NÁBOJ junior

3. ročník

2014/15

Vzorové riešenia

výfuk

TROJSTEN

Ahojte,

práve sa Vám do rúk dostala brožúrka zadaní a riešení úloh Náboja Junior 2014.

Náboj Junior je matematicko-fyzikálna súťaž pre štvorčlenné tímy žiakov druhého stupňa základnej školy a žiakov nižšieho stupňa viacročných gymnázií. Celá súťaž trvá presne 120 minút, počas ktorých sa tímy snažia vyriešiť čo najviac úloh.

V tejto súťaži nejde o bezhlavú aplikáciu už nadobudnutých vedomostí. Úlohy vyžadujú tiež istú dávku invencie a dôvtipu.

3. ročník Náboja Junior prebiehal dňa 28. 11. 2014 vo viacerých mestách na Slovensku a v Českej republike súčasne. Práve v týchto mestách sa našli šikovní organizátori zo stredných, prípadne vysokých škôl a umožnili základným školám z regióna si zasúťažiť a preveriť svoje vedomosti.

Cieľom súťaže je ukázať, že matematika a fyzika sú zaujímavé prírodné vedy s množstvom výziev a príležitostí pre každého žiaka. Zároveň organizátori dostanú možnosť vytvoriť svoju súťaž a zistiť, že organizovanie a práca v tíme vie byť zábavná, ale aj náročná.

Súťaž Náboj Junior vznikla ako spoločná aktivita občianskeho združenia Trojsten a korešpondenčného seminára MFF UK Výfuk. Členovia organizácií sú vysokoškolskí študenti Fakulty matematiky, fyziky a informatiky UK v Bratislave alebo Matematicko-fyzikální fakulty UK v Prahe, ktorí sa snažia o rozvoj detí a študentov.

Prajeme príjemné zamýšľanie sa nad príkladmi,

o. z. Trojsten a korešp. seminár MFF UK Výfuk

Riešenia úloh III. ročníka Náboja Junior

Úloha 1 ... Paralelný vesmír

Paťo sa náhodou dostal do paralelného vesmíru. Koľko sekúnd mu tam trvá jeden rok, ak má 6 mesiacov, mesiac má 8 týždňov, týždeň má 5 dní, deň má 30 hodín, hodina má 16 minút a minúta 45 sekúnd?

Rok jednoducho prevedieme na 6 mesiacov, 6 mesiacov na $6 \cdot 8$ týždňov, 48 týždňov na $5 \cdot 6 \cdot 8$ dní a tak ďalej. Nakoniec dostaneme, že 1 rok má

$$(6 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 30 \cdot 16 \cdot 45)\,\mathrm{s} = 5\,184\,000\,\mathrm{s}\,.$$

Rok v Paťovom paralelnom vesmíre trvá $5\,184\,000\,\mathrm{s}$.

Pavla Trembulaková

Úloha 2 ... Ping Pong

Čajka s Baškou hrali ping-pong. Zápasili s obrovskou vášňou, nanešťastie sa im podarilo zničiť loptičku. Rozhodli sa, že si pôjdu kúpiť druhú. V obchode im povedali, že raketa je o 1 000 *korún drahšia ako loptička. A to nie je všetko, podarilo sa im zistiť, že raketa a loptička dokopy stoja* 1 100 *korún. Koľko korún stála nová loptiťka pre Bašku a Čajku?*

Cenu loptičky označíme x korún. Platí, že raketa stojí $x + 1\,000$ korún. A súprava rakety a loptičky 1 100 korún. Teraz už môžeme napísať jednoduchú rovnicu $1\,100 = x + (x + 1\,000)$. Jej vyriešením zistíme, že $x = 50$ a že Čajka s Baškou za loptičku zaplatili 50 korún.

