světlo urazí svou rychlostí (tedy* 300 000 km/s*) za jeden rok. Proxima je od nás vzdálená* 4,2 ly*. Jak dlouho by trvalo světelnému paprsku dostat se ze Země k Proximě a zpět? Vyjádřete v rozumných jednotkách.*

Úloha spíše pro pochopení textu, než na samotné znalosti z fyziky. Světelný rok je vzdálenost, kterou světlo urazí za rok – jak zní v zadání. Tedy 1 ly trvá světlu urazit 1 rok. Vzdálenost od nás k Proximě a zpět je $2 \cdot 4{,}2\,\mathrm{ly} = 8{,}4\,\mathrm{ly}$. Světlu to tak bude trvat 8,4 let.

Úloha 9 ... „Jak se do lesa volá...

... tak se z lesa ozývá“ zakřičela vačice do lesa a její ozvěna se vrátila za 4 sekundy*. Jak rychle musí vačice jít k lesu, aby se k němu za* 10 minut *dostala? Rychlost zvuku je* 315 m/s*.*

Marián Horňák

Cesta k lesu a zase zpět trvala zvuku 4 sekundy, tedy 2 sekundy pouze k lesu. Vačici má cesta trvat 600 sekund, tak stačí, když půjde 300-krát pomaleji. Její rychlost musí být $(315\,\mathrm{m/s})/300 = 1{,}05\,\mathrm{m/s}$.

Úloha 10 ... Čokolády

Sedm albatrosů sní třináct čokolád za 221 minut*. Za kolik minut sní sedmnáct albatrosů tři čokolády?*

Marián Horňák

Vše jsou to pouze přímé a nebo nepřímé úměrnosti. Sedm albatrosů sní třináct čokolád za 221 minut. Jednu čokoládu tedy sní za 13-krát kratší dobu

$$221\,\mathrm{minut}/13 = 17\,\mathrm{minut}\,.$$

Jeden albatros sní čokoládu ale za 7-krát delší dobu

$$7 \cdot 17\,\mathrm{minut} = 119\,\mathrm{minut}\,.$$

Sedmnáct albatrosů sní jednu čokoládu pro změnu za 17-krát kratší dobu

$$119\,\mathrm{minut}/17 = 7\,\mathrm{minut}\,.$$

A sedmnáct albatrosů sní tři čokolády za 3-krát delší dobu

$$7\,\mathrm{minut} \cdot 3 = 21\,\mathrm{minut}\,.$$

Úloha 11 ... Kostka

Albatros vyskočil na vrchol kostky a neseskočil, dokud nepřešel všechny její hrany. Jednu hranu přejde za 2 minuty. Kolik času nejméně mu jeho cesta bude trvat? *Andrej Vlček*

Do každého vrcholu krychle vedou 3 hrany – 3 možné cesty albatrosa. Když však albatros někam přijde, musí odtamtud zase odejít (jinak by nudou umřel). Do každého vrcholu, krom toho, kde začíná, a toho, kde skončí, tak musí jít 2-krát (pokud by tudy totiž prošel pouze jednou, nepřešel by po jedné ze tří hran, které sem vedou. Tak z u $8-2=6$ vrcholů prošel jednu z sem vedoucích hran dvakrát. Každá hrana má ale dva konce. Jsou tedy alespoň tři hrany, po kterých přešel dvakrát. Krychle má 12 hran a on tak musel přejít po alespoň 15 hranách. To se dá splnit například cestou $ABCDAEFGHEFBCGHD$ (kde si vrcholy krychle označíme jako obvykle tak, že spodní čtverec bude označen jako $ABCD$ a horní $EFGH$). A jelikož mu cesta přes jednu hranu trvá 2 minuty, bude mu celá cesta trvat 2 minuty $\cdot$ 15 = 30 minut.

Úloha 12 ... Hodiny Země

Kolik hodin trvá Zemi, než oběhne kolem Slunce? Vyjádřete s přesností na celé hodiny! (Ptakopysk vám tiše pošeptal: „Nezapomeňte na přestupný rok!“) *Marián Horňák*

Každé čtyři roky má rok o den víc (přestupný rok). Což je korekce právě kvůli tomu, že oběh netrvá přesně 365 dní, ale 365,25 dní. Den má 24 hodin. Celý oběh tedy trvá 24 hodin $\cdot$ 365,25 = = 8766 hodin.

Úloha 13 ... RGB

Slepý albatros má v krabičce 19 červených, 20 zelených a 21 modrých kuliček. Postupně vytahuje náhodné kuličky. Kolik nejméně musí vytáhnout kuliček, aby si mohl být jistý, že vytáhl od každé barvy alespoň jednu kuličku? *Marián Horňák*

V nejhorším případě se může stát, že jsme už vytáhli všechny modré a zelené a ještě ani jednu červenou, takže ani po vytáhnutí 41 kuliček si nemůžeme být jistí, že máme kuličky od každé barvy. Až když jich vytáhneme 42, už s jistí být můžeme, protože v krabici zůstalo 18 kuliček, ale od každé barvy jich je aspoň 19, takže aspoň jedna od každé barvy je už venku.

