NÁBOJ junior

3. ročník

2014/15

Vzorová řešení

výfuk

TROJSTEN

Milí příznivci matematiky a fyziky,

do rukou se vám dostala brožurka třetího ročníku soutěže Náboj Junior, ve které naleznete zadání a vzorová řešení 42 úloh této soutěže. Náboj Junior je týmová soutěž v řešení matematických a fyzikálních problémů určena pro žáky druhého stupně základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií. Letos Náboj Junior probíhal současně na deseti místech České republiky a na čtrnácti místech Slovenska.

Veškeré informace o průběhu soutěže, včetně mezinárodních výsledků, jsou k nalezení na stránce `junior.naboj.org`. Pokud vás tato soutěž zaujala, jistě budete potěšeni zprávou, že v příštím roce proběhne další ročník.

Na organizaci soutěže se podíleli organizátoři korespondenčního semináře Výfuk, který zastřešuje Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy v Praze a na Slovensku občanské sdružení Trojsten.

Přejeme vám příjemné rozjímání nad příklady,

Organizátoři
`junior@vyfuk.mff.cuni.cz`

Řešení úloh III. ročníku Náboje Junior

Úloha 1 ... Meziprostorová

Paťo se náhodou dostal do paralelního vesmíru. Kolik sekund tam trvá jeden rok, pokud má 6 měsíců, měsíc má 8 týdnů, týden má 5 dnů, den má 30 hodin, hodina má 16 minut a minuta 45 sekund?

Jednoduše převedeme rok na 6 měsíců, 6 měsíců na $6 \cdot 8$ týdnů, 48 týdnů na $5 \cdot 6 \cdot 8$ dnů a tak dále. Nakonec dostaneme, že 1 rok má

$$(6 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 30 \cdot 16 \cdot 45)\,\mathrm{s} = 5\,184\,000\,\mathrm{s}\,.$$

Rok v paralelním vesmíru trvá $5\,184\,000\,\mathrm{s}$.

Pavla Trembulaková

Úloha 2 ... Jdeme na ping-pong!

Při zuřivém zápase jsme zničili pingpongový míček, a proto jsme šli koupit nový. V obchodě nám prodavačka řekla, že pálka je o 1 000 korun dražší než míček, a navíc, že míček a pálka stojí celkem 1 100 korun. Poněvadž chceme jen míček, kolik musíme zaplatit?

Označme si cenu míčku jako x korun. Platí, že pálka stojí $(x + 1\,000)$ korun. Set pálky a míčku za 1 100 korun tedy lze zapsat rovnicí $1\,100 = x + (x + 1\,000)$. Vyřešením této rovnice dostaneme $x = 50$. Míček stojí 50 korun.

Pavla Trembulaková

Úloha 3 ... Velké D

Mějme dvě čísla: A a B. Číslo A získáme tak, že seřadíme následující stavy vody o stejné hmotnosti podle objemu (za normálního tlaku) od největšího po nejmenší:

1 ... vodní pára,
2 ... voda při teplotě 80 °C,
3 ... led.

Číslo B dostaneme seřazením těchto délkových jednotek od nejmenší po největší:

4 ... míle,
5 ... palec,
6 ... světelný rok.

Určete největší společný dělitel čísel A a B.

Seřazením získáme čísla $A = 132$ a $B = 546$. Čísla rozložíme na součin prvočísel:

$$132 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11\,,$$
$$546 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13\,.$$

Součin společných prvočinitelů dává největší společný dělitel $D(132, 546) = 2 \cdot 3 = 6$.

Lukáš Fusek

Úloha 4 ... Cyklisté

Kuba s Honzou trénují na kolech na stejné trase. Kuba jezdí první kilometr, který je do kopce, obvykle rychlostí $10\,\mathrm{km/h}$*, zatímco Honza ho zvládá rychlostí* $12\,\mathrm{km/h}$*. Druhý kilometr je už pro oba snazší, Kuba ho jezdí rychlostí* $40\,\mathrm{km/h}$ *a Honza rychlostí* $24\,\mathrm{km/h}$*. Který z chlapců má vyšší průměrnou rychlost na celé trase?*

Průměrná rychlost je podíl celkové dráhy, tedy $2\,\mathrm{km}$ (která je pro oba chlapce stejná) a celkového času. Rychlejší cyklista je tedy ten, který ujede tréninkovou trasu za kratší čas. Ten pro Kubu je:

$$t_\mathrm{K} = \frac{1\,\mathrm{km}}{10\,\mathrm{km/h}} + \frac{1\,\mathrm{km}}{40\,\mathrm{km/h}} = \frac{1}{8}\,\mathrm{h} = 7{,}5\,\mathrm{min}\,.$$

Pro Honzu je zase

$$t_\mathrm{H} = \frac{1\,\mathrm{km}}{12\,\mathrm{km/h}} + \frac{1\,\mathrm{km}}{24\,\mathrm{km/h}} = \frac{3}{24}\,\mathrm{h} = 7{,}5\,\mathrm{min}\,.$$

Poněvadž jsou časy obou chlapců stejné, jsou stejné i jejich průměrné rychlosti.

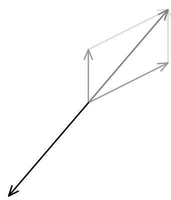
Simona Gabrielová

Úloha 5 ... Rýsujeme

Dorýsujte do obrázku (k dispozici máte 4 předlohy) třetí sílu takovou, že výslednice těchto tří sil bude nulová.

Aby se síly vyrovnaly (jejich výslednice bude nulová), musíme dorýsovat sílu, která bude mít stejnou velikost jako výslednice zadaných sil, ale opačný směr, viz obrázek 1. Tuto výslednici určíme tak, že tyto síly doplníme na rovnoběžník a narýsujeme úhlopříčku vycházející ze společného působiště. Výslednou sílu dorýsujeme jako sílu stejné velikosti, ale opačného směru.

David Němec

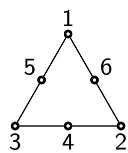


Obr. 1: Skládání sil.

Úloha 6 ... Trojúhelníková matematika

Doplňte do vrcholů trojúhelníku a na středy jeho stran čísla 1 *až* 6 *tak, že součet čísel na každé straně bude vždy* 9*. Každé číslo použijte jenom jednou.*

Víme, že každé číslo musíme použít právě jednou. Takže na jedné ze stran se určitě musí vyskytovat číslo 6. Čísla, která k ní přiřadíme, musí mít součet $9 - 6 = 3$, což splňují pouze 1 a 2. Zároveň je zřejmé, že šestka musí být ve středu zvolené strany, protože v jiném případě by byla součástí další strany, kde bychom už neměli k dispozici čísla 1 a 2.



Nyní máme ve dvou vrcholech čísla 1 a 2. U dvojky nemůže být číslo 5, protože bychom ho museli doplnit další dvojkou. Z podobného důvodu nemůže být u jedničky číslo 4. Z toho již plyne, že v posledním vrcholu musí být trojka. Řešením je tedy po obvodu $1, 6, 2, 4, 3, 5$.

Jakub Sláma

Úloha 7 ... Těžcí manželé

Manželé Novákovi si na Nový rok řekli, že nejsou zrovna hubení a mohli by trochu shodit. Jejich cílem bylo zhubnout alespoň 10 % své původní hmotnosti. Paní Zita Nováková měla na Nový rok hmotnost $m_Z = 80\,\mathrm{kg}$ a její manžel Jakub Novák $m_J = 120\,\mathrm{kg}$. Ke konci roku se opět zvážili a zjistili, že paní Nováková sice zhubla o 15 %, ale její manžel jen o 5 %. O kolik kilogramů více/méně zhubli oba dohromady oproti jejich novoročnímu slibu?

Určíme nejprve, o kolik měli zhubnout podle předsevzetí. Vzhledem k tomu, že oba chtěli zhubnout o stejné procento, potřebujeme vypočítat, kolik je 10 % z $m_Z + m_J = 200\,\mathrm{kg}$. To je $200\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}10 = 20\,\mathrm{kg}$.

Potom spočítáme, kolik každý z manželů doopravdy zhubl. Paní Zita zhubla $m_Z \cdot 15\,\% = 80\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}15 = 12\,\mathrm{kg}$ a pan Jakub $m_J \cdot 5\,\% = 120\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}05 = 6\,\mathrm{kg}$. Dohromady tedy zhubli $(12 + 6)\,\mathrm{kg} = 18\,\mathrm{kg}$, což je o 2 kg méně, než si předsevzali.

