Řešení úloh II. ročníku MFnáboje

Úloha 1 ... matfyzácká běhačka

Dušan a Michal běhají okolo Matfyzu po uzavřené dráze s délkou 1 km*. Michal běží rychlostí* 1 m/s *a Dušan* 2 m/s*. Jak dlouho potrvá, než Dušan poprvé předběhne Michala, jestliže oba dva vyběhnou společně od matematického vchodu?*

Podívejme se na napínavý běh za zdravím našich dvou matfyzáckých běžců. Po první sekundě Michal uběhl 1 m a Dušan 2 m, v druhé Michal 2 m a Dušan 4 m. Už tady si můžeme všimnout, že Dušan je vždy dvakrát tak daleko než Michal, takže když Michal uběhne jeden okruh, Dušan uběhne dva a předběhne Michala. Dá se to představit i tak, že Michal se nehýbe vůbec a Dušan jen rychlostí $2\,\mathrm{m/s} - 1\,\mathrm{m/s}$, a pak už jen vypočítat, jak dlouho by trvalo oběhnout jedno kolečko touto rychlostí. Nyní tedy musíme spočítat čas, za který Dušan uběhne 1 000 m rychlostí 1 m/s.

$$\frac{1\,000\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{m/s}} = 1\,000\,\mathrm{s} = 16\,\mathrm{min}\,40\,\mathrm{s}\,.$$

Dušanovi tedy potrvá 16 minut a 40 sekund, než doběhne Michala.

Úloha 2 ... létající bratři

Adam má dvakrát více kondorů než pterodaktylů, jeho bratr Honza má třikrát více kondorů než pterodaktylů. Oba mají stejný počet kondorů. Každý bratr má alespoň jednoho pterodaktyla. Kolikrát více kondorů než pterodaktylů mají společně?

Představme si, že mají oba K kondorů. Pak Adam má $K/2$ pterodaktylů a jeho bratr Honza má $K/3$ pterodaktylů. Dohromady tedy mají $2K$ kondorů a $5K/6$ pterodaktylů, takže mají $2 : (5/6) = 12/5 = 2{,}4$krát více kondorů než pterodaktylů.

Úloha 3 ... sušení vody

Čistá voda má hustotu $1000\,\mathrm{kg/m^3}$*, mořská voda (čistá voda + sůl) má hustotu* $1025\,\mathrm{kg/m^3}$*. Kolik litrů mořské vody musíme nechat odpařit na osolení polévky, pokud v ní chceme mít* 50 g *soli? (Předpokládejte, že vmícháváním soli do vody se objem vody nemění.)*

Za předpokladu, že se nezmění objem vody, pokud v ní rozpustíme sůl, a že čistá voda má hustotu ϱ_v a voda se solí hustotu ϱ_s, nám právě rozdíl těchto hustot řekne, kolik kilogramů soli se nachází ve slané vodě na jeden $\mathrm{m^3}$. V našem případě je to

$$\varrho_\mathrm{s} - \varrho_\mathrm{v} = 1025\,\mathrm{kg/m^3} - 1000\,\mathrm{kg/m^3} = 25\,\mathrm{kg/m^3}\,,$$

takže v 1000 litrech slané vody se nachází 25 kg soli, takže v $1\,\ell$ je 25 g. Když chceme 50 g soli, potřebujeme minimálně $2\,\ell$ vody.

Úloha 4 ... šetříme si na velkou čokoládu

Mirek si našetřil za 6 dní 8 dukátů. Kolik dní ještě potřebuje, pokud chce našetřit dalších 12 dukátů a bude šetřit stejně rychle?

Jestliže Mirek šetří stejně rychle a za 6 dní ušetří 8 dukátů, pak za 1 den našetří 8/6 dukátů. Proto k našetření 12 dukátů bude potřebovat ještě

$$12\,\text{dukátů} : \frac{8\,\text{dukátů}}{6\,\text{dní}} = 9\,\text{dní}\,.$$

Úloha 5 ... pití horké vody

Lukáš pije rád horkou vodu. Nedávno si připravil $3/4\,\ell$ vroucí vody. Voda o teplotě $100\,^\circ\mathrm{C}$ je však příliš horká i na Lukáše, a tak ji dolil do $1\,\ell$ vodou s teplotou t tak, aby výsledná voda měla teplotu $75\,^\circ\mathrm{C}$. Jaká byla teplota vody, kterou přiléval?

Je známá věc, že teplo v uzavřeném systému se zachovává. Kdybychom smíchali $1\,\ell$ vody o teplotě $100\,^\circ\mathrm{C}$ s $1\,\ell$ vody o teplotě t, výsledná teplota by byla rovna součtu objemů násobených příslušnými teplotami vyděleném celkovým objemem. Tento postup aplikujeme v našem příkladě

$$\frac{\frac{3}{4}\,\ell \cdot 100\,^\circ\mathrm{C} + \frac{1}{4}\,\ell \cdot t}{\frac{3}{4}\,\ell + \frac{1}{4}\,\ell} = 75\,^\circ\mathrm{C}\,.$$

Mohli bychom vyjít z rovnice tepla $Q = cm\Delta t$ (Q je teplo, c je měrná tepelná kapacita, m je hmotnost, Δt je změna teploty) a z rovnosti odevzdaného a přijatého tepla, ale vzhledem k tomu, že máme látku o stejné hustotě a tepelné kapacitě na obou stranách rovnice, tak můžeme použít tuto logickou úvahu. Vyjádříme si neznámou z rovnice, upravíme a dostáváme

$$t = \frac{1\,\ell \cdot 75\,^\circ\mathrm{C} - \frac{3}{4}\,\ell \cdot 100\,^\circ\mathrm{C}}{\frac{1}{4}\,\ell} = 0\,^\circ\mathrm{C}\,.$$

Teplota vody, kterou Lukáš přiléval, byla $t = 0\,^\circ\mathrm{C}$.

Úloha 6 ... Michalova a Tomášova čísla

Michal zná pouze celá kladná čísla, která jsou násobkem čísla 182. Jeho malý bratr Tomáš zná jenom celá čísla, která jsou násobkem čísla 143. Jaké je nejmenší číslo, které znají oba dva?

Hledáme vlastně nejmenší společný násobek čísel 182 a 143. Rozložíme si proto obě čísla na prvočinitele – $182 = 2 \cdot 7 \cdot 13$ a $143 = 11 \cdot 13$ – a nejmenší společný násobek získáme tak, že je vynásobíme, ale 13 musíme brát pouze jednou, protože se vyskytuje v obou číslech.

$$2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 2\,002\,.$$

Nejmenší číslo, které znají oba, je 2 002.

Úloha 7 ... zmenšujeme kvádřík

Homogenní kvádr má hmotnost 12 kg. *Jaká by byla hmotnost menšího kvádru ze stejného materiálu, pokud by všechny jeho hrany měly poloviční délku než hrany původního kvádru?*

Jestliže je v tomto kvádru hmotnost rozložená homogenně, tak se změní stejně jako objem. Objem kvádru na začátku je $V = a \cdot b \cdot c$, kde a, b a c jsou rozměry kvádru. Když každou stranu zmenšíme na polovinu, objem bude

$$V' = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{2}b \cdot \frac{1}{2}c = \frac{1}{8}a \cdot b \cdot c = \frac{1}{8}V\,.$$

Hmotnost menšího kvádru je osminová, tedy 1,5 kg.

Úloha 8 ... plnění bazénu

Mojmír potřebuje 200 kbelíků na naplnění malého bazénu. Jeho otec má dvaapůlkrát větší kbelík. Kolik kbelíků potřebuje na naplnění bazénu jeho otec?

Mojmírův otec má kbelík s 2,5krát větším objemem. Bude tedy potřebovat 2,5krát méně kbelíků pro naplnění bazénu, což je $200/2{,}5 = 80$ kbelíků.

Mojmírův otec potřebuje donést 80 kbelíků pro naplnění bazénu.

Úloha 9 ... Faleš na zámořském trajektu na Rokytce

Na palubě lodi, která se pohybuje vzhledem ke břehu rychlostí 12 km/h, *se pohybuje Faleš rychlostí* 5 km/h *kolmo na směr plavby. Jaká je rychlost Faleše vzhledem ke břehu?*

Když sčítáme rychlosti, které mají na sebe kolmý směr, sčítáme je jednoduše pomocí Pythagorovy věty. Odvěsny pomyslného trojúhelníku z vektorů rychlostí budou 12 km/h a 5 km/h. Pythagorovou větou získáme velikost přepony tohoto trojúhelníku, která má stejnou velikost jako hledaná výslednice rychlostí.

Zbývá tedy provést samotný výpočet

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{12^2 + 5^2}\,\mathrm{km/h} = \sqrt{169}\,\mathrm{km/h} = 13\,\mathrm{km/h}\,.$$

Rychlost Faleše vůči břehu bude 13 km/h.

Úloha 10 ... Achillova želva

Achilles a želva se rozhodli dát si závod na trati dlouhé 3 000 cm. *Želva se pohybovala rychlostí* 2 cm/s. *Achilles dal želvě náskok, a tak vyrazil o* 22 min *později rychlostí* 2 m/s. *Kdo dorazil do cíle první? O kolik dříve?*

Želva dorazila do cíle za

$$\frac{3\,000\,\mathrm{cm}}{2\,\mathrm{cm/s}} = 1\,500\,\mathrm{s}\,.$$

Achilles vyrazil za $22\,\text{minut} = 22 \cdot 60\,\text{s} = 1\,320\,\text{s}$, takže do cíle došel za

$$1320\,\text{s} + \frac{30\,\text{m}}{2\,\text{m/s}} = 1\,335\,\text{s}\,.$$

Achillovi se tedy podařilo předběhnout želvu, a to o $(1\,500 - 1\,335)\,\text{s} = 165\,\text{s} = 2\,\text{min}\,45\,\text{s}$.

Úloha 11 ... drtivý dopad 3.0

Jakou kinetickou energii měla malá kulička s hmotností $20\,\text{g}$ při dopadu na podlahu, jestliže spadla ze stolu, který měl výšku $1\,\text{m}$? (Zanedbejte odporové síly.)