Úloha 14 ... Zmrzlina

Zmrzlinář albatros má 2 druhy kornoutů a 8 příchutí zmrzliny. Každá zmrzlina se skládá z jednoho kornoutu a třech různých kopečků zmrzliny. Kolik různých zmrzlin může zmrzlinář připravit? (Na pořadí kopečků záleží.) *Marián Horňák*

Ke každému z dvou různých kornoutů můžeme vybrat první kopeček z 8 možností, druhý ze 7 zbývajících a třetí ze 6 zbývajících. Dohromady tedy máme $2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 672$ možností.

Úloha 15 ... Nahoru a dolů

Vačice Janka – známá sportovkyně – si ráda zaběhne na kopec, který má za domem, a zpátky. Do kopce běží pomalu, rychlostí $6\,\mathrm{km/h}$*, z kopce rychlostí* $12\,\mathrm{km/h}$*. V průběhu běhu nedělá žádné přestávky – na kopci se hned otočí a běží zpátky. Jaká je její průměrná rychlost?*

Marián Horňák

Nechť je dráha dlouhá X km. Do kopce bude běžet $X/6$ hodin, z kopce $X/12$ hodin. Dohromady urazí dráhu $2X$ km za $(X/6 + X/12)\,\mathrm{h} = 3X/12\,\mathrm{h} = X/4\,\mathrm{h}$. Průměrná rychlost bude tedy $(2X\,\mathrm{km})/(0{,}25\,\mathrm{h}) = 8\,\mathrm{km/h}$.

Úloha 16 ... Xurg a Borg

V dalekém vesmíru se nachází nedaleko od sebe dvě planetky Xurg a Borg. Jejich obyvatelé, ptakopyskové, se jednoho dne rozhodli, že si po obvodě svojí planety natáhnou provaz, aby tak zjistili její obvod. Srandovní je, že na Borgu zjistili, že jejich lano je přesně o 1 metr *delší než lano na planetě Xurg. Zajímalo by je, o kolik větší mají poloměr planety oproti Xurgu. (Předpokládejte, že planety jsou koule.)*

Jakub Bahyl

Pro obvody planet platí $o_1 = 2\pi R_1$ a $o_2 = 2\pi R_2$, přičemž víme, že$o_2 = o_1 + 1\,\mathrm{m}$. Platí tedy, že $2\pi R_2 = 2\pi R_1 + 1\,\mathrm{m}$, odkud $R_2 = R_1 + (1\,\mathrm{m})/(2\pi)$, tedy $R_2 - R_1 = (1\,\mathrm{m})/(2\pi) = 0{,}159\,\mathrm{m} \approx 16\,\mathrm{cm}$.

Úloha 17 ... Poháry

Na stole je pět pohárů, prostřední je otočený dnem vzhůru, ostatní jsou postavené normálně. Albatros může na povel otočit právě dva poháry (otočit znamená, že když byl původně dnem vzhůru, tak bude normálně a naopak). Najděte způsob, jestli existuje, jak je pomocí několika povelů albatros otočí všechny do normální polohy. Pokud takovýto způsob neexistuje, ukažte, proč.

Kristína Čevorová

Nedá se to. Všimněme si, jak se změní počet pohárů dnem vzhůru po 1 otočení. Když byly oba poháry normálně, tak se zmenší o 2. Když byly oba dnem vzhůru, zvětší se o 2. Když byl jeden normálně a jeden dnem vzhůru, nezmění se. Všimněme si tedy, že když na začátku byl lichý, vždycky lichý zůstane a nemůže být nulový.

Úloha 18 ... Kombajn

Vačice kosila pole. Její kombajn má $4{,}7\,\mathrm{m}$ *širokou radlici (to zoubkované vpředu, čím se kosí) a její pole má plochu* $42{,}3\,\mathrm{ha}$*. Kombajn jel průměrnou rychlostí* $5{,}4\,\mathrm{km/h}$*. Jakou nejkratší dobu jí mohlo kosení trvat?*

Marián Horňák

Když $5{,}4\,\mathrm{km/h} = 1{,}5\,\mathrm{m/s}$, kombajn za sekundu projde průměrně $1{,}5\,\mathrm{m}$, tedy skosí průměrně $4{,}7\,\mathrm{m} \cdot 1{,}5\,\mathrm{m} = 7{,}05\,\mathrm{m^2/s}$. Též víme, že $42{,}3\,\mathrm{ha} = 423\,000\,\mathrm{m^2}$. Potom skosení celé plochy mu bude trvat $(423\,000\,\mathrm{m^2})/(7{,}05\,\mathrm{m^2/s}) = 60\,000\,\mathrm{s} = 1\,000\,\mathrm{min} = 16\,\mathrm{hod}\,40\,\mathrm{min}$.