Karel Kolář

Úloha 8 ... Běh alejí

Lenka si šla jako každé ráno zaběhat, až se dostala do aleje rovnoměrně vysázených stromů. Od prvního stromu k devátému doběhla za osmnáct sekund. Za jak dlouho s takovou rychlostí doběhne od prvního stromu k šedesátému pátému?

Mezi devíti stromy je mezi stromy 8 stejných mezer, proto Lenčin čas vydělíme 8 a zjistíme, jaký čas trvá Lence přeběhnout jednu mezeru. Mezi 65-ti stromy je mezer 64, proto tímto číslem násobíme čas připadající na délku jedné mezery:

$$\frac{18\,\mathrm{s}}{8} \cdot 64 = (18 \cdot 8)\,\mathrm{s} = 144\,\mathrm{s}\,.$$

Lenka doběhne od prvního stromu k šedesátému pátému za 144 s.

Simona Gabrielová

Úloha 9 ... Napouštění vany

Petrova vana má dva kohoutky, jeden na studenou a jeden na úplně horkou vodou. Vana se napustí studenou vodou za 4 minuty, ale horkou vodou až za 12 minut. Petr odpozoroval, že nejlepší teplotu na horkou koupel má vana tehdy, když nechá oba kohoutky – s horkou i studenou vodou – úplně otevřené. Za jak dlouho se Petrova vana napustí v tomto případě?

Ze zadání vyplývá, že za minutu se napustí studenou vodou 1/4 vany (poněvadž za 4 minuty se napustí celá vana) a horkou vodou 1/12 vany. Celkem se za minutu napustí $1/4 + 1/12 = 1/3$ vany. Celá vana se tedy napustí za 3 min.

Patrik Švančara

Úloha 10 ... Jedničky a nuly

Najděte nejmenší číslo zapsané jen číslicemi 0 a 1, *které je beze zbytku dělitelné součinem tří nejmenších prvočísel.*

Tři nejmenší prvočísla jsou 2, 3 a 5. Jsou nesoudělná, hledané číslo proto bude muset být dělitelné jejich součinem – hledáme tedy násobek 30. To je to samé, jako bychom hledali násobek 3 a na konec dopsali nulu. Kritériem pro dělitelnost trojkou je podmínka, že ciferný součet čísla musí být dělitelný třemi. Pomocí zadaných číslic dosáhneme nejmenšího čísla pomocí tří jedniček – 111.

Hledané číslo je tedy 1110.

Dominika Kalasová

Úloha 11 ... Sedačka

Na rohovou sedačku tvaru písmene „L“ položíme šest shodných čtvercových polštářů, a to tak, že na každém konci sedačky je jeden a též v rohu je jeden. Všech šest polštářů je umístěno těsně vedle sebe. Jaké poměry délek stran může mít sedačka?

Máme k dispozici šest polštářů, takže při jedné straně mohou být dva a při druhé straně jich tím pádem bude pět. Rohový polštář totiž musíme započítat k oběma stranám zároveň. Tím dostáváme poměr 2 : 5. Nebo budou při první straně tři a při druhé straně čtyři. To nám dá poměr 3 : 4. Pokud by u první strany byly polštáře čtyři, tak již jde o situaci vyřešenou výše.

Možné poměry jsou tedy dva 3 : 4 a 2 : 5.

Lukáš Ledvina

Úloha 12 ... Dožeňte Asterixe!

Z Břeclavi vyjíždí nákladní auto s obrázkem Asterixe stálou rychlostí 60 km/h. *O půl hodiny později za ním vyjíždí ve stejném směru rodinka s Fandou v autě, které řídí Fandův tatínek, rychlostí* 80 km/h. *V jaké vzdálenosti od Břeclavi začne Fanda jásat, že právě předjíždí Asterixe?*

Za první půlhodinu ujelo auto s Asterixem dráhu $60\,\mathrm{km/h} \cdot 0{,}5\,\mathrm{h} = 30\,\mathrm{km}$. Tento náskok se po výjezdu Fandovy rodiny začne postupně zmenšovat, protože Fanda se k nákladnímu autu přibližuje rychlostí $80\,\mathrm{km/h} - 60\,\mathrm{km/h} = 20\,\mathrm{km/h}$. Tedy k setkání obou aut dojde za čas

$$\frac{30\,\mathrm{km}}{20\,\mathrm{km/h}} = \frac{3}{2}\,\mathrm{h} = 1{,}5\,\mathrm{h}\,,$$

a to po odjezdu Fandy z Břeclavi. Za tento čas tedy Fanda ujede z Břeclavi vzdálenost

$$80\,\mathrm{km/h} \cdot 1{,}5\,\mathrm{h} = 120\,\mathrm{km}\,.$$

Auta se setkají ve vzdálenosti 120 km od Břeclavi.

Simona Gabrielová

Úloha 13 ... Stavebnice

Arnošt má rád stavebnice. Posledně vzal svou nejnovější stavebnici sestávající ze 192 dřevěných kostek a postavil z nich mrakodrap, tedy kvádr s podstavou 4×6 kostek a výškou 8 kostek. Nelíbila se mu však barva jeho mrakodrapu, tak vzal fix a všechny stěny tohoto kvádru (kromě dolní podstavy) nabarvil na modro. Kolik stěn jednotlivých kostiček zůstane neobarvených?

Mohli bychom počítat přímo neobarvené stěny, ale mnohem jednodušší bude odečíst obarvené od celkového počtu. Kostičky mají celkem $192 \cdot 6 = 1\,152$ stěn a obarvených je

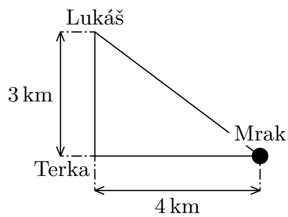
$$2 \cdot (4 \cdot 8 + 6 \cdot 8) + 4 \cdot 6 = 184\,.$$

V posledním součinu nenásobíme dvěma, protože podstava mrakodrapu není obarvená. Neobarvených stěn je potom $1\,152 - 184 = 968$.

Miroslav Hanzelka

Úloha 14 ... Hrom aby do toho praštil

Jaká je rychlost zvuku, jestliže Lukáš slyšel hrom o 3 s později, než Terka, když stojí vůči bouřce jako na obrázku?



V pravoúhlém trojúhelníku na obrázku známe délku dvou odvěsen a můžeme tedy použít Pythagorovu větu pro dopočítání přepony, jejíž délka představuje vzdálenost Lukáše od blesku:

$$s_\mathrm{L} = \sqrt{(4\,\mathrm{km})^2 + (3\,\mathrm{km})^2} = \sqrt{16\,\mathrm{km}^2 + 9\,\mathrm{km}^2} = 5\,\mathrm{km}\,.$$

Nyní odečteme vzdálenost Terky od blesku od vzdálenosti Lukáše od blesku, což je $5\,\mathrm{km} - 4\,\mathrm{km} = 1\,\mathrm{km} = 1\,000\,\mathrm{m}$. Jelikož ze zadání víme, že Lukáš slyšel hrom o 3 sekundy později, rychlost zvuku vypočítáme tak, že vydělíme rozdíl drah odpovídajícím rozdílem časů:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{1000\,\mathrm{m}}{3\,\mathrm{s}} \doteq 333\,\mathrm{m/s}\,.$$

Rychlost zvuku je 333 m/s.

David Němec

Úloha 15 ... Dobře fungující systém

Čtyři dělníci postupně přehazují lopatou písek z jámy na hromadu, z hromady do kolečka, z kolečka do kbelíku a z kbelíku do míchačky. Při prvním úkonu se během přehazování vysype 20 % písku, při dalším opět 20 %, při třetím 50 % a do míchačky se poslední dělník trefí pouze se 40 % úspěšností. Kolik procent písku z jámy tato čtveřice přepraví až do míchačky?

Z jámy se na hromadu dostane dle zadání pouze 80 % = 8/10 písku. Z tohoto množství se do kolečka dostane zase jenom 8/10, ze zbytku do kbelíku pouze 50 % = 5/10 a do míchačky 40 % = 4/10 zbylého množství.