Pavla Trembulaková

Úloha 3 ... Veľké D

Maťo chcel vedieť najväčší spoločný deliteľ čísel A a B. Číslo A zistíte tak, že zoradíte nasledujúce stavy vody s rovnakou hmotnosťou podľa objemu od najväčšieho po najmenší (pri normálnom tlaku):

1 ... vodná para,
2 ... voda pri teplote 80 °C,
3 ... ľad.

Číslo B zistíte zoradením týchto dĺžkových jednotiek od najmenšej po najväčšiu:

4 ... míľa,
5 ... palec,
6 ... svetelný rok.

Pomôžte Maťovi určiť najväčší spoločný deliteľ čísel A a B.

Zoradením získame čísla $A = 132$ a $B = 546$. Čísla rozložíme na súčin prvočísel:

$$132 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11\,,$$
$$546 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 13\,.$$

Súčin spoločných prvočiniteľov dáva najväčší spoločný deliteľ $D(132, 546) = 2 \cdot 3 = 6$.

Lukáš Fusek

Úloha 4 ... Cyklisti

Denda a Neskvík sa radi chodia bicyklovať. Vždy sa obaja bicyklujú po rovnakej trase. Prvý kilometer je do kopca. Denda sa na tomto úseku pohybuje rýchlosťou 10 km/h, *kým Neskvík to zvláda rýchlosťou* 12 km/h. *Druhý kilometer je jednoduchší, Denda ho zvláda prejsť rýchlosťou* 40 km/h *a Neskvík rýchlosťou* 24 km/h. *Radi by vedeli, kto z nich má väčšiu priemernú rýchlosť?*

Priemerná rýchlosť je celková dráha, teda 2 km (ktorá je pre oboch rovnaká), vydelená celkovým časom. Vyššiu priemernú rýchlosť má teda ten z nich, ktorý túto dráhu prejde za kratší čas. Čas, ktorý to trvá Dende je:

$$t_{\mathrm{D}} = \frac{1\,\mathrm{km}}{10\,\mathrm{km/h}} + \frac{1\,\mathrm{km}}{40\,\mathrm{km/h}} = \frac{1}{8}\,\mathrm{h} = 7{,}5\,\mathrm{min}\,.$$

A čas, ktorý to trvá Neskvíkovi je:

$$t_{\mathrm{N}} = \frac{1\,\mathrm{km}}{12\,\mathrm{km/h}} + \frac{1\,\mathrm{km}}{24\,\mathrm{km/h}} = \frac{3}{24}\,\mathrm{h} = 7{,}5\,\mathrm{min}\,.$$

Keďže sú tieto časy rovnaké, aj ich priemerná rýchlosť je rovnaká. Teda ani jeden z nich nemá vyššiu priemernú rýchlosť.

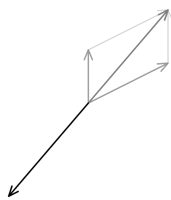
Simona Gabrielová

Úloha 5 ... Rysujeme

Dorysujte do obrázku (k dispozícii máte 4 predlohy) tretiu silu tak, aby výslednica týchto troch síl bola nulová.

Aby sa sily vyrovnali (ich výslednica bude nulová), musíme dorysovať silu, ktorá bude mať rovnakú veľkosť, ale opačný smer ako výslednica zadaných síl. Túto výslednicu určíme tak, že sily doplníme na rovnobežník a narysujeme uhlopriečku vychádzajúcu zo spoločného pôsobiska. Výslednú silu dorysujeme ako silu rovnakej veľkosti, ale opačného smeru.

David Němec

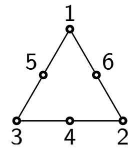


Obr. 1: Skladanie síl.