Úloha 19 ... NaCl

Vačice si nesla domů z nákupu kilo soli. Z radosti, že ho má, si vyskakovala, vyskakovala, až sůl skončila ve velkém sousedově sudu s čistou vodou. Vačice chtěla svou sůl zpět, tak se za ní jako Pamela Anderson v Baywatchi vrhla. Vytáhnout se jí nic nepodařilo, zato roztrhla sáček a všechnu sůl svými pohyby rozpustila ve vodě. Doma si z plavek vyždímala 0,5 litru *slané vody. Když se všechna odpařila, zůstala po ní usazenina o hmotnosti jednoho gramu. Jaký objem má sousedův sud?* *Andrej Vlček*

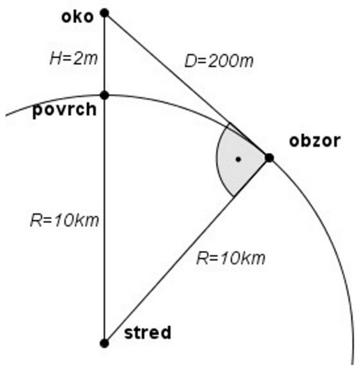
Když vačice všechnu sůl dobře rozpustila, koncentrace (množství soli na objem tekutiny) soli ve vodě je konstantní. Můžeme ji spočítat

$$\frac{1\,\mathrm{g}}{0{,}5\,\mathrm{l}} = 2\,\mathrm{g/l} = 2\,\mathrm{kg/m^3}\,.$$

Když v celém sudu je 1 kg soli, má objem $0{,}5\,\mathrm{m}^3$.

Úloha 20 ... Kulatá planeta

Ptakopysk vysoký dva metry přistál na dokonale kulaté planetě s poloměrem 10 km*. Když má oči na vrchu hlavy, jak daleko jsou věci, které vidí na obzoru?*



Uvědomme si, že obzor je právě takový bod, na který když se podíváme, tak směr našeho pohledu je tečnou k povrchu planety. Kdyby byl nesečnou, dívali bychom se do nebe, kdyby byl sečnou, tak kdybychom se podívali o kousek výše, viděli bychom stále planetu, takže by to nemohl být obzor. Takže směr pohledu je kolmý na poloměr planety. Tedy když trojúhelník obzor-oko-střed planety je pravoúhlý a my známe dvě strany, není problém z Pythagorovy věty vypočítat třetí stranu – 200 metrů.

Úloha 21 ... Kra

Někdo někdy nějaké vačici prozradil o ledovcových krách, že z nich jen $1/7$ *trčí nad vodu. Jakou hustotu mají ledovce, když hustota mořské vody je* $1025\,\mathrm{kg/m^3}$*?* *Andrej Vlček*

Pro plovoucí kru musí platit rovnost vztlakové a gravitační síly, tedy použijeme Archimedův zákon

$$V_{\text{ponor}}\varrho_{\text{vody}}g = V_{\text{celkový}}\varrho_{\text{ledu}}g$$

Když nad hladinu trčí 1/7 objemu, pod hladinou je ponořený zbytek – 6/7 objemu

$$V_{\text{ponor}}/V_{\text{celkový}} = \frac{6}{7}\,.$$

Dosadíme, vykrátíme

$$\varrho_{\text{ledu}} = \frac{6}{7}\varrho_{\text{vody}}$$
$$\varrho_{\text{ledu}} = 879\,\mathrm{kg/m^3}\,.$$

Úloha 22 ... Titanic

Titanic vyplaval z řeky na moře. Přitom se vynořilo $1523{,}6\,\mathrm{m^3}$ *tohoto ocelového kolosu. Kolik Titanic vážil? Hustota říční vody je* $1000\,\mathrm{kg/m^3}$*, hustota mořské vody je* $1030\,\mathrm{kg/m^3}$*.*
Marián Horňák

Protože mořská voda je hustější, působí na tělesa v ní větší vztlaková síla, takže plavajícím tělesům stačí menší ponořený objem na to, aby se vztlaková síla vyrovnala tíhové. A na tomto postavíme celé řešení – vztlaková síla vody na loď se rovná tíhové síle, kterou je loď přitahována zemí. V řece byl ponořený objem V z Titanicu. V moři je ponořený objem $V - 1523{,}6\,\mathrm{m^3}$. Když napíšeme Archimédův zákon pro oba případy, dostaneme dvě rovnice pro dvě neznámé

$$mg = 1000\,\mathrm{kg/m^3}\cdot Vg\,,$$
$$mg = 1030\,\mathrm{kg/m^3}\cdot (V - 1523{,}6\,\mathrm{m^3})g\,.$$

Vyjádříme V z obou rovnic

$$V = m/(1000\,\mathrm{kg/m^3})$$
$$V = 1523{,}6\,\mathrm{m^3} + m/(1030\,\mathrm{kg/m^3})\,.$$

Dáme do rovnosti

$$m/(1000\,\mathrm{kg/m^3}) = 1523{,}6\,\mathrm{m^3} + m/(1030\,\mathrm{kg/m^3})\,.$$

Odtud $m = (1000\cdot 1030\cdot 1523{,}6/30)\,\mathrm{kg} \approx 52310\,\mathrm{tun}$ (reálná hmotnost Titanicu).