Celkově se tedy z jámy do míchačky dostane

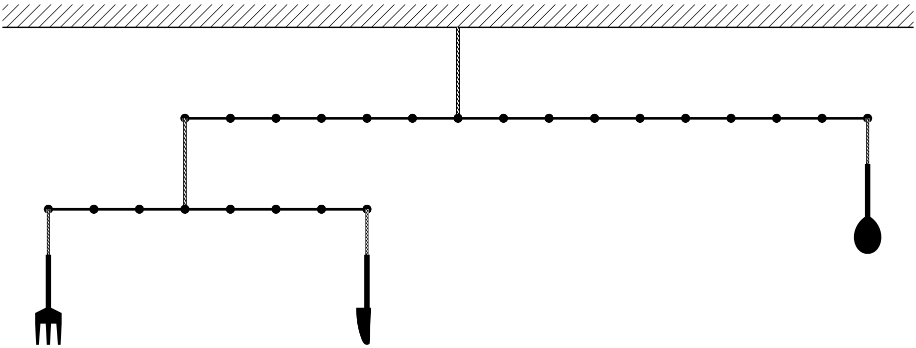
$$\frac{8}{10}\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{10}=\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=\frac{32}{250}=\frac{16}{125}=12{,}8\,\%\,.$$

Do míchačky čtveřice dělníků přepraví 12,8 % dostupného písku.

Miroslav Hanzelka

Úloha 16 ... Těžký příbor

Kolik váží celý příbor, jestliže vidlička váží 60 g? Hmotnosti pák a kloubů zanedbejte.



Jedná se o soustavu dvojzvratných pák, pro něž platí, že v rovnováze je velikost momentů tíhových sil závaží stejná:

$$m_1r_1=m_2r_2 \quad\Rightarrow\quad \frac{m_1}{m_2}=\frac{r_2}{r_1}\,.$$

Nejprve spočítáme hmotnost nože m_n. Rameno u vidličky má délku 3, rameno u nože má délku 4 a hmotnost vidličky m_v je 60 g. Dosadíme-li do výše uvedeného vzorečku, získáme

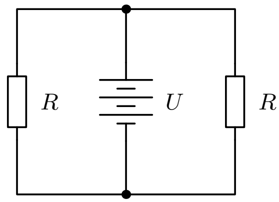
$$\frac{m_\mathrm{n}}{m_\mathrm{v}}=\frac{3}{4} \quad\Rightarrow\quad m_\mathrm{n}=60\,\mathrm{g}\cdot\frac{3}{4}=45\,\mathrm{g}\,.$$

Součet hmotností závaží na levé páce je $m_\mathrm{n}+m_\mathrm{v}=105\,\mathrm{g}$. Levé rameno horní páky má délku 6, rameno u lžíce má délku 9. Dosadíme-li opět do vzorce výše, zjistíme, že lžíce váží 70 g. Nyní stačí sečíst hmotnost celého příboru a dostaneme výsledek $m=175\,\mathrm{g}$.

Jakub Sláma

Úloha 17 ... Komplikovaný obvod

Na obrázku vidíte elektrický obvod. Skládá se ze dvou rezistorů, z nichž každý má elektrický odpor $R = 3\,\Omega$ a jsou připojené ke zdroji stejnosměrného napětí o velikosti $U = 2\,\mathrm{V}$. Jaký proud I prochází zdrojem napětí?



Pokud se na obvod podíváme pořádně, zjistíme, že se jedná pouze o paralelní zapojení dvou rezistorů. Celkový odpor obvodu pak bude

$$\frac{1}{R_\mathrm{c}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R}, \quad \Rightarrow \quad R_\mathrm{c} = \frac{R}{2} = 1{,}5\,\Omega\,.$$

Proud si vyjádříme ze vzorečku $I = U/R_\mathrm{c}$, dosadíme a dostáváme výsledek

$$I = \frac{U}{R_\mathrm{c}} = \frac{2U}{R} = \frac{4}{3}\,\mathrm{A} \doteq 1{,}3\,\mathrm{A}\,.$$

Proud procházející zdrojem je 1,3 A.

Karel Kolář

Úloha 18 ... Čokoládová hvězda

Ve velmi vzdálené planetární soustavě létají okolo hvězdy Orion tři vesmírné lodě po kruhových drahách. Poloměr dráhy nejvnitřnější lodi je $r_1 = 150\,000\,\mathrm{km}$, prostřední lodi $r_2 = 200\,000\,\mathrm{km}$ a nejvzdálenější lodi $r_3 = 250\,000\,\mathrm{km}$. Všechny lodě letí díky svému pohonu na antihmotu shodnou rychlostí $v = 50\,000\,\mathrm{km/rok}$. Na začátku se všechny lodě spolu s centrální hvězdou nacházejí v jedné přímce. Kolikrát oběhne nejvzdálenější loď hvězdu Orion, než se lodě a hvězda opět setkají v jedné přímce?

Poměr poloměrů drah lodí je $3 : 4 : 5$, což je i poměr jejich oběžných dob, neboť všechny obíhají hvězdu stejnou rychlostí. Lodě a hvězda se setkají v jedné přímce po takovém počtu oběhů, který je roven nejmenšímu společnému násobku čísel 3, 4 a 5. Snadno určíme, že nejmenší násobek je číslo $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$, protože se jedná o navzájem nesoudělná čísla.

Z toho pak určíme, že nejvzdálenější loď vykoná kolem hvězdy Orion $60/5 = 12$ oběhů.

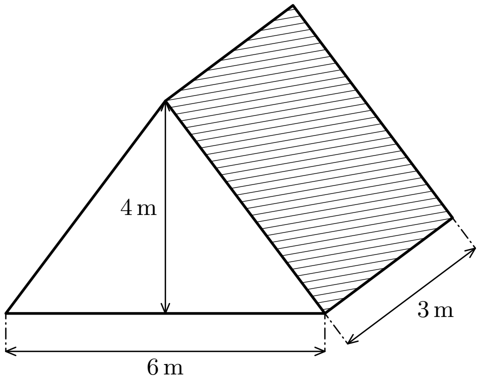
Jakub Sláma

Úloha 19 ... Horolezec amatér

Dan se rozhodl, že si postaví v podkrovním pokojíčku, který je široký $s = 6\,\mathrm{m}$ a dlouhý $l = 3\,\mathrm{m}$, na jednu ze šikmých stěn horolezeckou stěnu. Kolik metrů čtverečních má k dispozici, když řez střechou je má tvar rovnoramenného trojúhelníku a nejvyšší bod pokoje je v kolmé vzdálenosti od podlahy vzdálený $h = 4\,\mathrm{m}$?

S pomocí Pythagorovy věty si vypočteme jeden z rozměrů horolezecké stěny c: na obrázku najdeme pravoúhlý trojúhelník se stranami $s/2 = 3\,\mathrm{m}$ a $h = 4\,\mathrm{m}$. Platí tedy

$$c^2 = h^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{(4\,\mathrm{m})^2 + (3\,\mathrm{m})^2} = \sqrt{25\,\mathrm{m}^2} = 5\,\mathrm{m}\,.$$



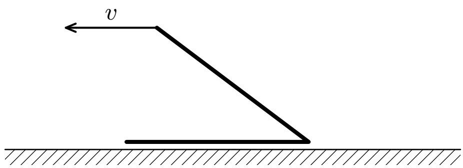
Poté již snadno dopočítáme plochu stěny (ze zadání víme, že délka pokoje je $l = 3\,\mathrm{m}$): $S = 5\,\mathrm{m} \cdot 3\,\mathrm{m} = 15\,\mathrm{m}^2$.

Dan si tedy může postavit stěnu s plochou 15 metrů čtverečních.

Pavla Trembulaková

Úloha 20 ... Lepicí páska

Na stole máme nalepeno $0{,}5\,\mathrm{m}$ *lepicí pásky. Vezmeme jeden její konec a začneme ho strhávat rychlostí* $v = 4\,\mathrm{cm/s}$ *(rychlost ruky). Za jakou dobu odlepíme celou pásku?*



V této úloze si musíme uvědomit, že se izolepa bude odlepovat rychlostí $v/2 = 2\,\mathrm{cm/s}$. Je to způsobeno tím, že se na jedné straně izolepa odlepuje, ale zároveň se ruka od místa, kde se izolepa právě odlepuje, vzdaluje stejnou rychlostí, jako se sama izolepa odlepuje. Jedná se tedy o dva pohyby, mezi které se rychlost $v = 4\,\mathrm{cm/s}$ musí rozdělit. Protože ze zadání víme, že jsme měli $50\,\mathrm{cm}$ izolepy, můžeme rovnou dopočítat čas

$$t = \frac{s}{v} = \frac{50\,\mathrm{cm}}{2\,\mathrm{cm/s}} = 25\,\mathrm{s}\,.$$

Izolepa se odlepí za 25 sekund.

Ke správnému výsledku bylo možné dojít i uvědoměním si faktu, že ruka musela za čas t ujet dráhu rovnou dvojnásobku délky izolepy.