Řešení této úlohy spočívá ve správném využití zákona zachování energie, který říká, že energie E_0 na začátku se rovná energii E_f na konci, pokud nám nějakou energii neodebraly odporové síly, které ovšem máme zanedbat. Na začátku, když ještě nepadá, nemá kulička žádnou kinetickou, ale pouze potenciální energii E_p. Když se kulička dotkne země, nemá naopak žádnou potenciální, ale pouze kinetickou energii E_k. Protože celková energie systému se zachovává, platí, že $E_\text{k} = E_\text{p}$. Potenciální energii spočítáme tak, že vynásobíme hmotnost $m = 0{,}02\,\text{kg}$, výšku $h = 1\,\text{m}$, z které těleso padá, a tíhové zrychlení $g = 10\,\text{m/s}^2$

$$E_\text{p} = mgh = 0{,}02\,\text{kg} \cdot 1\,\text{m} \cdot 10\,\text{m/s}^2 = 0{,}2\,\text{J}$$

(nulovou hladinu potenciální energie jsme zvolili v místě dopadu). Jak jsme již uvedli, kinetická energie v místě dopadu má stejnou hodnotu $0{,}2\,\text{J}$.

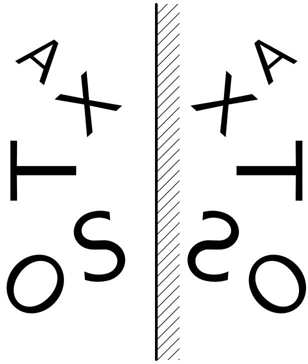
Úloha 12 ... Cyrilovo řezání

Cyril rozřezal tyč na 3 různě dlouhé části. Druhá nejdelší část byla o třetinu delší než nejkratší část. Celá tyč byla o dvě třetiny delší než nejdelší část. Jaký zlomek celé tyče představuje nejkratší část?

Jestliže délka nejdelší části je x, tak délka celé tyče je $\frac{5}{3}x$. Součet délek zbývajících částí je proto $\frac{2}{3}x$. Jestliže je délka nejkratší části y, střední část má $\frac{4}{3}y$. Dohromady mají $\frac{7}{3}y = \frac{2}{3}x$, odtud máme $y = \frac{2}{7}x$. Nejkratší část tyče tvoří tedy

$$\frac{\frac{2}{7}x}{\frac{5}{3}x} = \frac{6}{35}$$

z celkové délky tyče. Pokud bychom tuto délku chtěli vyjádřit desetinným číslem, pak by to byl cca 0,17násobek celkové délky tyče.



Obr. 1: Odraz v rovinném zrcadle

Úloha 13 ... zrcadlení

Načrtni, jak by vypadal odraz náčrtku níže ve vyobrazeném rovinném zrcadle.

To, co bychom viděli v zrcadle, je na obrázku. Jak lze očekávat, písmenka a jejich obraz jsou osově symetrické podle hranice zrcadla a převrácené. Můžete si to ověřit pohledem do zrcadla.

Úloha 14 ... počítejme, počítejme, počítejme dál

Matěj se rozhodl spočítat všechna trojciferná čísla, která neobsahují číslice 2 a 3. Kolik jich napočítal?

Uvažujme o čísle, které Matěj napsal. Na místě stovek mohou být cifry 1, 4, 5, 6, 7, 8 nebo 9, to je 7 možností. Na místě desítek a jednotek mohou být kromě těchto ještě nuly. Můžeme je libovolně kombinovat, takže nám to dohromady dá $7 \cdot 8 \cdot 8 = 448$ možností. Matěj napočítal 448 čísel.

Úloha 15 ... hoří termín

Termín série Výfuku je za námi a Paťo už uhání opravovatele, aby napsali vzorová řešení. Termín na poslání vzoráků je dnes. Před pěti dny jeden vzorák odevzdala Čajka a jeden Verča, včera jeden vzorák odevzdala Terka a jeden Petr. Jeden vzorák ještě musí odevzdat Tomáš a jeden Mišo. Kdy mají své vzoráky odevzdat, aby se součet dní, o které se opozdí, rovnal součtu dní, o které ostatní odevzdali své úlohy v předstihu? Uveď všechny možnosti.

Je potřeba zjistit, kolik dní Tomášovi a Mišovi uspořili ti, kteří vzorák odevzdali včas. Čajka a Verča poslaly vzorák 5 dní před termínem a celkově daly Tomášovi a Mišovi možnost opozdit se o 10 dní, Terka a Petr jim přidali další dva dny. Teď máme několik možností, v každé z nich musí být součet Tomášových a Mišových zmeškaných dní 12. Když tedy jeden udělá vzorák o 11 dní později, druhý ho může odevzdat jen o 1 den později. Vypíšeme-li všechny možné dvojice, dostaneme (0,12), (1,11), (2,10), (3,9), (4,8), (5,7), (6,6), (7,5), (8,4), (9,3), (10,2), (11,1), (12,0).

Úloha 16 ... vycházka do vesnice

Ema se rozhodla jít pěšky do nejbližší vesnice. Když došla do tří pětin cesty, začala být unavená. Její rychlost se proto zmenšila na polovinu. Celkem jí cesta trvala 50 minut. Jak dlouho by šla, kdyby nezpomalila?

Nechť celá cesta do školy má délku s a na začátku šla Ema rychlostí v. Potom první tři pětiny cesty prošla za $\frac{3}{5}s/v = \frac{3}{5}\frac{s}{v}$ a zbytek za $\frac{2}{5}s/\frac{v}{2} = \frac{4}{5}\frac{s}{v}$. Dohromady tyto dva časy dají 50 minut

$$\left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\right)\frac{s}{v} = \frac{7}{5}\frac{s}{v} = 50\,\mathrm{min}\,,$$

odtud $\frac{s}{v} = \frac{250}{7}$ min. Kdyby Ema nezpomalila, trvala by jí cesta právě $\frac{s}{v}$, což je $\frac{250}{7}$ min.

Úloha 17 ... kutálení kouliček

Dvě stejné plastelínové kuličky se kutálejí se stejnou rychlostí přímo proti sobě. Při srážce se z nich stane kulička jedna. Jakou rychlostí a kterým směrem se bude tato kulička kutálet?

Využijeme zákon zachování hybnosti, který mluví o nepružných srážkách dvou těles o hmotnostech m_1, m_2 a rychlostech v_1, v_2. Po nepružné srážce se obě tělesa spojí a pokračují dál rychlostí v_3. Platí

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v_3\,.$$

V našem případě mají kuličky stejné hmotnosti m a opačné rychlosti stejné velikosti, tedy $v_1 = -v_2$. Dosadíme do zákona zachování hybnosti. Hmotnosti se zkrátí a zbude $v_3 = v_1 - v_1 = 0\,\mathrm{m/s}$.

Úloha 18 ... čtvercová zahrada a obdélníková zahrada

Kamila má čtvercovou zahradu. Její sousedé mají obdélníkovou zahradu s jednou stranou o pětinu větší, než je strana Kamiliny zahrady. Obvod obou zahrad je stejný. Velikost sousedovy zahrady je $120\,\mathrm{m}^2$. Jak velkou zahradu má Kamila?

Označme stranu Kamiliny zahrady a. Její obvod je potom $4a$. Jedna strana sousedovy zahrady má $\frac{6}{5}a$. Aby měla stejný obvod, druhá strana musí mít $\frac{4}{5}a$. Obsah obdélníku je

$$\frac{4}{5}a \cdot \frac{6}{5}a = \frac{24}{25}a^2 = 120\,\mathrm{m}^2\,.$$

Plocha Kamiliny zahrady je a^2 a snadno vypočítáme, že

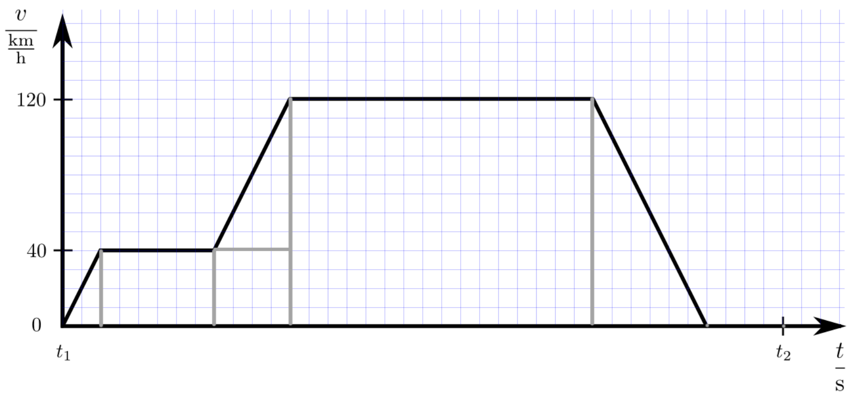
$$a^2 = \left(120 : \frac{24}{25}\right)\mathrm{m}^2 = 125\,\mathrm{m}^2\,.$$

Kamilina čtvercová zahrada má plochu $125\,\mathrm{m}^2$.

Úloha 19 ... Eurocity

Mišo má rád vlaky. Když minule cestoval, zajímalo ho, zda je vlak správně klasifikován jako Eurocity. Pro tuto kategorii vlaků platí, že průměrná rychlost musí být větší než $90\,\mathrm{km/h}$. Zapnul si GPS, vzal si sešit a zapisoval si do něho, jakou rychlost měl v nějakém čase jízdy. Jaká je průměrná rychlost vlaku? Může být označený jako vlak Eurocity? Průměrnou rychlost počítejte mezi časem t_1 a t_2, tedy i tehdy, když vlak stojí ve stanici.

Průměrná rychlost během jízdy se rovná celkové dráze projeté za celkový čas. Při počítání průměrné rychlosti nám jde o poměr času, po který vlak jede různými rychlostmi, a celkového času. Protože nám jde o poměr, nezáleží na tom, v jakých jednotkách čas počítáme nebo jak velký ve skutečnosti byl. Dále je dobré vědět, že dráhu spočítáme jako obsah plochy pod grafem závislosti rychlosti na čase (takovým, jako máme zadaný). A to je docela jednoduché – stačí ho „rozsekat“ na obdélníky a trojúhelníky (třeba tak, jako je to na obrázku 2) a spočítat jejich obsah. Ten podělíme celkovým časem a máme výsledek.