Úloha 23 ... Hodiny

Ptakopyska zajímá, kolikrát předběhne velká ručička malou ručičku v čase od 7.37 do 16.16. Víš to i ty? *Kristína Komanová*

V 7.37 je minutová ručička těsně před hodinovou – hodinová je za polovinou cesty mezi čísly 7 a 8, zatímco minutová jen ve 2/5, takže za chvíli se potkají. Potom se potkají taky mezi 8 a 9, 9 a 10, 10 a 11, v poledne, mezi 1 a 2, 2 a 3, 3 a 4. Mezi 4 a 5 to už nestihnou. protože v 16.16 je minutová ručička ještě před 4, zatímco hodinová už za ní. Předběhne ji tedy 8-krát.

Úloha 24 ... Lívance

Albatros si chce opéct 3 *lívance, každý z obou stran. Na pánev se mu však vejdou jen dva lívance. Opékání jedné strany jednoho lívance trvá pět minut. Kolik nejméně může trvat opečení všech tří lívanců? Jak to má albatros udělat?* *Marián Horňák*

15 minut. Nejdříve opečeme první a druhý lívanec z jedné strany. Potom první z druhé strany, spolu s třetím. A nakonec opečeme zbylou stranu druhého a třetího lívance.

Úloha 25 ... Kdo šetří, má za 4

Albatros vložil svých 10 000 *stříbrných dukátů do spolehlivé řecké banky. Ta mu slíbila, že každý rok mu k penězům, které tam má, připočítá* 10 %*. Albatros* 4 roky *z účtu nic nevybral ani tam nic nevkládal. Kolik tam má peněz?* *MariánHorňák*

Když k nějaké sumě připočítáme 10 %, zvětšíme ji na 110 %, což je ekvivalentní vynásobení číslem 1,1. Toto se za 4 roky stalo 4-krát, na účtě je tím pádem $10\,000 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}1 \cdot 1{,}1 = 14\,641$ stříbrných dukátů.

Úloha 26 ... Takový malý součin

Albatros vynásobil všechna celá čísla od 123 456 *do* 123 465 *včetně. Jaké jsou poslední dvě cifry tohoto součinu?* *Marián Horňák*

$123\,465 \cdot 123\,462$ má na konci zjevně 0 (protože 2 krát 5 je 10) , tedy je dělitelné 10. I 123 460 je dělitelné 10. Dohromady je tedy dělitelné 100 a na konci musí být dvě nuly.

Úloha 27 ... Bakterie

Chudák albatros dostal střevní ptačí chřipku. Zůstala v něm jediná bakterie a ta se začala dělit. Každá bakterie se rozdělí na dvě, které se mohou začít dělit za 4 minuty*. Za jak dlouho od prvního dělení bude mít v sobě albatros víc než* 1000 *bakterií?* *Andrej Vlček*

Jestliže pokaždé, co se bakterie může dělit, se rozdělí, tak po každém dělení se počet bakterií zdvojnásobí. Podívejme se, jak bude vypadat počet bakterií: 2 (od této chvíle měříme čas), 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, tedy je potřeba 9 dělení, což trvá 36 minut.

Úloha 28 ... Vlak na mostě

Most, po kterém jede vlak s vačicí, je dlouhý 600 m. *Vlak jede rychlostí* 30 m/s. *Jak dlouhý je vlak, který jede po mostě* 30 s*?*

Počáteční bod vlaku přejede most za čas $(600\,\mathrm{m})/(30\,\mathrm{m/s}) = 20\,\mathrm{s}$. Zbylých 10 s jedou po mostě jen vozy, takže délka samotného vlaku je $30\,\mathrm{m/s} \cdot 10\,\mathrm{s} = 300\,\mathrm{m}$.

Úloha 29 ... Domácí miláčci

Albatros doma chová pavouky a chrobáky. Dohromady napočítal 44 hlav *a* 290 noh. *Kolik měl pavouků? (Každý pavouk měl* 8 noh *a každý chrobák* 6 noh.*)* *Marián Horňák*

Kdyby to byli všichni chrobáci, tak 44 hlavám by příslušelo $44 \cdot 6 = 264$ noh. Noh je však dohromady o 26 víc – jsou to nohy pavouků, které jsme nezapočítali. Z každého pavouka nám zůstaly 2 nezapočítané nohy, takže pavouků je $26/2 = 13$ kusů.

Úloha 30 ... Hop, žabko, hop!