David Němec

Úloha 21 ... Zaháníme nudu

Pavel se při hodině nudil, proto si prohledal školní tašku a objevil tam obyčejnou hrací kostku. Začal s ní házet a pokaždé si zapsal, kolik hodil. Všiml si, že jeho první hod byl dvakrát větší než druhý, který byl však třetinový vůči třetímu hodu. Počtvrté hodil tolik, kolik byl součet prvního a druhého hodu, a pátým pokusem hodil polovinu toho, co se mu povedlo třetím hodem. Nakonec všech pět hodů sečetl. Víte, jaké číslo mu vyšlo?

Označme si x hodnotu druhého hodu. Zbylé hody si zapíšeme v násobcích neznámé: první hod je dvakrát větší než druhý, tedy $2x$. Třetí hod je trojnásobek druhého, tedy $3x$. Počtvrté Pavel hodil $2x + x = 3x$ a v pátém hodu hodil $3x/2$.

Dále si pomůžeme logickou úvahou, poněvadž víme, že na kostce mohou být pouze celá čísla od 1 do 6. Aby byl výraz $3x/2$ celočíselný a menší než 6, x může být jenom 2 nebo 4. Z výrazu $3x$ ale ihned vidíme, že pro $x = 4$ dostáváme číslo větší než šest. Správná hodnota x je tedy 2.

Dopočítáme všechny hody: 4, 2, 6, 6 a 3, jejichž součet je 21.

Simona Gabrielová

Úloha 22 ... Houpačka

Bráškové Pepa a Pavel si chtějí postavit houpačku z lehkého prkna dlouhého 4,2 m *a polena. Když si vše připraví, snaží se ji dát do rovnováhy. V jaké vzdálenosti od Pepy musí poleno umístit, když Pepa váží* 24 kg*, Pavel* 18 kg*, a oba sedí na koncích prkna?*

Poměr hmotností Pepy a Pavla je 4 : 3. Aby byli na houpačce v rovnováze, musí platit tzv. momentová věta – momenty tíhových sil (součiny táhových sil, tzn. hmotností a g a vzdáleností od osy otáčení) musí být z obou stran houpačky stejné. Rovnováhy (stejných součinů) docílíme, jestliže poleno umístíme mezi Pepu a Pavla tak, aby rozdělovalo prkno na úseky v převráceném poměru hmotností (tedy 3 : 4), protože $4 \cdot 3 = 3 \cdot 4$. Poleno tedy musíme umístit do vzdálenosti tří dílků z celkových sedmi. Jeden dílek je rovný $4{,}2\,\mathrm{m}/7 = 0{,}6\,\mathrm{m}$, tedy Pepa je od polena vzdálen $3 \cdot 0{,}6\,\mathrm{m} = 1{,}8\,\mathrm{m}$.

Tomáš Kremel

Úloha 23 ... Ten nejmenší

Pro pravoúhlý rovnoběžník s celočíselnými délkami stran platí, že číselná hodnota jeho obsahu je stejná jako hodnota jeho obvodu. Nalezněte rozměry tohoto čtyřúhelníku, který vlastnost výše splňuje a jeho obsah je nejmenší.

Označíme-li délky stran rovnoběžníku a a b, pro jeho obsah platí $S = ab$ a pro obvod platí $o = 2(a + b)$. Hledáme tedy vlastně řešení rovnice

$$ab = 2\,(a + b)\ .$$

Pravá strana rovnice je vždy sudé číslo (neboť součet $a + b$ násobíme dvěma). Aby byla celá rovnice splněna, musí tedy i levá strana rovnice (ab) být sudá (dělitelná dvěma). To nastane v případě, kdy *alespoň jedno* z čísel a nebo b je sudé. Předpokládejme tedy, že a je sudé číslo. Pokud by bylo $a = 2$ (což je nejmenší sudé číslo), muselo by platit zároveň $2b = 2(2+b)$, z čehož vyplývá, že $2b = 4 + 2b$. To ale není pravda, poněvadž $0 \neq 4$. Druhé nejmenší a, které může vyhovovat zadání je $a = 4$. Pokud za a dosadíme do rovnice 4, dostáváme

$$4b = 2\,(4 + b)\ , \quad \Rightarrow \quad 4b = 8 + 2b\,, \quad \Rightarrow \quad b = 4\,.$$

Stejným způsobem dopočítáme, že pro $a = 6$ podmínku výše splňuje $b = 3$, přičemž ale hodnota obsahu tohoto útvaru je $6 \cdot 3 = 18 > 16$. Dále pro $a = 8$ a $a = 16$ nenajdeme celočíselné b, a pro $a > 16$ už čísla b nemusíme hledat, protože ab bude určitě větší než 16.

Hledaný rovnoběžník s nejmenším obsahem je tedy čtverec s rozměry 4×4.

Patrik Švančara

Úloha 24 ... Teplé mléko

Máme chuť na hrnek teplého mléka, a tak si jeden připravíme. Mléko o objemu $V = 0{,}25\,\ell$ má teplotu $t_0 = 20\,^\circ\mathrm{C}$, a chceme si ho ohřát na teplotu $t_1 = 42\,^\circ\mathrm{C}$. Po ruce máme pouze rychlovarnou konvici. Připojíme ji k elektrickému zdroji, který do konvice přivádí proud $I = 3{,}9\,\mathrm{A}$ při napětí $U = 220\,\mathrm{V}$. Jak dlouho musíme čekat, než se nám mléko ohřeje? Hustota mléka je stejná jako hustota vody, měrná tepelná kapacita je $c = 3\,900\,\mathrm{J/(kg{\cdot}^\circ C)}$. Tepelné ztráty zanedbejte.

Z kalorimetrické rovnice víme, že teplo, které musíme dodat mléku, aby se ohřálo na patřičnou teplotu, je $Q = mc\Delta t$, kde $m = \varrho V$ je hmotnost mléka a Δt je rozdíl mezi koncovou a počáteční teplotou (v našem případě $\Delta t = 22\,^\circ\mathrm{C}$). Dále víme, že práce, kterou vykoná konvice, je $W = Pt = UIt$. Tato práce se předá mléku ve formě tepla, tedy platí $Q = W$.

Úpravou dostaneme

$$t = \frac{\varrho V c \Delta t}{UI} = \frac{1\,\mathrm{kg}/\ell \cdot 0{,}25\,\ell \cdot 3\,900\,\mathrm{J(kg{\cdot}^\circ C)} \cdot 22\,^\circ\mathrm{C}}{220\,\mathrm{V} \cdot 3{,}9\,\mathrm{A}} = \frac{21\,450}{858}\,\mathrm{s} = \frac{250}{10}\,\mathrm{s} = 25\,\mathrm{s}\,.$$

Mléko se v konvici ohřeje na požadovanou teplotu za 25 s.

Jakub Sláma

Úloha 25 ... Karimatka

Kuba jede na tábor a bere si svoji karimatku, která má tvar kvádru o rozměrech délky l, šířky d a výšky h. Kuba si karimatku natěsno sroluje podél delší strany l do tvaru válce. Jaký bude poloměr tohoto válce? Zanedbejte „zub“, který vznikne u konce karimatky.

Při rolování karimatky vytvarujeme z boční strany s rozměry $l \times h$ podstavu válce s poloměrem r, který chceme spočítat. Při našem zanedbání bude platit, že obě plochy jsou stejné, tudíž platí $lh = \pi r^2$. Odtud vyjádříme r a dostaneme

$$r = \sqrt{\frac{lh}{\pi}}\,.$$

Poloměr srolované karimatky bude $r = \sqrt{lh/\pi}$.

Jakub Sláma

Úloha 26 ... Zrcadla

Ve vlakových kupé jsou dvě zrcadla umístěna proti sobě. To má za následek, že při pohledu do jednoho ze zrcadel mírně zboku vidíme spousty obrazů své tváře: první obraz v zrcadle, na který se díváme, druhý jako obraz obrazu obrazu, třetí jako obraz obrazu obrazu obrazu obrazu a tak dále. V jaké zdánlivé vzdálenosti vidíme druhý pozorovaný obraz, pokud je kupé široké 2 m *a my stojíme přesně v jeho středu?*

V kupé jsme vzdáleni 1 m od zrcadla před námi (na nějž se díváme). Ve stejné vzdálenosti od tohoto zrcadla pak vidíme i svůj obraz. Od prvního obrazu jsme tedy vzdáleni 2 m.

Tento obraz je od zrcadla za námi vzdálen $2\,\mathrm{m} + 1\,\mathrm{m} = 3\,\mathrm{m}$. Obraz tohoto obrazu je v zrcadle za námi vzdálen též 3 m, tedy od zrcadla před námi je vzdálen $2\,\mathrm{m} + 3\,\mathrm{m} = 5\,\mathrm{m}$.