Obr. 2: Závislost rychlosti na čase

Obsahy jednotlivých útvarů (jsou uvedené v jednotkách $\mathrm{km}\cdot\frac{\text{čtverec}}{\mathrm{h}}$) a jejich součet je

$$\frac{2\cdot 40}{2} + 6\cdot 40 + 4\cdot 40 + \frac{4\cdot 80}{2} + 16\cdot 120 + \frac{6\cdot 120}{2} + 0 = 2\,880\,.$$

Čas je 38 čtverců, takže výsledná rychlost je

$$\frac{2\,880\,\mathrm{km}\cdot\frac{\text{čtverec}}{\mathrm{h}}}{38\,\text{čtverců}} \doteq 75{,}8\,\mathrm{km/h}\,.$$

Vyšla nám průměrná rychlost menší než 90 km/h, vlak by tedy neměl být klasifikován jako Eurocity.

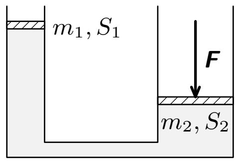
Úloha 20 ... replikátor

Na počátku je jeden replikátor. Za minutu tento replikátor vytvoří další dva replikátory. Za další minutu vytvoří každý replikátor dva nové replikátory a tak dále. Za kolik minut se vytvoří více než 2 000 replikátorů?

Každou minutu se počet replikátorů ztrojnásobí (z každého jednoho vzniknou 2 nové). Vlastně tedy chceme zjistit, kolikrát po sobě musíme vynásobit číslo 3, aby byl výsledek větší než 2000. Postupně dostáváme $3\cdot3 = 3^2 = 9$, $3\cdot3\cdot3 = 3^3 = 27$, $3\cdot3\cdot3\cdot3 = 3^4 = 81$, $3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3 = 3^5 = 243$, $3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3 = 3^6 = 829$, $3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3 = 3^7 = 2\,187$, takže po sedmi minutách jich bude 2 187, což už je víc než 2 000.

Úloha 21 ... drtivé písty

Spojené nádoby jsou uzavřeny písty o obsahu $S_1 = 100\,\mathrm{cm}^2$ a $S_2 = 600\,\mathrm{cm}^2$. Jak velkou silou F musíme působit na větší píst, aby zůstala soustava v klidu, jestliže má menší píst hmotnost $m_1 = 5\,\mathrm{kg}$ a větší píst hmotnost $m_2 = 15\,\mathrm{kg}$?



Obr. 3: Písty

Síla působící na první píst je přímo úměrná síle působící na druhý píst a poměru obsahů plochy pístů. Aby se síly vyrovnaly a soustava zůstala v rovnovážné poloze, musí být výslednice sil působících na každý z pístů nulová. Přirozeně nám stačí vyšetřit pouze jeden píst – nebude-li se hýbat ten, nebude se pohybovat ani druhý. Na větší píst působí svislým směrem tíhová síla $F_2 = m_2 g$ a hledaná síla F a opačným směrem od menšího pístu kapalinou přenášená síla $F_1 \cdot (S_2/S_1) = (m_1 g) \cdot (S_2/S_1)$. Z uvedeného plyne rovnost

$$m_1 g \frac{S_2}{S_1} = m_2 g + F\,,$$

z které se dá vyjádřit hledaná síla

$$F = \frac{S_2}{S_1} m_1 g - m_2 g = 150\,\mathrm{N}\,.$$

Aby se písty nepohybovaly, musíme na větší z nich působit shora silou $F = 150\,\mathrm{N}$.

Úloha 22 ... čerpání

Marek Šebo miluje, když může dát nevinným lidem práci. Minule je až tak vyčerpal, že si musel koupit dvě čerpadla, a když už koupil ta čerpadla, proč ne rovnou i bazén, ve kterém by mohly nevinné oběti načerpat energii? Hlavní čerpadlo naplní bazén za 9 hodin. Pomocné čerpadlo naplní za stejný čas polovinu z toho, co hlavní čerpadlo. Kolik hodin musí oběti počkat, než hlavní a pomocné čerpadlo naplní jejich bazén?

Za 1 hodinu naplní hlavní čerpadlo 1/9 bazénu. Pomocné čerpadlo naplní jen polovinu, takže 1/18 bazénu. Dohromady za 1 hodinu naplní

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$$

1/6 bazénu. Proto jim naplnění celého bazénu bude trvat 6 hodin.

Úloha 23 ... kytarohraní

Hrál takhle jednou pterodaktyl na kytaru, když tu jeho krásné tóny ve vzdálenosti 640 m *uslyšela liška, která se za ním hned rozeběhla rychlostí* 5 m/s. *Když byla liška v polovině cesty, pterodaktyl si jí všiml a hned své kamarádce vyběhl naproti stejnou rychlostí. Kolik času uběhne od okamžiku, kdy liška vybíhá, do jejího setkání s pterodaktylem?*

Spočítejme čas, za který se potká liška s pterodaktylem. První polovinu celé dráhy s projde liška za čas

$$t = \frac{1/2 \cdot s}{v_\mathrm{l}}\,,$$

kde v_l je její rychlost. V případě druhé poloviny cesty si musíme uvědomit, že když by se pterodaktyl nehýbal a liška by se hýbala rychlostí svou plus pterodaktylovou, tak by se potkali za stejný čas, jako kdyby běželi každý svou rychlostí. Zbylou část hledaného času spočítáme tedy obdobně, jen sečteme rychlost lišky v_l i pterodaktyla v_p

$$\frac{1/2 \cdot s}{v_\mathrm{l}} + \frac{1/2 \cdot s}{v_\mathrm{l} + v_\mathrm{p}} = \left(\frac{320}{5} + \frac{320}{10}\right)\,\mathrm{s} = 96\,\mathrm{s}\,.$$

Liška se tedy s pterodaktylem setká za 96 s od vyběhnutí.

Úloha 24 ... boxy alá obrázky

Na kalkulačce je zobrazeno číslo 10. Kromě displeje se na kalkulačce nachází jen šest tlačítek: $\boxed{+2}$, $\boxed{-4}$, $\boxed{+5}$, $\boxed{\times 0}$, $\boxed{\times 6}$ *a* $\boxed{\div 2}$. *Tlačítka provedou po stlačení příslušnou početní operaci a výsledek zobrazí. Jana použije každé tlačítko právě jednou. Jaké největší číslo může na konci dostat?*

Určitě musíme někde použít $\boxed{\times 0}$. V tom okamžiku se číslo vynuluje. Potom budeme chtít použít už jenom ty operace, které číslo zvětší, a to jsou $\boxed{+2}$, $\boxed{+5}$ a $\boxed{\times 6}$. (Zbylé dvě použijeme na začátku a potom dáme $\boxed{\times 0}$.) Nejvyššího výsledku dosáhneme, když vynásobíme až nakonec, protože potom se obě z čísel 2 a 5, které připočítáme, násobí 6. Celý postup vypadá následovně:

$$\begin{aligned} 10 - 4 &= 6\,,\\ 6/2 &= 3\,,\\ 3 \cdot 0 &= 0\,,\\ 0 + 2 &= 2\,,\\ 2 + 5 &= 7\,,\\ 7 \cdot 6 &= 42\,. \end{aligned}$$

Výsledkem je tedy odpověď na otázku života, vesmíru a vůbec: 42.

Úloha 25 ... vaření zápalkou

Jaké množství vody by se dalo přeměnit na páru pomocí jedné zápalky, jejímž shořením se uvolní teplo $Q = 200\,\mathrm{J}$? Počítejte s vodou o počáteční teplotě $25\,^\circ\mathrm{C}$. Tepelná kapacita vody je přibližně $c = 4\,000\,\mathrm{J/(kg{\cdot}{}^\circ C)}$ a měrné skupenské teplo vody je zaokrouhleně $l = 300\,\mathrm{kJ/kg}$. Výsledek uveďte v gramech.

Voda se bude vařit při teplotě $100\,^\circ\mathrm{C}$, takže se nejprve musí ohřát o $\Delta t = 75\,^\circ\mathrm{C}$. K tomu je potřeba teplo $Q_1 = cm\Delta t$. Na odpaření vody se spotřebuje teplo $Q_2 = ml$. Součet těchto dvou tepel se pro určitou hmotnost m má rovnat teplu dodanému zápalkou. To zapíšeme rovnicí

$$cm\Delta t + ml = Q\,,$$

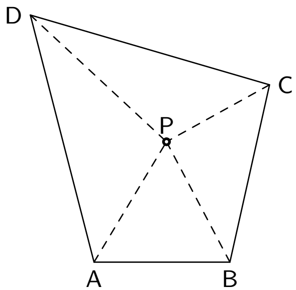
z níž vyjádříme

$$m = \frac{Q}{c\Delta t + l} = \frac{200}{4\,000 \cdot 75 + 300\,000}\,\mathrm{kg} = \frac{1}{3\,000}\,\mathrm{kg} = \frac{1}{3}\,\mathrm{g}\,.$$

Pomocí jedné zápalky tedy dokážeme odpařit pouze $1/3g$ vody o pokojové teplotě.