Žába ráda skáče. A skáče tak, že nejdřív skočí o 1 m *dozadu, potom o* 2 m *dopředu, potom o* 3 m *dozadu, potom o* 4 m *dopředu a tak dále, až dokud neskočí o* 42 m *dopředu, protože* 42 *je její oblíbené číslo. Albatros je lenivý a proto skočí jenom jednou. O kolik metrů a kterým směrem má albatros skočit, když se žábou začínali na stejném místě a chtějí být i po odskákání spolu?* *Marián Horňák*

Podívejme se, na jakých pozicích od začátku je žába po jednotlivých skocích:

$$-1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, \ldots$$

Vidíme, že po sudých skocích je žába od začátku tak daleko, jako je polovina pořadového čísla skoku. Takže po 42. skoku bude žába 21 m vpředu. Takže když chce být albatros na tom samém místě, tak musí skočit o 21 m dopředu.

Úloha 31 ... Sirup

Vačice smíchala 1 kg *vody s hustotou* 1 kg/l a 1 kg *sirupu s hustotou* 1,25 kg/l. *Jaká je hustota výsledné kapaliny? Předpokládejte, že celkový objem kapalin se po smíchání nezmění.*

Marián Horňák

Výsledná kapalina má hmotnost 2 kg, obsahuje 1 l vody, objem sirupu v ní je 1 kg/(1,25 kg/l) = = 0,8 l, takže objem výsledné kapaliny je 1,8 l. Její hustota je potom 2 kg/1,8 l = 1,11 kg/l.

Úloha 32 ... Domov důchodců

Malý albatros přišel navštívit obě svoje babičky a dědečky do domova. Svému vnukovi prarodiče svůj věk neřekli, zato prozradili, že věkový průměr jich a malého albatrose je 73 let. Malý albatros by po nich chtěl alespoň vědět, jaký je věkový průměr jeho prarodičů bez něho. Pomůžete mu? Malý albatros má totiž jen 5 roků... *Andrej Vlček*

Součet věků prarodičů a vnoučka je $73\,\mathrm{let} \cdot 5 = 365\,\mathrm{let}$, takže věkový součet rodičů je 360 let a jejich věkový průměr 90 let.

Úloha 33 ... Jdou dvě babky po poušti

Jdou dvě vačice po Měsíci a uvidí obrovský válec s pístem. Jedna z nich na píst vyskočí a tlak ve válci se zvýší z 400 Pa na 485 Pa. Kolik váží druhá vačice? (Píst vážil 80 kg a obě vačice dohromady vážily 30 kg.) *Marián Horňák*

Jestliže se nemění velikost gravitační konstanty, je hmotnost přímo úměrná gravitační síle. To je jediná síla, která vačici s pístem tahá k Měsíci. Průřez pístu se taky nemění, takže tlak ve válci je přímo úměrný působící síle, takže síle gravitační. Takže když tlak 400 Pa způsobilo 80 kg, tlak 1 Pa způsobí 0,2 kg a tlak 485 Pa způsobí 97 kg. To je hmotnost první vačice s pístem. První vačice tedy váží 97 kg − 80 kg = 17 kg. Druhá potom váží 30 kg − 17 kg = 13 kg.

Úloha 34 ... Šedesátiúhelník

Albatros by rád věděl, jaký je úhel při vrcholu pravidelného šedesátiúhelníku. Víš to i ty? *Marián Horňák*

Ze dvou sousedních vrcholů uděláme rovnoramenný trojúhelník s vrcholem ve středu kružnice. Úhel při středu kružnice bude $360^\circ/60$, tady úhly při základnách budou $(180^\circ - 6^\circ)/2 = 87^\circ$. Úhel u vrcholu šedesátiúhelníku je složený ze dvou takovýchto úhlů, takže má velikost $2 \cdot 87^\circ = 174^\circ$.

Jiné řešení Můžeme si všimnout, že součet vnitřních úhlů n-úhelníku je $(n-2) \cdot 180^\circ$ (je možné ho rozložit na $n-2$ trojúhelníků). Máme-li pravidelný šedesátiúhelník, všechny jeho vnitřní úhly jsou stejné, takže velikost jednoho bude $(60-2) \cdot 180^\circ/60 = 174^\circ$.

Úloha 35 ... Kvark

Každý albatros ví, že jádro atomu se skládá z protonů s nábojem +1 a z neutronů s nábojem 0. Co už asi neví, je, že každý proton se skládá ze dvou u kvarků a jednoho d kvarku a neutron ze dvou d kvarků a jednoho u kvarku. Jaké jsou náboje u a d kvarku? *Andrej Vlček*

Náboj neutronu nebo protonu je jednoduše součet nábojů uvnitř, takže musí platit

$$2Q_\mathrm{u} + Q_\mathrm{d} = 1 \quad \text{a} \quad Q_\mathrm{u} + 2Q_\mathrm{d} = 0\,.$$

Máme dvě jednoduché rovnice o dvou neznámých, které po vyřešení dávají výsledek $Q_\mathrm{d} = -1/3$ a $Q_\mathrm{u} = 2/3$.