Po zobrazení i tímto zrcadlem tedy uvidíme obraz obrazu obrazu vzdálen 5 m od zrcadla. Poněvadž my jsme od zrcadla vzdáleni ještě 1 m, druhý pozorovaný obraz je od nás vzdálen 6 m.

Patrik Švančara

Úloha 27 ... Dvojhvězda

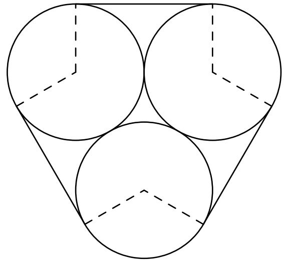
Ondra na noční obloze pozoruje dvojhvězdu, o které si myslí, že je od Země vzdálena 8,24 *parseků* (pc)*. Obě složky dvojhvězdy pozoruje pod úhlem* $1''$*. Jak daleko jsou od sebe vzdáleny složky dvojhvězdy ve skutečnosti? Vzdálenost vyjádřete v astronomických jednotkách* (AU)*.*
Tip: *jeden parsek je vzdálenost, ze které je jedna astronomická jednotka pozorovaná pod úhlem* $1''$*.*

Jelikož se Ondra dívá na dvojhvězdu pod stejným úhlem, pod kterým je definována vzdálenost jednoho parseku, stačí z podobnosti trojúhelníků určit hledanou délku. Vzdálenost Země od dvojhvězdy je 8,24 pc, což je 8,24krát větší vzdálenost než jeden parsek. Proto bude i vzdálenost hvězd pozorovaných pod úhlem $1''$ 8,24krát větší, než 1 AU (astronomická jednotka). Výsledná vzdálenost mezi složkami dvojhvězdy je tedy 8,24 AU.

David Němec

Úloha 28 ... Maturitní

Tři plechovky o poloměru podstavy $r = 5\,\mathrm{cm}$ postavíme těsně k sobě tak, aby středy jejich podstav tvořily rovnostranný trojúhelník. Jak dlouhou potravinovou fólii budeme potřebovat, abychom plechovky obmotali jednou kolem dokola?



Nakreslíme si plechovky z pohledu shora a doplníme kolmice ze středů jejich podstav na rovné úseky fólie. Z obrázku je vidět, že zahnuté části fólie tvoří jednu celou kružnici a rovné části dají šestinásobek poloměru kružnice. Délka fólie je potom

$$l = 2\pi r + 6r \doteq 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 5\,\mathrm{cm} + 6 \cdot 5\,\mathrm{cm} = \frac{430}{7}\,\mathrm{cm}\,.$$

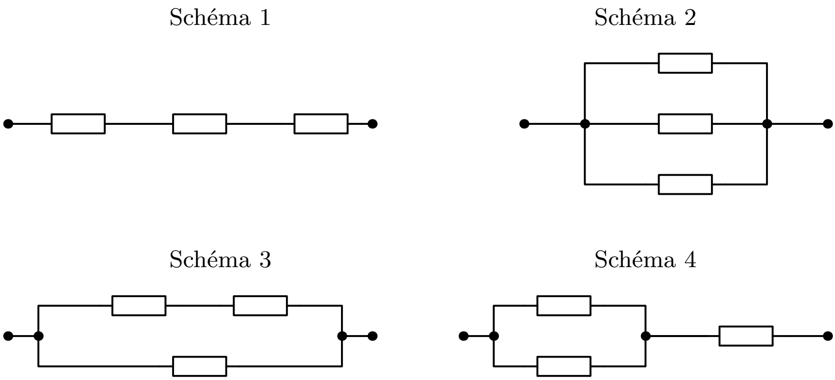
Na omotání pořebujeme alespoň $430/7\,\mathrm{cm}$ fólie.

Miroslav Hanzelka

Úloha 29 ... Rezistory na sto způsobů

Paťo má tři rezistory s odporem $R = 1\,\Omega$. Paťo rezistory nějak zapojil (ale tak, aby všemi rezistory tekl proud), zapsal si hodnotu výsledného odporu a následně rezistory zapojil jiným způsobem (aby měly jiný odpor). Takto si zapsal hodnoty všech možných výsledných odporů zapojení a výsledky sečetl. Jakou hodnotu dostal?

Jsou čtyři možné kombinace zapojení. Všechny rezistory můžeme zapojit sériově (viz schéma 1), všechny rezistory můžeme zapojit paralelně (viz schéma 2), dva rezistory může zapojit sériově a jeden rezistor k nim paralelně (viz schéma 3), dva rezistory paralelně a k nim jeden rezistor sériově (viz schéma 4).



Pro určení celkového odporu sériového zapojení rezistorů sčítáme odpory na jednotlivých rezistorech:

$$R_1 = R + R + R = 3R\,.$$

V případě paralelního zapojení je převrácená hodnota celkového odporu rovna součtu převrácených hodnot jednotlivých odporů, tedy odpor tohoto zapojení je

$$R_2 = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{1}{3} R\,.$$

Pokud máme kombinovaná zapojení, určíme nejprve odpory v jednotlivých větvích a poté použijeme zmíněné vztahy. Pro jednotlivá schémata postupně máme

$$R_3 = \frac{1}{\frac{1}{R+R} + \frac{1}{R}} = \frac{2}{3} R\,,$$

$$R_4 = R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{3}{2} R\,.$$

Pokud sečteme hodnoty všech výsledných odporů, zjistíme, že Paťo dostal celkový odpor $5{,}5\,\Omega$.

Jakub Sláma

Úloha 30 ... Zasolené moře

Kolik soli bychom museli nasypat do Baltského moře, aby mělo stejnou salinitu (slanost) jako Rudé moře? Uvažujte rozlohu Baltského moře $400\,000\,\mathrm{km}^2$ *a jeho střední hloubku* $50\,\mathrm{m}$. *Průměrná salinita Baltského moře je* $10\,‰$, *Rudého moře* $40\,‰$ *(salinita* $1\,‰$ *představuje* $1\,\mathrm{g}$ *soli na* $1\,\ell$ *vody).*

Nejdříve je třeba si vypočítat objem Baltského moře $V = Sh$, kde S je jeho rozloha a h hloubka. Po správném převedení čtverečných kilometrů na metry čtvereční ($1\,\mathrm{km}^2 = 1\,000\,000\,\mathrm{m}^2$) dostáváme

$$V = Sh = 1\,000\,000 \cdot 400\,000\,\mathrm{m}^2 \cdot 50\,\mathrm{m} = 4 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}^2 \cdot 5 \cdot 10^1\,\mathrm{m} =$$
$$= (20 \cdot 10^{11+1})\,\mathrm{m}^3 = 2 \cdot 10^{13}\,\mathrm{m}^3 = 2 \cdot 10^{16}\,\mathrm{dm}^3 = 2 \cdot 10^{16}\,\ell\,.$$

Víme, že $1\,\ell$ vody z Baltského moře obsahuje $10\,\mathrm{g}$ soli. My ale chceme, aby $1\,\ell$ obsahoval $40\,\mathrm{g}$ soli. Proto musíme na každý litr vody přidat $30\,\mathrm{g}$ soli. Potřebná hmotnost soli tedy je

$$m = 2 \cdot 10^{16} \cdot 30\,\mathrm{g} = 6 \cdot 10^{17}\,\mathrm{g} = 6 \cdot 10^{14}\,\mathrm{kg}\,.$$

Aby mělo Baltské moře stejnou salinitu jako Rudé moře, museli bychom do něj nasypat $6 \cdot 10^{14}\,\mathrm{kg}$ soli.

Veronika Dočkalová

Úloha 31 ... Jedeme na Náboj!

Auto jede hodinu rychlostí v. Pak zrychlí a další půlhodinu jede rychlostí $2v$. Po příjezdu do cíle cesty řidič zjistil, že jeho průměrná rychlost je o $20\,\mathrm{km/h}$ vyšší, než rychlost v. Jaká byla jeho průměrná rychlost v_p?

Průměrnou rychlost vypočítáme jako podíl celkové dráhy a času, za nějž ji auto ujelo ($1{,}5\,\mathrm{h}$). Celkovou dráhu vypočítáme pomocí vzorečku $s = vt$:

$$s = v \cdot 1\,\mathrm{h} + 2v \cdot 0{,}5\,\mathrm{h}\,,$$

Jelikož víme, že v_p je rovna i $v + 20\,\mathrm{km/h}$, můžeme napsat rovnici

$$v_\mathrm{p} = \frac{s}{t} = \frac{v + 2v \cdot 0{,}5}{1{,}5} = v + 20\,.$$

V této rovnici jsme schválně nenapsali jednotky, ale víme, že všechny dráhy jsou v kilometrech, časy v hodinách a rychlosti v km/h.