Úloha 6 ... Trojuholníková matika

Do vrcholov trojuholníka a na všetky stredy jeho strán doplňte čísla 1 *až* 6 *tak, že súčet čísel na každej strane bude vždy* 9. *Každé číslo použite len raz.*

Vieme, že každé číslo musíme použiť práve raz. Takže na jednej strane určite musí byť číslo 6. Čísla, ktoré k nej priradíme, musia mať súčet $9 - 6 = 3$, čo spĺňajú len čísla 1 a 2. Číslo 6 teda musí byť v strede strany a čísla 1 a 2 vo vrcholoch. Pri čísle 2 nemôže byť číslo 5, lebo by sme ho museli doplniť ďalším číslom 2. Z podobného dôvodu nemôže byť pri čísle 1 číslo 4. Z toho vyplýva, že na poslednom vrchole musí byť číslo 3. Riešením je teda po obvode $1, 6, 2, 4, 3, 5$.



Jakub Sláma

Úloha 7 ... Ťažkí manželia

Manželia Novákovci si na Nový rok povedali, že už nie sú najštíhlejší, a že by mohli trochu zhodiť. Ich cieľom bolo schudnúť aspoň 10 % svojej pôvodnej hmotnosti. Pani Zita Nováková mala na Nový rok hmotnosť $m_Z = 80\,\mathrm{kg}$ a jej manžel Jakub Novák $m_J = 120\,\mathrm{kg}$. Na konci roku sa zvážili a zistili, že pani Nováková síce schudla o 15 %, ale jej manžel len o 5 %. O koľko kilogramov viac/menej schudli obaja dokopy oproti ich novoročnému plánu?

Najskôr vypočítajme, o koľko mali manželia schudnúť podľa svojho predsavzatia. Vzhľadom na to, že obaja chceli schudnúť o rovnakú časť svojej hmotnosti, stačí nám vypočítať, koľko je 10 % z $m_\mathrm{Z} + m_\mathrm{J} = 200\,\mathrm{kg}$. teda $200\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}10 = 20\,\mathrm{kg}$.

Teraz vypočítame, koľko každý z manželov schudol v skutočnosti. Pani Zita celkom schudla $m_\mathrm{Z} \cdot 15\,\% = 80\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}15 = 12\,\mathrm{kg}$ a pán Jakub $m_J \cdot 5\,\% = 120\,\mathrm{kg} \cdot 0{,}05 = 6\,\mathrm{kg}$. Dokopy schudli $(12 + 6)\,\mathrm{kg} = 18\,\mathrm{kg}$, čo je o $2\,\mathrm{kg}$ menej, ako si predsavzali.

Karel Kolář

Úloha 8 ... Beh alejou

Tommy si každé ráno ide zabehať. Behávа v aleji rovnomerne rozmiestnených stromov. Od prvého stromu k deviatemu dobehne za osemnásť sekúnd. Ako dlho mu trvá zabehnúť od prvého k šesťdesiatemu piatemu stromu?

Medzi deviatimi stromami je osem rovnakých častí. Preto čas vydelíme 8 a zistíme, akú dobu trvá Tommymu prebehnúť medzi dvomi stromami. Medzi 65 stromami je rovnakých úsekov 64, preto výsledok získame tak, že čas potrebný na prebehnutie medzi dvomi stromami vynásobíme 64:

$$\frac{18\,\mathrm{s}}{8} \cdot 64 = (18 \cdot 8)\,\mathrm{s} = 144\,\mathrm{s}\,.$$

Tommy dobene od prvého stromu k šesťdesiatemu piatemu za $144\,\mathrm{s}$.

Simona Gabrielová

Úloha 9 ... Napúšťanie vane

Jarkina vaňa má dva kohútiky, na studenú a na horúcu vodu. Časom si Jarka všimla, že vaňa sa studenou vodou napustí za 4 minúty. Naopak, úplne horúcou vodou sa napustí za 12 minút.

Jarka naviac zistila, že najviac jej vyhovuje teplota vody vtedy, keď nechá oba kohútiky úplne otvorené. Za aký čas sa Jarke naplní vaňa v tomto prípade?

Zo zadania vyplýva, že za minútu sa napustí studenou vodou 1/4 vane (keďže za 4 minúty sa naplní celá vaňa) a horúcou vodou 1/12 vane. Obidvomi kohútikmi naraz sa za minútu napustí $1/4 + 1/12 = 1/3$ vane. Teda celú vaňu bude mať Jarka naplnenú za 3 min.