Úloha 36 ... Procházka

Vačice se velmi ráda prochází po kopcích Středozemě. Jednoho dne si dala pomalou oddechovou vycházku. Výlet si rozdělila na dvě části. Celá 10 km *dlouhá procházka jí trvala* 4 hodiny*. Jak dlouhé byly jednotlivé části cesty, když první část šla rychlostí* 0,8 m/s *a druhou část rychlostí* 0,6 m/s*?*

První část byla dlouhá s_1 a prošla ji za čas t_1, druhá část byla dlouhá s_2 a trvala jí čas t_2. Víme, že 0,8 m/s = 2,88 km/h a 0,6 m/s = 2,16 km/h.

$$t_1 = \frac{s_1}{2{,}88\,\mathrm{km/h}} \quad \text{a} \quad t_2 = \frac{s_2}{2{,}16\,\mathrm{km/h}}$$

Jinak $t_1 + t_2 = 4\,\mathrm{h}$ a $s_1 + s_2 = 10\,\mathrm{km}$, do první rovnice můžeme dosadit za časy

$$\frac{s_1}{2{,}88\,\mathrm{km/h}} + \frac{s_2}{2{,}16\,\mathrm{km/h}} = 4\,\mathrm{h} \quad \text{a} \quad s_1 + s_2 = 10\,\mathrm{km}\,,$$

takže máme 2 rovnice o dvou neznámých, které když vyřešíme, dostaneme $s_1 = 5{,}44\,\mathrm{km}$ a $s_2 = 4{,}56\,\mathrm{km}$.

Úloha 37 ... Trhnout o kolečko

Vačice Janka a vačice Danka běhají po kruhové běžecké dráze s poloměrem 57,3 m*. Janka běhá o* 9 km/h *rychleji než Danka, a proto ji právě teď předběhla. Za jaký čas ji předběhne znova?*

Marián Horňák

Obvod kruhové dráhy je $2\pi \cdot 57{,}3\,\mathrm{m} = 360\,\mathrm{m}$. Vzhledem k Dance získává Janka náskok rychlostí $9\,\mathrm{km/h} = 2{,}5\,\mathrm{m/s}$ a předběhne ji o kolečko právě tehdy, když získá náskok rovný obvodu kolečka. To bude za

$$\frac{360\,\mathrm{m}}{2{,}5\,\mathrm{m/s}} = 144\,\mathrm{s} = 2\,\mathrm{min}\,24\,\mathrm{s}\,.$$

Úloha 38 ... Střed

Albatros by rád věděl, kde je střed této kružnice. Zkuste ho přesně najít pomocí rýsovacích pomůcek.

Andrej Vlček

Vezměme osu libovolné tětivy. Protože osa úsečky je množina bodů, které mají od jejích okrajových bodů stejnou vzdálenost, a i střed kružnice má od obou krajních bodů stejnou vzdálenost (protože jsou to body ležící na kružnici), musí střed kružnice ležet na ose libovolné tětivy. Stačí tedy vzít dvě osy tětiv a najít jejich průsečík – protože střed kružnice musí ležet na obou, musí ležet v jejich průsečíku. Na stejném principu je založena metoda, kde si vezmeme tři různé body na kružnici, sestrojíme trojúhelník a najdeme střed jeho opsané kružnice.

Úloha 39 ... Youtube

Vačice má doma pomalý internet. $10\,\mathrm{kB/s}$, *celkem nic moc. Když si chtěla pustit polku, zjistila, že písnička je dlouhá* $2\,\mathrm{min}\,46\,\mathrm{s}$ *a na její přehrání potřebuje načíst* $4980\,\mathrm{kB}$. *Aby se jí video nesekalo, tak ji hned na začátku „pauzla“ a sleduje progress bar (toho „hadíka“, který zobrazuje, kolik už jste z toho načetli). V jakém čase má být progress bar, aby, když si vačice polku pustí, se jí už nesekala?* *Andrej Vlček*

Zkusme si situaci představit. Načítání je chlapík A, který vystartuje hned a běží pomaleji, přehrávání videa je rychlejší chlapík B. Jaký musíme dát A náskok, aby ho B doběhl právě na konci dráhy? Rychlost chlapíka A je $10\,\mathrm{kB/s}$, písnička má $2 \cdot 60\,\mathrm{s} + 46\,\mathrm{s} = 166\,\mathrm{s}$, takže rychlost chlapíka B je $4980\,\mathrm{kB}/166\,\mathrm{s} = 30\,\mathrm{kB/s}$. Dráha je dlouhá $4980\,\mathrm{kB}$. Zadání chce rozdíl časů, za který to chlapíci přeběhnou

$$\frac{4980\,\mathrm{kB}}{10\,\mathrm{kB/s}} - \frac{4980\,\mathrm{kB}}{30\,\mathrm{kB/s}} = 498\,\mathrm{s} - 166\,\mathrm{s} = 332\,\mathrm{s}\,.$$