Úloha 26 ... Lukášův bod

Lukáš si nakreslil čtyřúhelník ABCD *takový, že:* $|\mathsf{AB}| = 6\,\mathrm{cm}$, $|\mathsf{AC}| = 11\,\mathrm{cm}$, $|\mathsf{BC}| = 8\,\mathrm{cm}$, $|\mathsf{CD}| = 11\,\mathrm{cm}$, $|\mathsf{BD}| = 14\,\mathrm{cm}$. *Nyní Lukáš do daného čtyřúhelníku dokreslí bod* P *tak, aby součet* $|\mathsf{AP}| + |\mathsf{BP}| + |\mathsf{CP}| + |\mathsf{DP}|$ *byl co nejmenší. Pomozte Lukášovi určit minimum tohoto součtu.*



Určitě platí $|\mathsf{AP}|+|\mathsf{CP}| \geq |\mathsf{AC}|$, to je známá trojúhelníková nerovnost. Rovnost nastává pro body na úhlopříčce. Obdobně $|\mathsf{BP}|+|\mathsf{DP}| \geq |\mathsf{BD}|$. Proto platí $|\mathsf{AP}|+|\mathsf{BP}|+|\mathsf{CP}|+|\mathsf{DP}| \geq |\mathsf{AC}|+|\mathsf{BD}| = 25\,\mathrm{cm}$. Této hodnoty součet nabude pro P ležící na obou úhlopříčkách – tedy na jejich průsečíku. Minimum součtu $|\mathsf{AP}| + |\mathsf{BP}| + |\mathsf{CP}| + |\mathsf{DP}|$ je $25\,\mathrm{cm}$.

Úloha 27 ... přetékající bazén

Z nádrže přeteklo přes okraj $5\,\mathrm{m}^3$ vody. Naštěstí byl pod nádrží prázdný bazén, který všechnu tuto vodu pojal. Bazén je kvádr s podstavou obdélníkového tvaru s rozměry $2\,\mathrm{m}$ a $5\,\mathrm{m}$. Do jaké výšky v něm voda sahá?

Objem kvádru o stranách a, b, c se spočítá podle vzorce $V = a \cdot b \cdot c$. Voda, která vyteče do bazénu, zaujme tvar podstavy a celkový objem bude $5\,\mathrm{m}^3$. Můžeme napsat $V = a \cdot b \cdot c = 5\,\mathrm{m}^3$, přičemž $a = 2\,\mathrm{m}$ a $b = 5\,\mathrm{m}$, takže můžeme spočítat, že

$$V = a \cdot b \cdot c \quad \Rightarrow \quad c = \frac{V}{a \cdot b} = \frac{5\,\mathrm{m}^3}{2\,\mathrm{m} \cdot 5\,\mathrm{m}} = \frac{5}{10}\,\mathrm{m} = 0{,}5\,\mathrm{m}\,.$$

Výška, které dosáhne vylitá voda, bude $0{,}5\,\mathrm{m}$.

Úloha 28 ... sčítání čísel

Petr sečetl 800 po sobě jdoucích přirozených čísel, přičemž začal od čísla 15. Káťa sečetla 801 po sobě jdoucích přirozených čísel, přičemž začala od 25. O kolik je její součet větší než Petrův?

Každé Kátino číslo bylo o 10 větší, takže na 800 číslech nasčítala o $800 \cdot 10 = 8\,000$ víc, a nakonec ještě připočítala 801. číslo, což je $25 + 800 = 825$ (801. číslo je o 800 větší než první). Kátin součet byl tedy o $8\,000 + 825 = 8\,825$ větší.

Úloha 29 ... rezistorový exhibicionista

Martin má velký odpor k práci a rád by to všem okatě ukázal. Proto zašel do nejbližšího obchodu a koupil si dvě předem zapojené sady rezistorů, které si chtěl připnout na svoji košili na TMF. Naneštěstí se doma ukázalo, že se mu na ni vejde jen jedno zapojení. Pomozte Martinovi a rozhodněte, které si má připnout, jestliže hledá zapojení s největším celkovým odporem. Každý z použitých rezistorů má odpor $1\,\Omega$. Ve výsledku uveďte i odpor vybraného zapojení.

Na vyřešení této úlohy stačí znát dva základní zákony platící pro zapojení rezistorů: Pro sériové zapojení („za sebou“) platí

$$R = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots$$

pro paralelní zapojení („vedle sebe“) platí

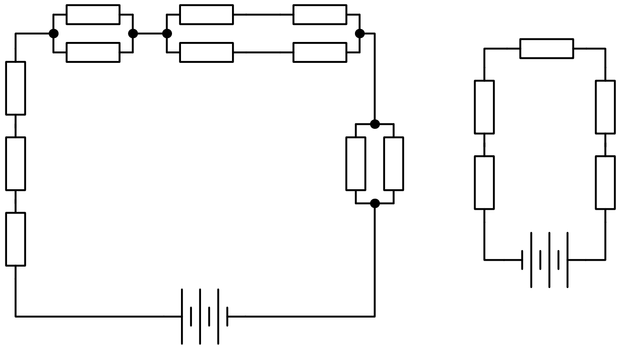
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots\,.$$

Nejprve vyřešme jednodušší zapojení, tím je to druhé. Je to 5 rezistorů zapojených v sérii, takže celkový odpor tohoto zapojení je

$$R_2 = 1\,\Omega + 1\,\Omega + 1\,\Omega + 1\,\Omega + 1\,\Omega = 5\,\Omega\,.$$

Celkový odpor prvního zapojení sčítáme ve směru od kladného pólu zdroje k zápornému. Nejprve máme 3 rezistory v sérii, takže jejich odpor je $R_a = 3\,\Omega$. Potom následují dva paralelně zapojené rezistory, pro jejich odpor platí

$$\frac{1}{R_b} = \frac{1}{1\,\Omega} + \frac{1}{1\,\Omega}\,,$$



Obr. 4: Srovnávaná zapojení

takže $R_\mathrm{b} = 1/2\,\Omega$. V další části obvodu zkombinujeme pravidla pro sériové i paralelní zapojení, bude platit

$$\frac{1}{R_c} = \frac{1}{1\,\Omega + 1\,\Omega} + \frac{1}{1\,\Omega + 1\,\Omega}\,,$$

takže $R_\mathrm{c} = 1\,\Omega$. Poslední část je stejná jako druhá, tudíž $R_d = R_b = 1/2\,\Omega$. Dohromady máme

$$R_1 = R_a + R_b + R_c + R_d = (3 + 1/2 + 1 + 1/2)\Omega = 5\,\Omega\,.$$

Vychází $R_1 = R_2 = 5\,\Omega$. Obě zapojení tedy mají stejný odpor, a to $5\,\Omega$.

Úloha 30 ... problém náhrdelníku

V pytlíku, do kterého nevidíme, je 20 bílých, 25 modrých a 30 červených korálků. Ája si chce udělat náhrdelník, na kterém budou 2 modré a 6 červených korálků. Kolik jich musí z pytlíku nejméně vytáhnout tak, aby měla naprostou jistotu, že mezi vytaženými bude mít ty správné korálky na svůj náhrdelník?

Zjistěme, kolik nejvíce kuliček může vytáhnout tak, aby neměla dostatek na náhrdelník. To může nastat ze dvou důvodů – buď chybí modré, nebo červené kuličky. Když chybí modré, může vytáhnout 1 modrou a klidně všechny ostatní. To je dohromady $20 + 1 + 30 = 51$ kuliček. Když chybí červené, může vytáhnout nejvíc 5 červených a opět všechny ostatní, což je $20 + 25 + 5 = 50$ kuliček. Je vidět, že ještě při 51 kuličkách může mít smůlu, ale když si vytáhne 52, určitě nebudou chybět ani modré, ani červené. Ája si musí vytáhnout alespoň 52 kuliček.

Úloha 31 ... siláci

Martin a Marek se rádi přetlačují. Naposledy vyhrál Martin. Marek však takovou potupu nesnesl a rozhodl se, že Martina porazí rozumem. Vypočítal, že největší síla, kterou dokáže Martin tlačit, je $700\,\mathrm{N}$ *a on sám dokáže zatlačit jen silou* $500\,\mathrm{N}$*. Také zjistil, že když cvičí večer, druhý den* *dokáže zatlačit silou o* 5 N *větší než den předtím. Předpokládejte, že Martin a Marek působí silou v navzájem opačných směrech. Když bude Marek každý den cvičit, za kolik dní může Martina vyzvat k přetlačování, aby vyhrál?*

Když síly působí proti sobě, tak výsledná síla se rovná jejich rozdílu. To znamená, že aby Marek vyhrál, síla, kterou působí, musí být větší než ta, kterou působí Martin. Když bude Marek cvičit každý den, tak po x dnech bude jeho síla $(500 + 5 \cdot x)\,\mathrm{N}$. Kdy se Markova a Martinova síla vyrovnají zjistíme tak, že dáme tyto síly do rovnosti

$$(500 + 5 \cdot x)\mathrm{N} = 700\,\mathrm{N}\,.$$

Vyjde nám $x = 40$, takže jejich síly se vyrovnají po 40 dnech. Další den, tedy 41., už Marek Martina přetlačí.

Úloha 32 ... počasíčko

Každý den v týdnu prší nebo svítí slunce. Když jeden den prší, další den svítí slunce. Kolik je různých předpovědí počasí (které mohou nastat) na jeden týden?

Na jeden den jsou dvě různé předpovědi počasí. Na 2 dny jsou 3 různé – prší, slunce; slunce, slunce; slunce, prší. My potřebujeme předpověď na víc dní, podívejme se na ten první. Když svítí slunce, můžeme k tomu vzít libovolnou předpověď na počet dní zmenšený o 1. Když první den prší, musí druhý den svítit slunce a za ním opět může následovat libovolná předpověď na počet dní zmenšený o 2. Z toho vyplývá, že počet předpovědí na 3 dny je součet počtů předpovědí na 1 a 2 dny atd. Když postupujeme podle tohoto pravidla, snadno spočítáme, že na 3, 4, 5, 6 a 7 dní je postupně 5, 8, 13, 21 a 34 předpovědí. Počet možných předpovědí na týden je tedy 34.

Úloha 33 ... Měsíc nad námi

Kamila se cestou ze Šturáků při čekání na autobus zahleděla na hvězdy a uvědomila si, že vždycky vypadá Měsíc stejně a že tedy asi vždy viděla pouze jednu stranu Měsíce. Jakmile přišla domů, rychle se koukla do chytré knížky a hle – skutečně můžeme ze Země vidět jen jednu polovinu Měsíce! Dále našla, že jeden oběh Měsíce okolo Země trvá měsíc (29,5 dne)*, vzdálenost mezi Zemí a Měsícem je* 384 400 km *a poměr hmotností Země a Měsíce je* 1 : 0,0123*. Jak dlouho trvá Měsíci jedno otočení kolem vlastní osy?*

V této úloze bylo zadáno mnoho čísel navíc. Ve skutečnosti se stačilo zamyslet – kdyby jedno otočení Měsíce kolem jeho vlastní osy bylo jiné než délka jednoho oběhu, tak bychom ho viděli z více než jedné poloviny – buď by se otáčel příliš rychle a postupně by se na nás celý otočil, nebo by se pohyboval příliš pomalu a také by se nám ukázal víc. Měsíc se však otočí kolem své osy za dobu svého oběhu, tj. 29,5 dne, takže ho vidíme jenom z jedné poloviny.