Patrik Švančara

Úloha 10 ... Jednotky a nuly

Kajka vždy túžila vedieť, aké je najmenšie číslo, ktoré vieme zapísať iba číslicami 0 *a* 1 *a ktoré je súčasne bezo zvyšku deliteľné súčinom troch najmenších prvočísel. Nájdite Kajke toto číslo.*

Tri najmenšie prvočísla sú 2, 3 a 5. Tieto čísla sú nesúdeliteľné, teda hľadané číslo musí byť deliteľné ich súčinom 30 – hľadané číslo musí byť násobok 30. To je to isté, ako keby sme hľadali násobok 3 a na koniec dopísali nulu. Kritériom pre deliteľnosť 3 je podmienka, že ciferný súčet musí byť deliteľný tromi. Pomocou číslic 1 a 0 dostaneme najmenšie číslo deliteľné tromi pomocou troch jednotiek (111). Hľadané číslo získame dopísaním nuly.

Kajka sa teda potešila, keď aj ona zistila, že toto číslo je 1110.

Dominika Kalasová

Úloha 11 ... Sedačka

Zase raz sme boli nakupovať v IKEI a kúpili sme si rohovú sedačku v tvare písmena „L“ a 6 rovnakých ružových štvorcových vankúšov. Položili sme ich na sedačku tak, že na každom konci je jeden a v rohu je tiež jeden. Všetkých 6 vankúšov je umiestnených vedľa seba. Aké pomery dĺžok môže mať sedačka?

K dispozícii máme 6 vankúšov. Ak budú na jednej strane dva vankúše, na druhej strane ich musí byť päť, pretože rohový vankúš musíme započítať k obom stranám. Tým dostávame pomer 2 : 5. Druhá možnosť je, že na jednej strane budú tri vankúše a na druhej štyri. To dáva pomer 3 : 4.

Možné pomery sú teda dva, 3 : 4 a 2 : 5.

Lukáš Ledvina

Úloha 12 ... Dobehnite Miley Cyrus

Andrej sa dozvedel, že z Liptovského Mikuláša práve odchádza Miley Cyrus. Miley vyrazila rýchlosťou 60 km/h. *Andrejovi sa za ňou podarilo vyštartovať o pol hodiny neskôr (išiel rovnakým smerom ako Miley) rýchlosťou* 80 km/h. *V akej vzdialenosti od Liptovského Mikuláša jej Andrej mohol zakývať, pretože ju práve predbiehal?*

Za prvú pol hodinu prešlo auto s Miley Cyrus dráhu $60\,\mathrm{km/h} \cdot 0{,}5\,\mathrm{h} = 30\,\mathrm{km}$. Tento náskok sa začne postupne zmenšovať, pretože Andrej sa k Miley približuje rýchlosťou $80\,\mathrm{km/h} - 60\,\mathrm{km/h} = 20\,\mathrm{km/h}$. Teda k ich stretnutiu dôjde o

$$\frac{30\,\mathrm{km}}{20\,\mathrm{km/h}} = \frac{3}{2}\,\mathrm{h} = 1{,}5\,\mathrm{h}\,,$$

po odjazde Andreja z Liptovského Mikuláša. Za tento čas Andrej prejde vzdialenosť

$$80\,\mathrm{km/h} \cdot 1{,}5\,\mathrm{h} = 120\,\mathrm{km}\,.$$

Andrej mohol Miley zakývať 120 km od Liptovského Mikuláša.

Simona Gabrielová

Úloha 13 ... Stavebnica

Vladko má rád stavebnice. Minule vzal svoju najnovšiu stavebnicu, ktorá obsahuje 192 drevených kociek. Potom z nich postavil mrakodrap, teda kváder s podstavou 4×6 kociek a výškou 8 kociek. Nepáčila sa mu farba jeho mrakodrapu, tak vzal fixu a všetky vonkajšie steny kvádru (okrem spodnej podstavy) nafarbil na ružovo. Koľko nevyfarbených stien jednotlivých kociek zostane Vladkovi?