Úloha 40 ... Misky

Ptakopysk stojí v obchodě před regálem s miskami. Všechny misky mají stejný tvar, ale různou velikost. Ptakopysk si na etiketě přečetl, že miska s poloměrem $10\,\mathrm{cm}$ *má objem* $400\,\mathrm{ml}$. *On ale potřebuje s objemem alespoň* $1{,}5\,\mathrm{l}$. *Která má jaký objem, se z etiket nedozví, protože ostatní misky mají etikety postrhané a na cenovkách je uvedený pouze jejich poloměr. Který z poloměrů* $12\,\mathrm{cm}$, $16\,\mathrm{cm}$, $20\,\mathrm{cm}$, $24\,\mathrm{cm}$, $28\,\mathrm{cm}$, $32\,\mathrm{cm}$, $40\,\mathrm{cm}$, $50\,\mathrm{cm}$ *si má vybrat, aby byl spokojený a přitom mu miska co nejméně překážela ve skříni?* *Kristína Čevorová*

Když se zvětší poloměr k-krát, podstava, jejíž rozměr je závislý na druhé mocnině poloměru, se zvětší $(k \cdot k)$-krát a k-krát se musí zvětšit i výška, aby se zachoval tvar. Objem se tedy zvětší celkově $(k \cdot k \cdot k)$-krát. Na $12\,\mathrm{cm}$ se z $10\,\mathrm{cm}$ poloměr zvětší 1,2-krát, tedy objem bude $400\,\mathrm{ml} \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}2 \cdot 1{,}2 = 692\,\mathrm{ml}$, což je málo. Pro poloměr $16\,\mathrm{cm}$ bude zvětšení rozměrů 1,6-krát, takže objem $400\,\mathrm{ml} \cdot 1{,}6 \cdot 1{,}6 \cdot 1{,}6 = 1\,640\,\mathrm{ml} > 1{,}5\,\mathrm{l}$, takže nám tato miska stačí, protože větší hrnec by zbytečně překážel. Ptakopysk by si měl tedy vybrat misku s poloměrem $16\,\mathrm{cm}$.

Úloha 41 ... Alf & Ilf

Vačice Alf si našla kamarádku vačici Ilf na Marsu. Píší si spolu SMSky morseovkou rychlostí světla c. Alf si ale všimla, že Ilf to trvá různou dobu, než odepíše, ale Ilf vždy odepíše okamžitě, jak jí SMSka dojde. Alf to zaujalo a začala sledovat dobu, než zpráva přijde zpátky. Zjistila, že nejkratší čas odpovědi od Ilf je T_1 *a největší* T_2. *Když Země obíhá po kružnici s poloměrem* R_Z, *jaký je poloměr* R_M *kružnice, po které obíhá Mars?* *Andrej Vlček*

Zřejmě se při oběhu Země a Marsu okolo Slunce mění meziplanetární vzdálenost. Nejmenší a největší nastávají, kde je Slunce, Mars a Země v jedné přímce. Nejmenší vzdálenost je taková, když jsou planety na jedné straně od Slunce, tedy jejich vzdálenost je $R_{\mathrm{M}} - R_{\mathrm{Z}}$, největší je, když je Slunce mezi nimi, tedy vzdálenost je $R_{\mathrm{M}} + R_{\mathrm{Z}}$. Pro jednotlivé vzdálenosti potom platí (protože signál se musí dostat jak tam, tak zpátky)

$$2(R_{\mathrm{M}} - R_{\mathrm{Z}}) = cT_1\,,$$
$$2(R_{\mathrm{M}} + R_{\mathrm{Z}}) = cT_2\,.$$

Rovnice sečteme a dostáváme $R_{\mathrm{M}} = c(T_1 + T_2)/4$. Vzhledem k tomu, že jsme zadali opravdu hodně veličin, tak je správná také odpověď $c\frac{T_1}{2} + R_{\mathrm{Z}}$ nebo $c\frac{T_2}{2} - R_{\mathrm{Z}}$.

Úloha 42 ... Balóny

Odhadněte, kolik pouťových heliových balónků je potřeba na to, aby vás odlepily od podlahy (vznesli jste se). Vzduch má hustotu $1\,\mathrm{kg/m^3}$*, helium pětinu hustoty vzduchu. A co zbývající parametry? Udělejte to jako vačice – prostě je odhadněte ;)* *Andrej Vlček*

Jeden balónek je zhruba kostka s hranou 20 cm. Objem je $V_{\text{balón}} = (20\,\mathrm{cm}) \cdot (20\,\mathrm{cm}) \cdot (20\,\mathrm{cm}) = 0{,}008\,\mathrm{m^3}$. Deváťák může vážit přibližně 50 kg. Hustota těla je zhruba hustota vody a jeho objem je tedy $50\,\mathrm{l} = 0{,}05\,\mathrm{m^3}$. Hélium má hustotu $0{,}2\,\mathrm{kg/m^3}$. Když se na tělo s balónky díváme jako na jedno těleso, tak je jeho celkový objem $0{,}05\,\mathrm{m^3} + NV_{\text{balón}}$ a hmotnost $50\,\mathrm{kg} + NV_{\text{balón}} \cdot 0{,}2\,\mathrm{kg/m^3} = 50\,\mathrm{kg} + N \cdot 0{,}0016\,\mathrm{kg}$. Potom pro minimální počet balónků platí rovnost vztlakové síly vzduchu a tíhové síly (tíhové zrychlení označme g)