Úloha 34 ... vážení závaží na váze

Máme k dispozici závaží o hmotnosti 8, 6, 3 *a* 1 kg *(od každého kolik chceme). Jaké nejmenší množství kusů závaží je třeba postavit na váhu, aby na ní bylo přesně* 61 kg*?*

Na váhu můžeme dát nejvíce sedm 8kg závaží. Když jich dáme sedm, chybí ještě 5 kg a to se dá nakombinovat jen jako $5\,\mathrm{kg} = 3 + 1 + 1\,\mathrm{kg}$ (nebo tedy ještě pět 1kg závaží, ale to není nejvýhodnější varianta). To je celkem deset závaží. Kdybychom dali jen šest 8kg závaží, chybělo by ještě 13 kg a to jde získat kombinací $13 = 6 + 6 + 1$ (kdybychom nepoužili 6kg závaží, museli bychom dohromady použít víc). To by vyšlo na 9 závaží. Kdybychom použili méně než šest 8kg závaží, na méně než devět se nám to nepodaří, protože dostaneme nejvíc $5 \cdot 8\,\mathrm{kg} + 3 \cdot 6\,\mathrm{kg} = 58\,\mathrm{kg}$. To znamená, že méně než devět závaží nelze použít. Jak jsme zjistili, s devíti závažími už danou hmotnost navážíme, minimální počet závaží je tedy devět.

Úloha 35 ... chlor na mol

Jaká je hmotnost jednoho molu čistého molekulárního chloru? Odpověď chceme s přesností na dvě platné cifry. Počet částic v jednom molu je $N_A \doteq 602\,214\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 6{,}02214 \cdot 10^{23}$ *(jedná se o tzv. Avogadrovu konstantu). Objem jednoho molu molekulárního chloru je za standardních podmínek* $V_{mol} = 22{,}1\,\ell$*. Relativní atomová hmotnost chloru je* $A_r(\mathrm{Cl}) = 35{,}5$*. Hustota molekulárního chloru za normálních podmínek je* $\varrho(chlor) = 3{,}2\,\mathrm{kg/m^3}$*.*

K vyřešení této úlohy nepotřebujeme všechny informace, které jsou v ní zadané. Umožňuje nám tak dva postupy řešení. Chlor je plyn, který tvoří dvouatomové molekuly $\mathrm{Cl_2}$, tj. jedna molekula sestává ze dvou atomů. Molekulární hmotnost tedy zjistíme tak, že vynásobíme atomovou hmotnost dvěma

$$M(\mathrm{Cl_2}) = 2 \cdot A_\mathrm{r}(\mathrm{Cl}) = 2 \cdot 35{,}5\,\mathrm{g} = 71\,\mathrm{g}\,.$$

Jiné řešení využije toho, že známe hustotu chloru a objem, který zabere jeden mol látky

$$M(\mathrm{Cl_2}) = \varrho(\mathrm{Cl_2}) \cdot V(\mathrm{Cl_2}) = 3{,}2\,\mathrm{g}/\ell \cdot 22{,}1\,\ell \doteq 71\,\mathrm{g}\,.$$

Oběma způsoby dojdeme k výsledku, že jeden mol plynného chloru má při standardních podmínkách hmotnost 71 g.

Úloha 36 ... čokoládolámání

Čokoláda měla rozměry 50 cm × 100 cm*. Lukáš si ulomil z levého horního rohu obdélníček velký* 5 cm × 8 cm*. Petr si z pravého horního rohu ulomil obdélníček* 6 cm × 10 cm*. Paťo si z levého dolního rohu ulomil obdélníček* 7 cm × 4 cm*. Radka si z pravého dolního rohu ulomila obdélníček* 12 cm × 23 cm*. Potom se Lukáš naštval, vyznačil na čokoládě úsečku a rozřízl ji podél ní na dva kusy. Součet obvodů těchto dvou částí byl* 428 cm*. Jaká byla délka úsečky, podle které Lukáš řezal?*

Všimneme si, že obvod čokolády se ulomením obdélníčků z rohů nezmění, takže obvod čokolády, když do ní Lukáš vyznačil úsečku, byl stále

$$2 \cdot (50\,\mathrm{cm} + 100\,\mathrm{cm}) = 300\,\mathrm{cm}\,.$$

Po přeříznutí se součet obvodů zvětšil o dvojnásobek délky této úsečky, protože když je dáme dohromady, tak tvoří obvod čokolády a navíc je v každém kousku právě ta úsečka. Proto délka úsečky je

$$\frac{428\,\mathrm{cm} - 300\,\mathrm{cm}}{2} = 64\,\mathrm{cm}\,.$$

Úsečka má délku 64 cm.

Úloha 37 ... olympiádní pružinka

Jarka minulý rok na Fyzikální olympiádě zavěšovala závaží na pružinku. Když byla na pružince zavěšená hmotnost 1 kg*, pružinka měla délku* 2 cm*. Když přidala druhé* 1 kg *závaží, délka se změnila na* 4 cm*. Jestliže na konci byla délka pružinky* 10 cm*, kolik* 500 g *závaží ještě zavěsila?*

Když se podíváte na siloměr, můžete si všimnout, že když ukáže 1 N jako protažení 1 cm, tak 2 N bude odpovídat protažení 2 cm, 3 N odpovídají 3 cm a tak dál. V siloměru je pružinka, kterou popisuje Hookův zákon

$$F = k\Delta x\,,$$

kde F je síla, kterou je pružinka natahovaná, Δx je změna délky pružinky a k je tzv. tuhost pružinky, konstanta, která charakterizuje vlastnosti dané pružinky. Jestliže tedy víme, že pružinka se natahuje se silou lineárně, stačí zjistit, o kolik se pružinka prodlouží, když přidáme jedno 500 g závaží. Když Jarka na pružinku zavěsila dvě 1kg závaží, pružinka se protáhla o 4 cm, a dál se má protáhnout ještě o 6 cm – je potřeba přidat tři 1kg závaží, neboli šest závaží o hmotnosti 500 g.

Úloha 38 ... děli-děli-dělitelnost?

Jaké je nejvyšší číslo, v kterém se žádná cifra neopakuje dvakrát, takové, že není dělitelné ani dvěma, ani třemi?

Kdyby dané číslo bylo deseticiferné, obsahovalo by všechny cifry 0–9, jeho ciferný součet by byl $9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 45$, což je číslo dělitelné třemi, takže celé číslo by bylo dělitelné třemi. Proto hledané číslo bude muset být nejvýše devíticiferné. Chceme, aby bylo co nejvyšší, takže aby ze začátku byly co nejvyšší cifry – tedy 9876543_ _. Na konci si jenom musíme pohlídat, aby byla lichá číslice – aby číslo nebylo dělitelné dvěma. Dostaneme tak 987 654 301. Každé jiné číslo, které by také splňovalo dané podmínky, bude menší.

Úloha 39 ... cesta domů

Když jel Andrej domů, všiml si, že první polovinu cesty vlakem do Liptovského Mikuláše jel průměrnou rychlostí jen 60 km/h*. Andrej by však chtěl jet domů tak, aby byla jeho průměrná rychlost alespoň* 130 km/h*. Jakou minimální rychlostí musí ujet druhou polovinu vzdálenosti, aby byla jeho průměrná rychlost alespoň* 130 km/h*?*

Průměrná rychlost je dána podílem celkové dráhy s a času t, za který tuto dráhu urazíme. Čas, za který urazíme první polovinu dráhy, označíme t_1, druhou polovinu dráhy urazíme za t_2. Zřejmě $t = t_1 + t_2$, takže pro průměrnou rychlost máme

$$\bar{v} = \frac{s}{t_1 + t_2}\,,$$

z čehož si vyjádříme

$$t_2 = \frac{s}{\bar{v}} - t_1\,.$$

Zároveň dokážeme vyjádřit rychlost na prvním úseku jako $v_1 = s/(2t_1)$, což můžeme dosadit do vztahu pro t_2 a dostaneme

$$t_2 = \frac{s}{\bar{v}} - \frac{s}{2v_1}\,.$$

Nyní už lze vyjádřit rychlost na druhém úseku

$$v_2 = \frac{s}{2t_2} = \frac{s}{\frac{2s}{\bar{v}} - \frac{s}{v_1}}\,.$$

Neznámá dráha s se vykrátí a dostaneme tak hledanou rychlost vyjádřenou pouze pomocí zadaných veličin:

$$v_2 = \frac{1}{\frac{2}{\bar{v}} - \frac{1}{v_1}} = \frac{v_1\bar{v}}{2v_1 - \bar{v}}\,.$$

Nyní si všimneme, že ve jmenovateli vychází záporné číslo. To znamená, že neexistuje taková v_2, aby byla výsledná průměrná rychlost rovna $130\,\mathrm{km/h}$.

K výsledku můžeme dospět mnohem jednodušeji třeba tak, že si představíme, že celá dráha je např. $s = 120\,\mathrm{km}$. Do poloviny cesty dorazí rychlostí $v_1 = 60\,\mathrm{km/h}$ za jednu hodinu. Aby byla jeho průměrná rychlost $130\,\mathrm{km/h}$, musel by celou dráhu urazit za $t = (120/130)\mathrm{h} < 1\,\mathrm{h}$. Z toho je rovnou vidět, že zadané průměrné rychlosti již nelze dosáhnout.