Z rovnice dostáváme

$$\frac{v + v}{1{,}5} = v + 20 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3}v = v + 20 \quad \Rightarrow \quad v = 60\,.$$

Průměrná rychlost auta tedy byla $v_\mathrm{p} = 60\,\mathrm{km/h} + 20\,\mathrm{km/h} = 80\,\mathrm{km/h}$.

Jakub Sláma

Úloha 32 ... Pečeme dort!

Radčina nejlepší kamarádka má narozeniny, a tak se Radka rozhodla, že jí upeče dort. Na dort si připravila těsto, ze kterého vytvarovala kruh o poloměru r. Jenže pak si vzpomněla, že chtěla udělat čtvercový dort, a tak z již připraveného kruhu vykrojila největší možný čtverec, ze kterého pak dort upekla. Jak velká část z původního množství těsta Radce zbyla?

Kruh, který si Radka připravila, měl poloměr r. Víme, že z něj vykrojila největší možný čtverec, tedy že úhlopříčka čtverce měří $2r$. Stranu čtverce označme jako a. Pro trojúhelník, jehož přepona měří $2r$, má odvěsny délky a, můžeme tedy napsat Pythagorovu větu

$$a^2 + a^2 = 4r^2\,.$$

Odtud dostaneme, že $a = r\sqrt{2}$. Plocha kruhu je $S_\mathrm{kruh} = \pi r^2$ a plochu čtverce můžeme spočítat jako

$$S_\square = a^2 = 2r^2\,.$$

Plocha těsta, které Radce zbylo, je rozdíl těchto ploch, tedy

$$S_\mathrm{zbytek} = S_\mathrm{kruh} - S_\square = \pi r^2 - 2r^2 = r^2(\pi - 2)\,.$$

Abychom vyjádřili, jaká část těsta Radce zbyla, vydělíme plochu zbylého těsta plochou těsta, které Radka měla na začátku, tedy plochou kruhu. Dostaneme výsledný poměr

$$\frac{S_\mathrm{zbytek}}{S_\mathrm{kruh}} = \frac{r^2(\pi - 2)}{\pi r^2} = 1 - \frac{2}{\pi} \doteq 36\,\%\,.$$

Radce zbude $36\,\%$ těsta.

Jakub Sláma

Úloha 33 ... Autohydraulika

Simča si nově pořídila hydraulické zařízení, které se skládá ze dvou propojených pístů s plochami $100\,\mathrm{cm}^2$ *a* $1\,000\,\mathrm{cm}^2$*. Na větší píst umístila měřicí přístroj o hmotnosti* $250\,\mathrm{kg}$ *a zjistila, že zvedat ho pomalu do výšky je brnkačka. Jakou práci Simča při zvedání vykonala, pokud přístroj zvedla do výšky* $2\,\mathrm{m}$*?*

K řešení tohoto příkladu si stačí uvědomit, že práce, kterou Simča vykoná bude stejná, jako práce, kterou vykoná zvedané těleso v tíhovém poli. Toto vyplývá z Pascalova zákona. Takže můžeme počítat

$$W_{\text{Simča}} = Fs = mgs = 250\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \cdot 2\,\mathrm{m} = 5\,000\,\mathrm{J} = 5\,\mathrm{kJ}\,.$$

Simča tedy při zvedání vykonala práci $5\,\mathrm{kJ}$.

Patrik Švančara

Úloha 34 ... Faktoriál

Kolik nul na konci má ve svém dekadickém zápise číslo, které dostaneme vynásobením všech čísel od 1 *do* 100*?*

Označme si výsledné číslo a ($a = 100 \cdot 99 \cdot 98 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$). V prvočíselném rozkladu čísla a jsou důležitá pouze prvočísla 2 a 5, která v součinu představují nulu na konci výsledného čísla a.

V prvočíselném rozkladu přirozeného čísla se obecně vyskytuje více prvočísel 2 než 5 (každé druhé přirozené číslo je sudé a tedy obsahuje ve svém prvočíselném rozkladu alespoň jednu dvojku, zatímco pěti je dělitelné až každé páté přirozené číslo). Stačí nám tedy určit, kolik pětek je v prvočíselném rozkladu a, neboť v součinu bude vždy dost dvojek na vyprodukování nuly na konci čísla a.

Mezi čísly $1, 2, 3, \ldots, 99, 100$, je právě 16 čísel dělitelných prvočíslem 5 *právě* v první mocnině (5, 10, 15, 20, 30, …, 95) a dále jsou mezi nimi čtyři čísla dělitelná druhou mocninou 5^2 (25, 50, 75, 100). Vyšší mocniny nás nezajímají, neboť $5^3 = 125 > 100$. Když nyní tato čísla mezi sebou vynásobíme, v prvočíselném rozkladu budeme tedy mít $16 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 24$ pětek, což ve spojení s výše zmíněnými tvrzeními dává i 24 nul na konci.

Jakub Sláma

Úloha 35 ... Slévání

Bronz je slitina cínu a mědi v hmotnostním poměru $1 : 3$*. Víme, že hustota cínu je přibližně* $\varrho_{\mathrm{Sn}} = 7\,\mathrm{kg/dm^3}$ *a hustota mědi* $\varrho_{\mathrm{Cu}} = 9\,\mathrm{kg/dm^3}$*. Jaký bude poměr objemů cínu a mědi* $V_{\mathrm{Sn}}/V_{\mathrm{Cu}}$ *potřebných na výrobu* $m = 1\,\mathrm{kg}$ *bronzu?*

Poměr hmotností 1 : 3 nám říká, že v 1 kg bronzu bude 1/4 kg cínu a 3/4 kg mědi. Jejich objemy jsou:

$$V_{\mathrm{Sn}} = \frac{\frac{1}{4}\,\mathrm{kg}}{7\,\mathrm{kg/dm^3}} = \frac{1}{28}\,\mathrm{dm}^3\,,$$
$$V_{\mathrm{Cu}} = \frac{\frac{3}{4}\,\mathrm{kg}}{9\,\mathrm{kg/dm^3}} = \frac{3}{36}\,\mathrm{dm}^3\,.$$

Vydělením dostaneme hledaný poměr objemů

$$\frac{V_{\mathrm{Sn}}}{V_{\mathrm{Cu}}} = \frac{\frac{1}{28}\,\mathrm{dm}^3}{\frac{3}{36}\,\mathrm{dm}^3} = \frac{36}{3\cdot 28} = \frac{3}{7}\,.$$

Poměr objemů cínu a mědi v 1 kg bronzu je 3 : 7.

Miroslav Hanzelka

Úloha 36 ... Energeťák

Znavený turista se zastavil v hospodě u cesty a koupil si chlazený nápoj. Nápoj má teplotu $t_0 = 7\,^\circ\mathrm{C}$ a objem $V = 250\,\mathrm{m}\ell$, jeho energetická hodnota je $\varepsilon = 1\,000\,\mathrm{kJ/kg}$. Svými vlastnostmi se nápoj blíží vodě, má tedy hustotu $\varrho = 1\,\mathrm{kg}/\ell$ a měrnou tepelnou kapacitu $c = 4\,\mathrm{kJ/(kg\cdot{}^\circ C)}$. Kolik energie turista z nápoje získá, jestliže ho po vypití ve svém těle zahřeje na $t_1 = 37\,^\circ\mathrm{C}$?

Energetická hodnota ε nám říká, kolik energie získáme z jednoho kilogramu nápoje. Ze známého objemu a hustoty nápoje určíme jeho hmotnost

$$m = \varrho V = 1\,\mathrm{kg}/\ell \cdot 0{,}25\,\ell = 0{,}25\,\mathrm{kg}\,.$$

Z tohoto množství získá turista energii

$$E_1 = m\varepsilon = 1\,000\,\mathrm{kJ/kg} \cdot 0{,}25\,\mathrm{kg} = 250\,\mathrm{kJ}\,.$$

Zároveň se ale v těle musí nápoj zahřát o teplotu

$$\Delta t = t_1 - t_0 = (37 - 7)\,^\circ\mathrm{C} = 30\,^\circ\mathrm{C}\,,$$

podle kalorimetrické rovnice tedy turistovo tělo odevzdá energii

$$E_2 = mc\Delta t = 0{,}25\,\mathrm{kg} \cdot 4\,\mathrm{kJ/(kg\cdot{}^\circ C)} \cdot 30\,^\circ\mathrm{C} = 30\,\mathrm{kJ}\,.$$

Celková energie, kterou turista vypitím chlazeného nápoje získá, je rovna rozdílu výše vypočtených energií

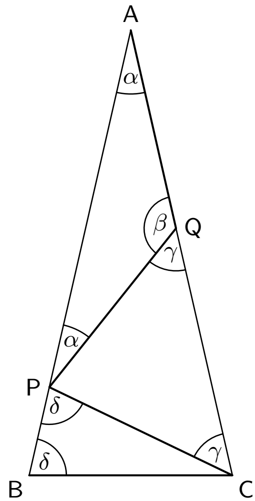
$$E = E_1 - E_2 = 250\,\mathrm{kJ} - 30\,\mathrm{kJ} = 220\,\mathrm{kJ}\,.$$

Turista vypitím nápoje získá 220 kJ.