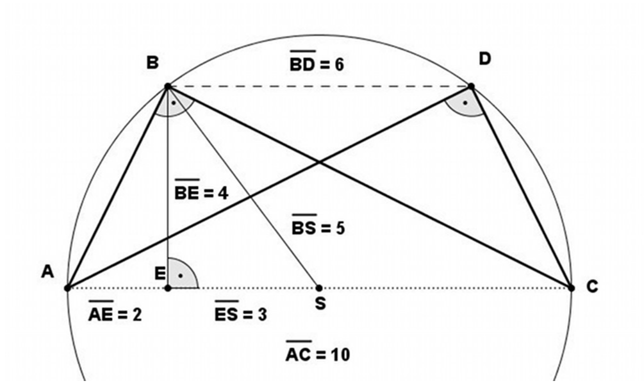
$$\left(0{,}05\,\mathrm{m^3} + N \cdot 0{,}008\,\mathrm{m^3}\right) g \cdot 1\,\mathrm{kg/m^3} = (50\,\mathrm{kg} + N \cdot 0{,}0016\,\mathrm{kg})\, g\,.$$

V tomto odhadu to vyjde jako 8000 balónků.

Úloha 43 ... Obdélník

Albatros si vystřihl svůj oblíbený obdélník a přehnul ho podle jedné úhlopříčky. Úhlopříčka měla délku 10 cm*, vzdálenost zbývajících dvou vrcholů po přeložení byla* 6 cm*. Jakou plochu měl obdélník?* *Andrej Vlček*

Všimneme si trojúhelníku ESB. Zřejmě úsečka ES je polovinou BD. Bod S je podle Tháletovy věty střed kružnice opsané, protože je ve středu úhlopříčky AC. Tím pádem je poloměr kružnice opsané $(10\,\mathrm{cm})/2 = 5\,\mathrm{cm}$, takže i BS měří 5 cm. ABCD je rovnoramenný lichoběžník, jehož dolní základna je o 4 cm delší. Díky rovnoramennosti se toto prodloužení rovnoměrně rozdělí na obě strany $|\mathsf{AE}| = 2\,\mathrm{cm}$, a tedy $|\mathsf{ES}| = 3\,\mathrm{cm}$. BE je výška. Máme tedy pravoúhlý trojúhelník a můžeme použít Pythagorovu větu na zjištění délky $|\mathsf{BE}| = 4\,\mathrm{cm}$. Potom plocha ABC je $(10\,\mathrm{cm}) \cdot (4\,\mathrm{cm}/2) = 20\,\mathrm{cm^2}$. Trojúhelníky jsou dva a shodné, tedy plocha obdélníka je $40\,\mathrm{cm^2}$.



Úloha 44 ... Bazén

Vačice má doma kruhový bazén s poloměrem 3 metry *a hloubkou* 1 metr. *Za* 12 hodin *ho celý napustila plný vodou, která přitékala trubkou s vnitřním poloměrem* 10 *milimetrů. Voda v trubce tekla konstantní rychlostí. Jakou?* *Marián Horňák*

Celé napouštění si můžeme představit tak, že všechna voda byla ve velmi dlouhé trubce a nějaký píst ji pomalu tlačil ven. Pístu trvalo 12 hodin projít celou délku trubky a posunoval se stejnou rychlostí jako voda. Pokud tedy zjistíme délku trubky, budeme znát i tuto rychlost. Celá trubka musí mít stejný objem jako bazén, když v ní bylo právě tolik vody, aby ho naplnila. Oba útvary jsou válce a objem válce zjistíme jako součin obsahu kruhové podstavy a výšky

$$V_{\text{bazén}} = \pi \cdot 3\,\text{m} \cdot 3\,\text{m} \cdot 1\,\text{m}\,,$$
$$V_{\text{trubka}} = \pi \cdot 0{,}01\,\text{m} \cdot 0{,}01\,\text{m} \cdot X\,.$$

Odtud $X = 3\,\text{m} \cdot 3\,\text{m} \cdot 1\,\text{m}/(0{,}01\,\text{m} \cdot 0{,}01\,\text{m}) = 90\,000\,\text{m} = 90\,\text{km}$. Tedy píst urazil 90 km za 12 hodin – pohyboval se rychlostí $90\,\text{km}/12\,\text{h} = 7{,}5\,\text{km/h}$.

Fyzikální korespondenční seminář je organizován studenty UK MFF. Je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci UK MFF a podporován Ústavem teoretické fyziky UK MFF, jeho zaměstnanci a Jednotou českých matematiků a fyziků.