Mohli by sme počítať rovno nevyfarbené steny, ale je oveľa ľahšie zrátať vyfarbené steny a odčítať ich od celkového počtu. Kocky majú spolu $192 \cdot 6 = 1\,152$ stien a vyfarbených je

$$2 \cdot (4 \cdot 8 + 6 \cdot 8) + 4 \cdot 6 = 184\,.$$

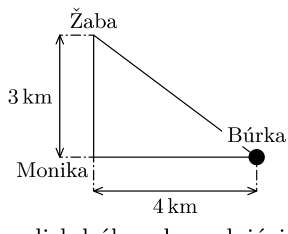
V poslednom súčine nenásobime dvomi, lebo podstava mrakodrapu nie je vyfarbená. Nevyfarbených stien je potom $1\,152 - 184 = 968$.

Miroslav Hanzelka

Úloha 14 ... Búrka

Žaba a Monika sa nachádzajú blízko búrky, presne tak, ako vidíte na obrázku. Žaba počul hrom o 3 s neskôr ako Monika. Radi vy vedeli, aká je rýchlosť zvuku. Vypočítajte ju!

V pravouhlom trojuholníku na obrázku poznáme dĺžku odvesien, teda podľa Pytagorovej vety je dĺžka prepony



$$s_{\check{Z}} = \sqrt{(4\,\mathrm{km})^2 + (3\,\mathrm{km})^2} = \sqrt{16\,\mathrm{km}^2 + 9\,\mathrm{km}^2} = 5\,\mathrm{km}\,.$$

čo je vzdialenosť Žabu od blesku. Teraz odpočítame od vzdialenosti medzi Žabou a bleskom vzdialenosť Moniky od blesku, čo je $5\,\mathrm{km} - 4\,\mathrm{km} = 1\,\mathrm{km} = 1\,000\,\mathrm{m}$. Vieme, že Žaba počul hrom o 3 sekundy neskôr, rýchlosť zvuku vypočítame tak, že vydelíme rozdiel dráh zodpovedajúcim rozdielom časov:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{1000\,\mathrm{m}}{3\,\mathrm{s}} \doteq 333\,\mathrm{m/s}\,.$$

Rýchlosť zvuku je 333 m/s.

David Němec

Úloha 15 ... Dobre fungujúci systém

Štyria pracovití Trojsteňáci si chceli postaviť dom. Postupne prehadzujú lopatou piesok z jamy na kopu, z kopy do fúrika, z fúrika do vedra a z vedra do miešačky. Pri prvom úkone sa pri prehadzovaní vysype 20 % piesku, pri ďalšom vysypú opäť 20 % piesku, pri treťom vysypú 50 %. A do miešačky sa posledný z Trojsteňákov trafí len so 40 % úspešnosťou. Koľko percent dostupného piesku štvorica prepraví až do miešačky?

Zo zadania nám je jasné, že z jamy sa na kopu dostane len 80 % = 8/10 piesku. Z tohto množstva sa do fúrika dostane iba 8/10, a zo zvyšku sa do vedra dostane len 50 % = 5/10. Nakoniec sa do miešačky dostane 40 % = 4/10 z ostávajúceho množstva.