Miroslav Hanzelka

Úloha 37 ... Úhelná

Lenka si namalovala rovnoramenný trojúhelník ABC *a s překvapením zjistila, že na jeho ramenech* AB*, resp.* AC*, lze najít body* P*, resp.* Q*, takové, že* $|\mathsf{BC}| = |\mathsf{CP}| = |\mathsf{PQ}| = |\mathsf{QA}|$*. Určete velikost úhlu* $\measuredangle$BAC*.*



Hledaný úhel si označme jako α. Z rovnoramenného trojúhelníku AQP ihned vidíme, že a $\measuredangle\mathsf{APQ} = \alpha$. Dále si označme $\measuredangle\mathsf{AQP} = \beta$. Tímto jsme si označili i poslední vnitřní úhel trojúhelníku AQP. Protože součet vnitřních úhlů v trojúhelníku musí být roven 180°, můžeme zapsat první rovnici

$$180^\circ = \alpha + \alpha + \beta\,, \quad \Rightarrow \quad \beta = 180^\circ - 2\alpha\,.$$

Když sčítáme úhel β s úhlem $\measuredangle\mathsf{PQC} = \gamma$, musíme dostat také 180°. Proto je úhel γ přímý

$$\gamma = 180^\circ - \beta = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha) = 2\alpha\,.$$

Pokud je trojúhelník PQC rovnoramenný, úhlu γ se bude rovnat i úhel $\measuredangle$QCP. Třetí vnitřní úhel v tomto trojúhelníku bude roven $\measuredangle\mathsf{CPQ} = 180^\circ - 2\gamma$.

Dále si označme úhel $\measuredangle\mathsf{BPC} = \delta$. Tento úhel spolu s $\measuredangle$CPQ a $\measuredangle\mathsf{QPA} = \alpha$ tvoří přímý úhel, takže dohromady mají velikost 180°. Pro úhel δ potom platí

$$\delta = 180^\circ - \measuredangle CPQ - \alpha = 180^\circ - (180^\circ - 2\gamma) - \alpha = 180^\circ - 180^\circ + 2\gamma - \alpha = 2\cdot 2\alpha - \alpha = 3\alpha\,.$$

Nyní si stačí uvědomit, že trojúhelník PCB je také rovnoramenný, a proto se úhlu δ rovná i úhel $\measuredangle$PBC. Poněvadž ale i samotný trojúhelník ABC je rovnoramenný, úhlu δ se musí rovnat i úhel $\measuredangle$BCA. Součet vnitřních úhlů v trojúhelníku ABC je tedy

$$180^\circ = \alpha + \delta + \delta = \alpha + 2\cdot 3\alpha = 7\alpha\,.$$

Hledaný úhel $\measuredangle\mathsf{BAC} = \alpha = 180/7^\circ$.

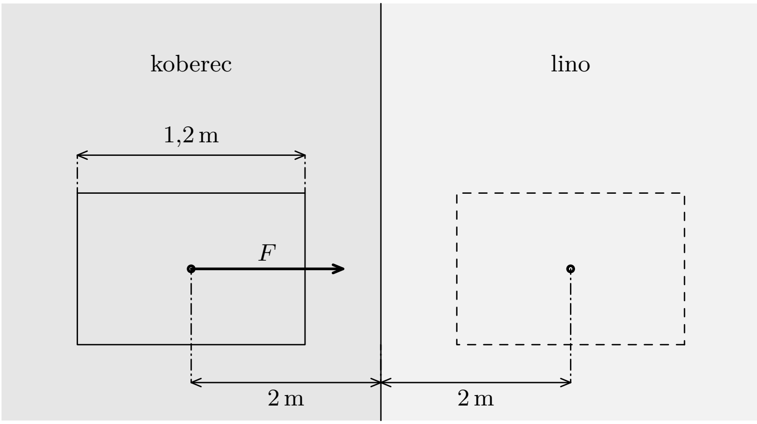
Patrik Švančara

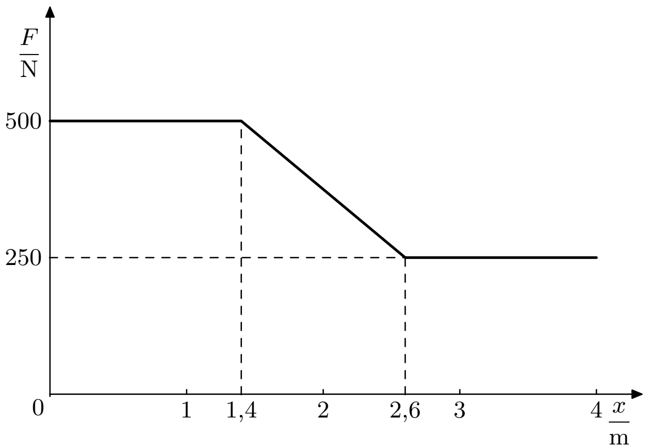
Úloha 38 ... Stěhování

V obývacím pokoji máme skříň o hmotnosti $m = 50\,\mathrm{kg}$ *a šířce* $1{,}2\,\mathrm{m}$ *a chceme přestěhovat její střed o* $4\,\mathrm{m}$ *dále. Mezi původní a novou polohou skříně jsou dva metry koberce a poté dva metry lina. Třecí koeficient mezi skříní a kobercem je* $f_1 = 1{,}0$ *a mezi skříní a linem* $f_2 = 0{,}5$*. Nakreslete graf, kde na vodorovné ose bude poloha středu skříně a na svislé ose síla, kterou musíme skříň tlačit. Osy správně popište a vyznačte na nich důležité body!*

Pokud je skříň celá na koberci, při sunutí musíme překonat třecí sílu $F_1 = mgf_1 = 500\,\mathrm{N}$. Pokud je skříň už na linu, třecí síla je poloviční, protože i f_2 je oproti f_1 poloviční, tedy $F_2 = 250\,\mathrm{N}$.

Nejdříve, když je celá skříň na koberci, je síla pořád F_1. Po posunutí o $1{,}4\,\mathrm{m}$ se začne skříň přesouvat na lino a síla bude rovnoměrně klesat (v grafu bude síla šikmá úsečka), dokud celá





skříň nebude na linu, tzn. po posunutí o šířku skříně 1,2 m. Síla je od tohoto momentu rovna F_2 a do ukončení pohybu se nebude měnit.

Patrik Švančara

Úloha 39 ... Mocninná

Najděte tři po sobě jdoucí přirozená čísla, která v součtu dávají pátou mocninu některého přirozeného čísla.

Uvažujme tři po sobě jdoucí čísla: n, $n+1$ a $n+2$. Pro jejich součet má platit

$$n + (n+1) + (n+2) = m^5 \,.$$

Levou stranu rovnice upravíme do tvaru $3(n+1) = m^5$. Protože je n přirozené, platí $n+1 > 1$. Toto číslo pak násobíme prvočíslem tři v první mocnině. Aby byla rovnice splněna, musí tedy číslo tři dělit i pravou stranu, neboli číslo tři musí dělit m.

Nejmenší m, které tomu vyhovuje, je také tři. Řešíme tedy rovnici $3(n+1) = 3^5$, jejíž řešení je $n = 3^4 - 1 = 80$. Jedna z hledaných trojic je tedy $80, 81, 82$.

Tato úloha má ovšem nekonečně mnoho řešení ve tvaru $n = m^5/3 - 1$, kde m, jak už bylo řečeno, je číslo dělitelné třemi (aby bylo n přirozené). Tedy i pro $m = 6, 9, 12, \ldots$ jsme schopni nalézt odpovídající tři po sobě jdoucí čísla.