Úloha 40 ... trojúhelník vepsaný (trojúhelníku)

Trojúhelník ABC *má obsah* $27\,\mathrm{cm}^2$. *Body* X, Y *a* Z *jsou na stranách* AB, BC *a* AC *tak, že* $|\mathsf{AX}| : |\mathsf{BX}| = |\mathsf{BY}| : |\mathsf{CY}| = |\mathsf{CZ}| : |\mathsf{AZ}| = 2$. *Jaký obsah má trojúhelník* XYZ*?*

Podívejme se na trojúhelník XBY. Víme, že

$$S_{\mathsf{ABC}} = \frac{|\mathsf{AB}|v_{\mathsf{AB}}}{2}\,,$$

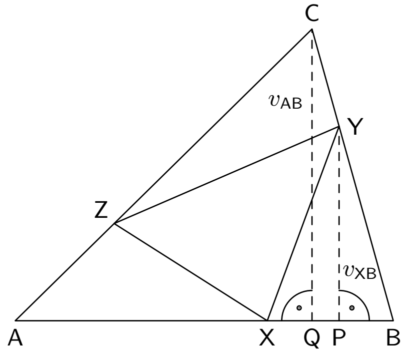
a také, že

$$S_{\mathsf{XBY}} = \frac{|\mathsf{XB}|v_{\mathsf{XB}}}{2}\,,$$

kde v_{AB} a v_{AB} jsou výšky k příslušným stranám v trojúhelnících ABC a XBY.

Ze zadání víme, že $|\mathsf{XB}| = |\mathsf{AB}|/3$. Také platí $v_{\mathsf{XB}} = \frac{2}{3}v_{\mathsf{AB}}$, protože když si označíme P, Q paty těchto výšek (postupně v trojúhelnících XBY a ABC), tak trojúhelníky BQC a BPY budou podobné podle věty *uu* (shodují se ve dvou úhlech). Z toho vyplývá

$$\frac{v_{\mathsf{XB}}}{v_{\mathsf{AB}}} = \frac{|\mathsf{BY}|}{|\mathsf{BC}|}\frac{2}{3}|\mathsf{BC}| = \frac{2}{3}\,,$$



Obr. 5: Náčrtek trojúhelníku vč. vepsaného trojúhelníku

a odtud

$$S_{\mathsf{XBY}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot S_{\mathsf{ABC}} = \frac{2}{9} \cdot 27\mathrm{cm}^2 = 6\,\mathrm{cm}^2\,.$$

Úplně stejně zjistíme, že $S_{\mathsf{YCZ}} = S_{\mathsf{ZAX}} = 6\,\mathrm{cm}^2$. Potom už snadno dopočítáme

$$S_{\mathsf{XYZ}} = S_{\mathsf{ABC}} - S_{\mathsf{XBY}} - S_{\mathsf{YCZ}} - S_{\mathsf{ZAX}} = 9\,\mathrm{cm}^2\,.$$

Obsah trojúhelníku XYZ je $9\,\mathrm{cm}^2$.

Úloha 41 ... vlezlý mravenec

Když posledně Lukáše štval nejmenovaný mainstreamový operační systém na Náryho notebooku, všiml si, jak leze po notebooku mravenec od jednoho rohu k protilehlému (po úhlopříčce). Notebook má rozměry $20\,\mathrm{cm} \times 21\,\mathrm{cm}$. *Jaká byla průměrná rychlost mravence, jestliže příslušnou dráhu prošel za* $20\,\mathrm{s}$*?*

Průměrnou rychlost budeme počítat jako dráhu dělenou časem. Dráhou bude v našem případě úhlopříčka notebooku. Jelikož má notebook tvar obdélníku, délku úhlopříčky e spočítáme přes Pythagorovu větu. Průměrná rychlost je potom

$$v = \frac{e}{t} = \frac{\sqrt{20^2 + 21^2}}{20}\mathrm{cm/s} = \frac{29}{20}\,\mathrm{cm/s} = 1{,}45\,\mathrm{cm/s}\,.$$

Průměrná rychlost mravence je $1{,}45\,\mathrm{cm/s}$.

Úloha 42 ... obdélníková síť

Arthur má čtverečkovou síť 3×5. *Kolik na ní umí najít obdélníků (i čtverec je obdélník) takových, že neobsahují prostřední čtvereček jeho čtverečkové sítě?*

Nejprve spočítáme, kolik je tam všech obdélníků. Obdélník je určen jednoznačně dvojicí řádků a dvojicí sloupců (mohou být i dva stejné) – potom je to obdélník mezi těmito sloupci a řádky, včetně nich. Dvojic řádků je 6 (tři různé a tři stejné). Dvojic sloupců je 5, když bereme stejné, a $5 \cdot 4/2 = 10$, když bereme různé – na první máme pět možností, na druhý jen čtyři a vydělíme 2, abychom nepočítali každý dvakrát. To je celkem 15. Když zkombinujeme každou možnost s každou, bude to $15 \cdot 6 = 90$ obdélníků. Ty, co obsahují střed, jsou definované 2 čtverečky – levým horním a pravým dolním rohem. Aby ho obsahovaly, levý horní musí být v levém horním obdélníku 2×3, pravý dolní v pravém dolním 2×3. Je to tedy 6 možností na oba rohy, dohromady $6 \cdot 6 = 36$ obdélníků. Obdélníků, co střed neobsahují, je tedy $90 - 36 = 54$.

Alternativně můžeme řešit úlohu výčtem obdélníků vepsatelných do obdélníku 3×5. Obdélníků 1×1 vepíšeme 14, 1×2 – 10, 1×3 – 8, 1×4 – 4, 1×5 – 2, 2×1 – 8, 2×2 – 4, 3×1 – 4, 3×2 – 2. Celkem to je $14 + 10 + 6 + 4 + 2 + 8 + 4 + 4 + 2 = 54$ různých vepsatelných obdélníků.

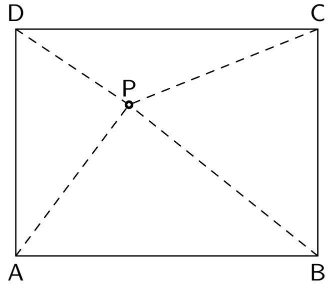
Úloha 43 ... expandující mozek

Hmotnost dětského mozku se zvětšuje rychlostí 1,5 mg *za minutu. O kolik se zvětší dětský mozek za jeden den? Odpověď udejte v* kg.

Dětský mozek se zvětšuje 1,5 mg za minutu, takže za hodinu se zvětší o $1{,}5\,\mathrm{mg/s} \cdot 60\,\mathrm{s} = 90\,\mathrm{mg}$, za den o $90\,\mathrm{mg/h} \cdot 24\,\mathrm{h} = 2\,160\,\mathrm{mg}$. Teď zbývá převést miligramy na kilogramy – $1\,\mathrm{mg} = 0{,}001\,\mathrm{g} = 0{,}000\,001\,\mathrm{kg}$, takže za jeden den se dětský mozek zvětší o $0{,}002\,160\,\mathrm{kg}$.

Úloha 44 ... prostřední bod

Uprostřed obdélníka ABCD *je bod* P. *Obsahy trojúhelníků* ABP, BCP *a* CDP *jsou po řadě* $42\,\mathrm{cm}^2$, $47\,\mathrm{cm}^2$ *a* $1\,000\,\mathrm{cm}^2$. *Jaký je obsah trojúhelníka* ADP*?*



Všimneme, si že

$$S_{\mathsf{ABP}} + S_{\mathsf{CDP}} = \frac{|\mathsf{AB}| v_{\mathsf{AB}}}{2} + \frac{|\mathsf{CD}| v_{\mathsf{CD}}}{2} = \frac{|\mathsf{AB}|}{2}(v_{\mathsf{AB}} + v_{\mathsf{CD}})\,.$$

Úprava plyne ze skutečnosti, že v obdélníku platí $|\mathsf{AB}| = |\mathsf{CD}|$, takže můžeme $|\mathsf{AB}|$ vytknout. Dále zřejmě platí $v_{\mathsf{AB}} + v_{\mathsf{CD}} = |\mathsf{CB}|$, takže můžeme psát

$$S_{\mathsf{ABP}} + S_{\mathsf{CDP}} = \frac{|\mathsf{AB}|}{2}(v_{\mathsf{AB}} + v_{\mathsf{CD}}) = \frac{|\mathsf{AB}| \cdot |\mathsf{CB}|}{2} = \frac{1}{2} S_{\mathsf{ABCD}}\,.$$

Obdobně odvodíme $S_{\mathsf{BCP}} + S_{\mathsf{ADP}} = \frac{S_{\mathsf{ABCD}}}{2}$. Z toho plyne rovnost $S_{\mathsf{BCP}} + S_{\mathsf{ADP}} = S_{\mathsf{ABP}} + S_{\mathsf{CDP}}$. Nyní už lehce dopočítáme

$$S_{\mathsf{ADP}} = S_{\mathsf{ABP}} + S_{\mathsf{CDP}} - S_{\mathsf{BCP}} = 42\,\mathrm{cm}^2 + 1\,000\,\mathrm{cm}^2 - 47\,\mathrm{cm}^2 = 995\,\mathrm{cm}^2\,.$$

Hledaný obsah trojúhelníku ADP je $995\,\mathrm{cm}^2$.

Úloha 45 ... měření vlaku

Stanicí projíždí rychlík rychlostí $108\,\mathrm{km/h}$*, v kterém sedí Verča a Radka vezoucí se do Českých Budějovic. V opačném směru jede po sousední koleji nákladní vlak rychlostí* $54\,\mathrm{km/h}$*. Radka a Verča se dívaly ven oknem z rychlíku a zjistily, že nákladní vlak kolem nich projel za čas* $5\,\mathrm{s}$*. Jaká je délka nákladního vlaku?*

Označíme-li rychlost rychlíku v_1 a rychlost nákladního vlaku v_2, pak je vzájemná rychlost míjejících se vlaků $v = v_1 + v_2$. Délku nákladního vlaku pak snadno spočteme jako součin rychlosti v a času t, který dívky naměřily. Převedeme rychlosti $v_1 = 54\,\mathrm{km/h} = 15\,\mathrm{m/s}$, $v_2 = 108\,\mathrm{km/h} = 30\,\mathrm{m/s}$ a dosazením získáme

$$l = (v_1 + v_2) \cdot t = (15 + 30) \cdot 5\mathrm{m} = 225\,\mathrm{m}\,.$$

Nákladní vlak měl délku $225\,\mathrm{m}$.

Úloha 46 ... věštkyně

Myslím si číslo. Je větší než 14 a menší než 30. Kdybyste znali jeho ciferný součin, nevěděli byste, které číslo si myslím. Kdybych vám řekl, jestli je liché nebo sudé, tak už byste věděli. Jaké číslo si myslím?

To, že byste při znalosti ciferného součinu číslo nevěděli, může znamenat jen jedno – existuje více čísel se stejným ciferným součinem. Když si vypíšeme ciferné součiny čísel 15 až 29, budou to: 5, 6, 7, 8, 9, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 a 18. Opakují se jen čísla 6, a 8, ciferný součin čísla, co si myslím, je tedy 6 nebo 8. Proto si myslím 16, 18, 23 nebo 24. Teď víte, že znalost sudosti/lichosti čísla vám jednoznačně číslo určí – musí být tedy liché, protože to je tam jen jedno, a to 23.

Úloha 47 ... koupání orgů

Když se organizátoři tradičně koupali v bazénu na konci soustředění, všimli si kamenu s hustotou $5\,000\,\mathrm{kg/m^3}$ *a s hmotností* $5\,\mathrm{kg}$ *ležícího na dně. Jakou nejmenší silou ho ve vodě zvednou?*

Abychom kámen zvedli, musíme na něj působit alespoň takovou silou, aby byla výslednice sil působících na kámen nulová. Proveďme si silový rozbor.

Jednou ze sil je tíhová síla. Ta bude působit na kámen pod vodou stejně jako na každé jiné těleso na povrchu Země. Její velikost známe, je to $F_G = m \cdot g$. Síla směřuje svisle dolů ke dnu.

Dále nás zajímá vztlaková síla, neboť se kámen nalézá v bazénu plném vody. Vztlaková síla působí na těleso vždy směrem vzhůru a její velikost vypočítáme jako $F_{\mathrm{vz}} = \varrho_{\mathrm{v}} V_{\mathrm{t}} g$, kde $\varrho_{\mathrm{v}} = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$ je hustota vody, V_{t} je objem ponořeného tělesa (tedy kamene).

Na kámen působí ještě jedna síla, a to reakce podložky, která má vždy takovou velikost a směr, aby byla výslednice sil nulová, a tedy aby se kámen neprobořil do Země. Ta nás však momentálně nezajímá, jelikož ihned zanikne, když se kámen přestane dotýkat podložky, což znamená, že během zvedání kamene nepůsobí.

Nyní naše úvahy zapíšeme do rovnic. V prvé řadě si uvědomíme, jak se sčítají síly. Tíhová má opačný směr než vztlaková, a jelikož kámen podle zadání zůstává ponořený ve vodě, má vztlaková menší velikost. Jestliže tedy chceme zvedat těleso vzhůru, musíme působit směrem nahoru takovou silou, abychom vztlakovou doplnili a vyrovnali s tíhovou. Hledanou sílu označíme F a sestavíme rovnice

$$F + F_{\mathrm{vz}} - F_G = 0\,,$$
$$F = mg - V_t \varrho_v g\,.$$

Objem vyjádříme za pomoci hustoty materiálu

$$F = mg\left(1 - \frac{\varrho_{\mathrm{v}}}{\varrho_{\mathrm{t}}}\right) = 40\,\mathrm{N}\,.$$

Na kámen budeme muset působit silou minimálně 40 N.

Úloha 48 ... číselná tabulka

Mějme tabulku 5×5. *Chceme ji vyplnit čísly 0, 1 a 2 tak, že tam jsou nejvýše dvě nuly, a taky tak, že žádná dvě políčka označená 1 nebo 2 nesousedí stranou. Kolika způsoby to umíme udělat?*

Pokud nedáme do tabulky žádnou nulu a do levého horního rohu dáme 1, všude jinde je to bude jednoznačné – vedle budou 2, pak zase 1 atd. – jako na šachovnici. Podobně, pokud doleva nahoru umístíme 2. Pro tabulku bez nul máme tedy dvě možnosti. Chceme-li umístit jednu nulu, máme pro ni 25 možností, a na zbytek tabulky zase jen dvě – někam dáme jedničku či dvojku a zbytek je jednoznačně určen. To je dohromady $25 \cdot 2 = 50$ možností. Dvě nuly můžeme umístit celkem $25 \cdot 24/2 = 300$ způsoby. Dělíme dvěma, protože nuly jsou identické, takže umístit první nulu na pozici [1,1] a druhou na [2,2] je stejné jako umístit je v opačném pořadí – prostým vynásobením bychom dostali všechny konfigurace dvakrát. Kdybychom podobně jako v případu s jednou nulou uvažovali, že umístěním jedné dvojky nebo jedničky dostaneme jednoznačné rozmístění, získali bychom celkem $300 \cdot 2 = 600$ nových možností. Budou-li však obě nuly sousedit s jedním rohovým políčkem, pak můžeme na toto políčko umístit jedničku nebo dvojku, aniž bychom tím nějak omezili možnost rozmístění zbylých čísel. Takže pokud budou obě nuly u rohu, získáme nikoli dvě, ale čtyři rozmístění, tedy o dvě více. Tabulka má samozřejmě čtyři rohy, takže máme $4 \cdot 2 = 8$ rozmístění navíc. Celkem existuje $2 + 50 + 300 + 8 = 660$ způsobů, jak tabulku vyplnit.

Úloha 49 ... děravá vana

Trubkou teče voda s průtokem $0{,}001\,\mathrm{m^3/s}$ *do vany s objemem* $1\,000\,\ell$*. Kolik vody vyteče z vany ven, když necháme vodu téct jednu hodinu?*

Za 3 600 sekund proteče trubkou $3{,}6\,\mathrm{m^3}$ vody. Protože má ale naše vana objem jen $1000\,\ell$, to je $1\,\mathrm{m^3}$, tak z ní vyteče $3{,}6\,\mathrm{m^3} - 1\,\mathrm{m^3} = 2{,}6\,\mathrm{m^3}$ vody.

Úloha 50 ... dlouhé číslo

Petr napsal hodně číslic za sebou, a to tak, že pro každé dvojciferné číslo uměl najít dvě po sobě napsané číslice, které ho tvoří (takže když napsal 4, 2, 4 a 7, uměl to pro 42, 24 a 47). Kolik nejméně číslic mohl napsat?

V intervalu 10 až 99 je celkem 90 dvojciferných čísel, což nám dává 180 číslic. V ideálním případě bude v Petrově zápisu přináležet každá číslice dvěma číslům (jednomu jako jednotka, druhému jako desítka). Výjimku tvoří první a poslední číslice, z nichž každá náleží pouze jedinému dvojcifernému číslu. Tato úvaha nám dává minimální počet číslic $180/2 + 1 = 91$. Dále však ještě víme, že se v zápisu musí vyskytovat devět nul (pro každou celou desítku). Nulou však nemůže žádné dvojciferné číslo začínat. Umístíme-li jednu nulu na poslední pozici, zbývá nám stále osm nul, které musí být uvnitř řady a z nichž každá náleží pouze jedinému číslu. Náš dolní odhad se tedy zvedl na $91 + 8 = 99$. Zbývá pouze ukázat, že taková řada skutečně existuje. Existenční důkaz provedeme velmi snadno, a sice příkladem takové řady, jímž je

$$
\begin{gathered}
11213141516171819 10|2232425262728292 0|33435363738393 0|4454647484940\\
55657585950|667686960|7787970|88980|990\,.
\end{gathered}
$$

Svislé čáry v řadě číslic naznačují, jaký postup byl k její výstavbě použit.

Úloha 51 ... šíření světla v novém vesmíru

Na počátku byla tma, naštěstí se však potom uprostřed vesmíru zapnula pouliční lampa, která svítila rovnoměrně do všech směrů a osvítila vesmír. Jaký objem vesmíru byl osvícený po $1\,\mathrm{s}$*? Rychlost světla je* $300\,000\,\mathrm{km/s}$*. Počítejte se zaokrouhlenou hodnotou* $\pi \doteq 3$*.*

Nejdřív je potřeba se zamyslet, jaký tvar takové světlo vyrobí. Když svítí do všech směrů stejně, tak bude vždycky vypadat jako koule. Poloměr této koule je určený vzdáleností, jakou dokáže světlo urazit za čas, po který svítí, v tomto případě $r = 1\,\mathrm{s} \cdot 300\,000\,\mathrm{km/s}$. Vzoreček pro objem koule je $V = 4/3\pi r^3$, kde r je poloměr koule, což je právě výše vypočtená vzdálenost. Objem vesmíru spočítáme prostým dosazením do tohoto vzorečku, dostaneme

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot 300\,000\,\mathrm{km}^3 = 4 \cdot 300\,000^3\,\mathrm{km}^3\,.$$

Abychom velkou mocninu spočítali, rozepíšeme si ji nejprve jako součin $(3 \cdot 100\,000)^3 = 3^3 \cdot 100\,000^3$, v němž jsme použili komutativitu násobení. Prvního činitele dopočteme snadno, $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$. V druhém činiteli využijeme skutečnosti, že při násobení se „sčítají nuly“. Výsledkem bude jednička a patnáct nul neboli jeden trilión, číslem $100\,000^3 = 1\,000\,000\,000\,000\,000$. Takže

$$V = 4 \cdot 3^3 \cdot 100\,000^3\,\mathrm{km}^3 = 108\,000\,000\,000\,000\,000\,\mathrm{km}^3 = 1{,}08 \cdot 10^{17}\,\mathrm{km}^3\,.$$

Objem osvíceného vesmíru je $108\,000\,000\,000\,000\,000\,\mathrm{km}^3$.