Tomáš Kremel

Úloha 40 ... Horská dráha

V lunaparku mají novou horskou dráhu. Na začátku jízdy je vozíček na vrcholu stoupání ve výšce $h = 20\,\mathrm{m}$, ze kterého následně sjede dolů. Dole je rovinka dlouhá $s = 200\,\mathrm{m}$, na které vozíček brzdí s konstantním zpomalením. S jakým zpomalením (záporným zrychlením) vozíček brzdí, jestliže zastaví přesně na konci rovinky? Odporové síly zanedbejte.

Na začátku má vozíček nulovou rychlost a je ve výšce $h = 20\,\mathrm{m}$. Má tedy potenciální energii $E_\mathrm{p} = mgh$ (zvolíme-li nulovou hladinu potenciální energie na úrovni země, tedy rovinky). Při vjezdu na rovinku má rychlost v. Má tedy kinetickou energii $E_\mathrm{k} = mv^2/2$ a potenciální energii má nulovou. Jelikož veškeré odporové síly zanedbáváme, platí zákon zachování mechanické energie

$$E_\mathrm{p} = mgh = E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} \cdot 20\,\mathrm{m}} = 20\,\mathrm{m/s}\,.$$

Při pohybu na rovince se jedná o rovnoměrně zpomalený pohyb z rychlosti v na nulovou rychlost, pro nějž platí $v = at$ a $s = at^2/2$. Tyto dvě rovnice řešíme tak, že z první si vyjádříme $t = v/a$ a dosadíme do druhé. Dostáváme

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a\frac{v^2}{a^2} = \frac{v^2}{2a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v^2}{2s} = \frac{(20\,\mathrm{m/s})^2}{2 \cdot 200\,\mathrm{m}} = 1\,\mathrm{m/s^2}\,.$$

Vozíček zpomaloval se zpomalením $1\,\mathrm{m/s^2}$.

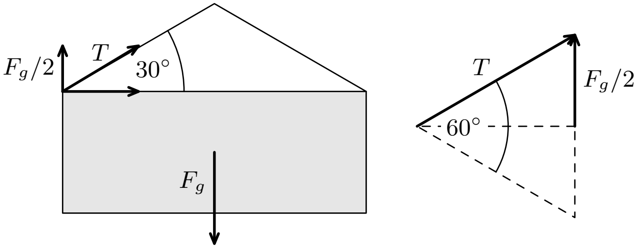
Jakub Sláma

Úloha 41 ... Obraz

Kubo si chce doma zavěsit obraz. Má jeden hřebík a jeden provaz, který praskne, pokud je na něj působící síla větší než $T = 100\,\mathrm{N}$. Jaký nejtěžší obdélníkový obraz si Kubo může pověsit na provaz a hřebík, když provaz a obraz svírají úhel $\alpha = 30^\circ$?

Vše vysvětlí obrázek. Na obraz působí síla $F_g = mg$, kde m je hmotnost obrazu. Navíc zde působí i dvě síly T v šikmém směru. Rozložíme-li tyto síly na vodorovné a svislé složky (viz obrázek), vidíme, že vodorovné složky působí proti sobě, mají stejnou velikost a vyruší se. Proti tíze obrazu budou tedy působit pouze svislé složky.

Velikost svislé složky určíme tak, že si do obrázku rozkladu sil symetricky dokreslíme i spodní trojúhelník. Tento trojúhelník má vnitřní úhly rovné 60°, je tedy rovnostranný. Což znamená, že dvojnásobek velikosti svislé síly musí být rovný velikosti samotné síly T. Jedna polovina provázku tedy „drží“ obraz silou $T/2$.



Obě poloviny provázku tedy drží obraz silou T, která vyrovnává tíhovou sílu F_g. Odtud je hmotnost obrazu

$$F_g = mg = T \quad \Rightarrow \quad m = \frac{T}{g} = \frac{100\,\mathrm{N}}{10\,\mathrm{m/s^2}} = 10\,\mathrm{kg}\,.$$

Nejtěžší obraz, který si Kubo může pověsit, má hmotnost 10 kg.

Pavla Trembulaková

Úloha 42 ... Kámen

Ve válcovém poháru naplněném vodou, který má plochu podstavy $200\,\mathrm{cm}^2$*, se vznáší kostka ledu. Vznáší se, neboť je v ledu zamrznutý kamínek o hmotnosti* $100\,\mathrm{g}$ *a hustotě* $5\,000\,\mathrm{kg/m^3}$*. Časem se led rozpustí a kamínek klesne na dno. Co se stane s hladinou vody? Klesne, stoupne, nebo se nezmění? Pokud se změní, tak o kolik?*

Aby se led s kamenem volně vznášel ve vodě, musí mít dohromady stejnou hustotu jako voda, která má hustotu $\varrho_\mathrm{v} = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} = 1\,\mathrm{g/cm^3}$. Proto si dopočítáme objem ledu V_l díky znalosti hustoty kamene ϱ_k a vody.

$$\varrho_\mathrm{v} = \frac{m_\mathrm{k} + \varrho_\mathrm{l} V_\mathrm{l}}{\dfrac{m_\mathrm{k}}{\varrho_\mathrm{k}} + V_\mathrm{l}}\,,$$

$$1\,\mathrm{g/cm^3} = \frac{100\,\mathrm{g} + 0{,}9\,\mathrm{g/cm^3} \cdot V_\mathrm{l}}{\dfrac{100\,\mathrm{g}}{5\,\mathrm{g/cm^3}} + V_\mathrm{l}}\,.$$

Vyřešením dostáváme

$$V_\mathrm{l} = 800\,\mathrm{cm^3}\,.$$

Z objemu ledu spočítáme ještě jeho hmotnost a z ní objem vzniklé vody:

$$m_\mathrm{l} = \varrho_\mathrm{l} V_\mathrm{l} = 0{,}9\,\mathrm{g/cm^3} \cdot 800\,\mathrm{cm^3} = 720\,\mathrm{g}\,,$$

$$V_\mathrm{v} = \frac{m_\mathrm{l}}{\varrho_\mathrm{v}} = \frac{720\,\mathrm{g}}{1\,\mathrm{g/cm^3}} = 720\,\mathrm{cm^3}\,.$$

Rozdíl objemů je $720\,\mathrm{cm}^3 - 800\,\mathrm{cm}^3 = -80\,\mathrm{cm}^3$, což znamená, že celkový objem látky v nádobě se zmenšil a hladina vody tedy musela *klesnout*. Tento pokles zjistíme tak, že rozdíl objemů vydělíme plochou podstavy nádoby S_p

$$\Delta h = \frac{\Delta V}{S_\mathrm{p}} = \frac{80\,\mathrm{cm}^3}{200\,\mathrm{cm}^2} = \frac{2}{5}\,\mathrm{cm} = 0{,}4\,\mathrm{cm}\,.$$

Vodní hladina po rozpuštění ledu klesne o $0{,}4\,\mathrm{cm}$.

David Němec

Na organizaci Náboje Junior 2014 se podílely nasledující organizace:

Koordniátorem pro Českou republiku byl fyzikální korespondenční seminář Výfuk, součást *Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze*. Organizátoři a spolupracovníci Výfuku byli také autory zadání a vzorových řešení úloh. Na Slovensku organizaci zajišťovalo občanské sdružení Trojsten, zastřešené *Fakultou matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislavě*.

V České republice se Náboj Junior uskutečnil na 10ti středních a vysokých školách:

Praha – *Gymnázum Ch. Dopplera*
Praha – *Gymnázium Voděradská 2*
Brno – *Fakulta stroj. inženýrství VUT*
Čes. Budějovice – *Gymnázium Jírovcova*
Hradec Králové – *Univerzita Hr. Králové*
Karlovy Vary – *První české gymnázium v Karlových Varech*
Ostrava – *Gymnázium O. Havlové*
Česká Lípa – *Gymnázium Žitavská*
Olomouc *Gymnázium Olomouc-Hejčín*
Třebíč – *Katolické gymnázium*

Na Slovensku se Náboj Junior uskutečnil na 14ti středních školách:

Bratislava – *Gymnázium Grösslingova*
Hlohovec – *Gymnázium I. Kupca*
Nitra – *Gymnázium Párovská*
Lučenec – *Gymnázium B. S. Timravy*
Námestovo – *Gymnázium A. Bernoláka*
Žilina – *Gymnázium Veľká Okružná*
Poprad – *Gymnázium Kukučínova*
Partizánske – *Gymnázium Partizánske*
Púchov – *Gymnázium Púchov*
Brezno – *Gymnázium J. Chalupku*
Trstená – *Gymnázium Trstená*
Košice – *Gymnázium Alejová*
Banská Bystrica – *Gymnázium A. Sládkoviča*
Šurany – *Gymnázium Bernolákova*