Úloha 52 ... vaření pudinku

Jerguš se rozhodl, že si uvaří pudink. Protože však není žádný kuchař, zavolal Tince, aby mu pomohla. Ta však nenechala nic náhodě a po vlastních zkušenostech mu poradila, aby si šel koupit do obchodu práškový pudink a připravil ho podle receptu, který je na zadní straně obalu. Jerguš tedy nejprve nalil do hrnce $0{,}5\,\ell$ *vody, potom přidal* $200\,\mathrm{g}$ *pudinkového prášku o objemu* $300\,\mathrm{m}\ell$*, následně pudink ideálně zamíchal a vařil ho, dokud se z něj nevypařilo* $325\,\mathrm{m}\ell$ *vody. Když byl pudink hotový, Jerguš do něj přidal* $50\,\mathrm{g}$ *vanilkového cukru o objemu* $25\,\mathrm{m}\ell$ *a zvesela se pustil do jídla. Jak hustý byl pudink, který Jerguš připravil? Předpokládejte, že hustota vody je* $1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$ *a že při smísení dvou různých látek nedochází ke kontrakci objemu, tj. objemy se jednoduše sčítají.*

Na spočítání hustoty potřebujeme spočítat celkovou hmotnost a objem finálního produktu. To můžeme udělat postupně tak, že budeme pozorně sledovat všechny změny, které se staly s pudinkem, a žádnou nezapomeneme. Hmotnosti vody si pro přehlednost předpočítáme.

$$\begin{aligned} \varrho_{\mathrm{voda}} &= 1000\,\mathrm{kg/m^3} = 1\,\mathrm{g/cm^3} = 1\,\mathrm{g/ml} = 1\,000\,\mathrm{g/l}\,,\\ m_1 &= 0{,}5\,\mathrm{l} \cdot 1\,000\,\mathrm{g/l} = 500\,\mathrm{g}\,,\\ m_2 &= 325\,\mathrm{ml} \cdot 1\,\mathrm{g/ml} = 325\,\mathrm{g}\,. \end{aligned}$$

Nejdříve máme $500\,\mathrm{m}\ell$ vody o hmotnosti $500\,\mathrm{g}$, potom přidáme $200\,\mathrm{g}$ pudinkového prášku s objemem $300\,\mathrm{m}\ell$. Ze $700\,\mathrm{g}$ a $800\,\mathrm{m}\ell$, které zatím máme, se následně vypařilo $325\,\mathrm{m}\ell$ vody, takže $325\,\mathrm{g}$. Po odečtení má pudink $375\,\mathrm{g}$ a $475\,\mathrm{m}\ell$. Jako poslední jsme přidali $50\,\mathrm{g}$ cukru s objemem $25\,\mathrm{m}\ell$, takže pudink má nakonec $425\,\mathrm{g}$ a $500\,\mathrm{m}\ell$. Výsledná hustota je tedy $425\,\mathrm{g}/500\,\mathrm{m}\ell = 0{,}85\,\mathrm{g/m}\ell$.

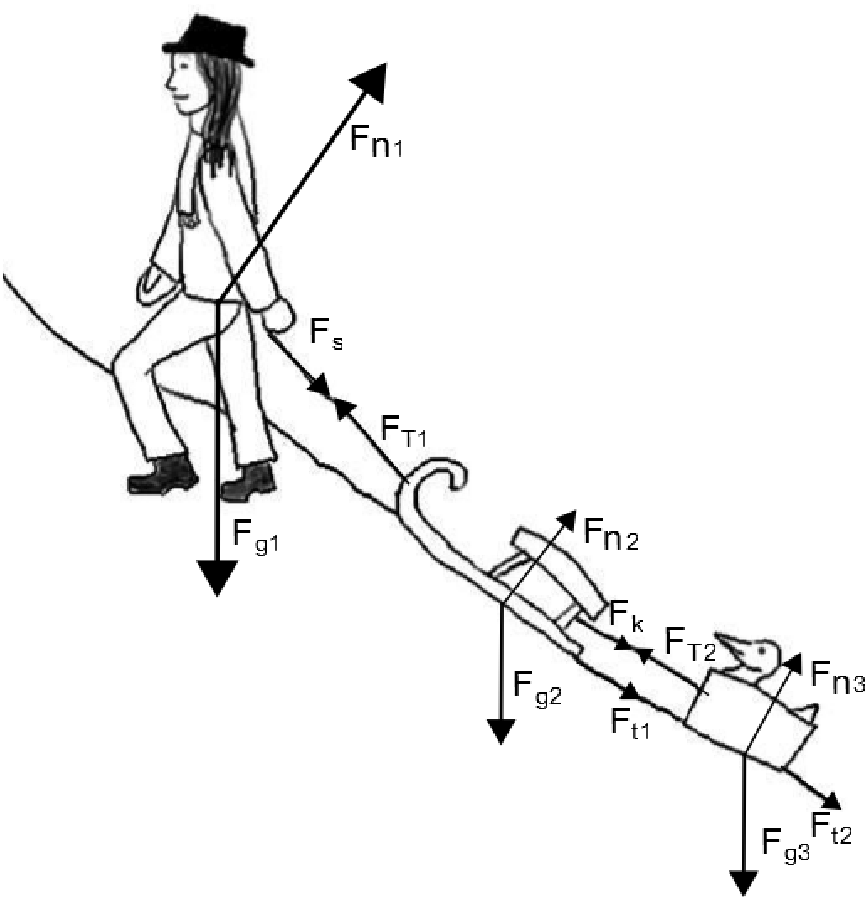
Úloha 53 ... tatranka do Tater

Tatranka má energetickou hodnotu $1\,000\,\mathrm{kJ}$*. Kolik tatranek musí sníst horolezec s hmotností* $80\,\mathrm{kg}$*, aby měl dost energie na to, aby vylezl na vrchol ve výšce* $1000\,\mathrm{m\,n.\,m.}$*? Předpokládejte, že sedlo je ve výšce* $500\,\mathrm{m\,n.\,m.}$

V příkladě samozřejmě počítáme s dokonalým horolezcem, který všechnu energii z tatranek použije jen na posunutí svého těžiště na vrchol hory. Tím získá potenciální energii $E = mgh$, kde m je jeho hmotnost, g je tíhové zrychlení a výška h je daná rozdílem výšky na začátku a na konci. Energie je potom $E = (80 \cdot 10 \cdot (1000 - 500))\,\mathrm{J} = 400\,\mathrm{kJ}$. Zbývá zjistit, kolika tatrankám odpovídá tato energie – vydělíme potřebnou energii na vyšplhání hory energií jedné tatranky $400\,\mathrm{kJ}/1\,000\,\mathrm{kJ} = 0{,}4$. Horolezci tedy stačí 0,4 tatranky.

Úloha 54 ... vánoční pohody Čajky

Čajka šla v zimě sáňkovat, když tu náhle u jejího okna přistála kachnička, která se jí zeptala, zda se nemůže přidat. Čajka samozřejmě neodolala a kachničku vzala s sebou. A tak Čajka přivázala ideálním lanem dřevěnou krabici ke svým sáňkám, usadila do ní kachničku a začala sáňky táhnout nahoru do kopce. Nakreslete do obrázku vektory veškerých sil působících mezi Čajkou, kachničkou, sáňkami a sněhem.



Obr. 6: Nákres sil

Úloha 55 ... hopík

Máme krásný gumový míček (hopík) o hmotnosti m, který volně pustíme z počáteční výšky h. Při každém odrazu míček ztratí 10% své aktuální kinetické energie. Po kolika odrazech už míček nebude schopen vyskočit ani do výšky $h/2$?

Na začátku má míček 100% potenciální energie. Během pádu se všechna tato energie přemění na kinetickou. Míček dopadne na zem a ztratí 10% kinetické energie, ta se přemění na potenciální energii v nejvyšším místě, kam pak míček doletí – ale bude to už jen 90% původní, takže se míček dostane jen do 90% původní výšky. Tento postup budeme opakovat tak dlouho, dokud se celková energie nedostane pod 50%. Po druhém pádu dosáhne 81% původní výšky, po třetím to je 73%, po čtvrtém 66%, po pátém 59%, po šestém 53%, po sedmém 48%. To už je méně než polovina, takže odpověď je, že míček není schopen vyskočit do poloviny původní výšky po sedmi odrazech.

FYKOS – Výfuk
UK v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta
Ústav teoretické fyziky
V Holešovičkách 2
180 00 Praha 8

www: `http://vyfuk.fykos.cz`
e-mail: `vyfuk@fykos.cz`

Výfuk je také na Facebooku
http://www.facebook.com/ksvyfuk

Na přípravě *MFnáboje* (na Slovensku *Náboje Junior*) se podílely následující organizace:

Koordinátorem na české straně je korespondenční seminář pro základní školy – *Výpočty fyzikálních úkolů (Výfuk)*, součást *Fyzikálního korespondenčního semináře (FYKOS)* Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.

Koordinátorem na slovenské straně a dodavatel původních námětů úloh je *občanské sdružení Trojsten.*

17 organizačních míst – základních, středních a vysokých škol – v ČR a SR:
Brno – *Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně*, Praha – *Gymnázium Christiana Dopplera*, Ostrava – *Gymnázium Olgy Havlové, Ostrava-Poruba*, Karlovy Vary – *První české gymnázium v Karlových Varech a Základní škola Poštovní*, Bílovec – *Koperníkův korespondenční seminář – Gymnázium Mikuláše Koperníka*, České Budějovice – *Gymnázium Jírovcova*, Hradec Králové – *Přírodovědecká fakulta, Univerzita Hradec Králové*, Bratislava – *veľká sála UPC, VM Ľ. Štúra, Staré Grunty 36*, Nitra – *Gymnázium, Párovská 1*, Dolný Kubín – *Základná škola Janka Matúšku, Kohútov sad 1752/4*, Poprad – *Gymnázium, Kukučínova 4239/1*, Žilina – *Gymnázium, Varšavská cesta 1*, Lučenec – *Gymnázium Boženy Slančíkovej – Timravy, Haličská cesta 9*, Banská Bystrica – *Gymnázium Andreja Sládkoviča, Komenského 18*, Michalovce – *Gymnázium Pavla Horova, Masarykova 1*, Púchov – *Gymnázium, Ul. 1. mája 905*, Partizánske – *Gymnázium, Komenského 2/1074.*