Celkovo sa teda do miešačky dostane

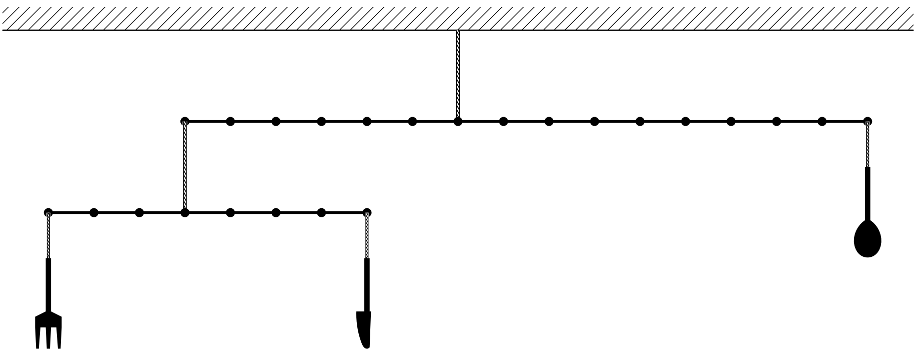
$$\frac{8}{10}\cdot\frac{8}{10}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{10}=\frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}=\frac{32}{250}=\frac{16}{125}=12{,}8\,\%\,.$$

Do miešačky Trojsteňáci prepravia 12,8 % dostupného piesku.

Miroslav Hanzelka

Úloha 16 ... Ťažký príbor

Koľko váži celý príbor, ak vidlička váži 60 g? Hmotnosti pák a kĺbov zanedbajte.



Vyriešiť musíme sústavu dvojzvratných pák. Na to, aby bola páka v rovnováhe, veľkosti momentov tiažových síl závaží musia byť rovnaké:

$$m_1 r_1 = m_2 r_2 \quad\Rightarrow\quad \frac{m_1}{m_2}=\frac{r_2}{r_1}\,.$$

Najprv zistíme hmotnosť noža m_n. Rameno pri vidličke má dĺžku 3 a pri noži 4. Hmotnosť vidličky m_v je 60 g. Ak dosadíme do uvedeného vzorca, získame

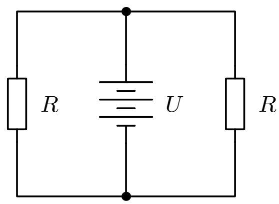
$$\frac{m_\mathrm{n}}{m_\mathrm{v}} = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad m_\mathrm{n} = 60\,\mathrm{g} \cdot \frac{3}{4} = 45\,\mathrm{g}\,.$$

Súčet hmotností závaží na ľavej páke je $m_\mathrm{n} + m_\mathrm{v} = 105\,\mathrm{g}$. Ľavé rameno hornej páky má dĺžku 6 a rameno pri lyžičke 9. Ak znovu dosadíme do vzorca vyššie, zistíme, že lyžička váži 70 g. Teraz stačí sčítať jednotlivé hmotnosti a dostaneme hmotnosť celého príboru $m = 175\,\mathrm{g}$.

Jakub Sláma

Úloha 17 ... Zuzkin obvod

Na obrázku je Zuzkin nový elektrický obvod. Skladá sa z dvoch rezistorov, z ktorých má každý odpor $R = 3\,\Omega$. Je pripojený k zdroju jednosmernéo napätia s veľkosťou $U = 2\,\mathrm{V}$. Aký prúd prechádza zdrojom napätia?



Keď sa pozrieme na Zuzkin obvod, zistíme, že je to vlastne paralelné zapojenie dvoch rezistorov. Celkový odpor obvodu je

$$\frac{1}{R_\mathrm{c}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R}\,, \quad \Rightarrow \quad R_\mathrm{c} = \frac{R}{2} = 1{,}5\,\Omega\,.$$

Prúd je $I = U/R_\mathrm{c}$, dosadíme a dostaneme výsledok

$$I = \frac{U}{R_\mathrm{c}} = \frac{2U}{R} = \frac{4}{3}\,\mathrm{A} \doteq 1{,}3\,\mathrm{A}\,.$$

Prúd prechádzajúci zdrojom je 1,3 A.

Karel Kolář

Úloha 18 ... Čokoládová hviezda

Vo veľmi vzdialenej slnečnej sústave lietajú okolo hviezdy Orion tri vesmírne lode po kruhových dráhach. Najvnútornejšia loď má polomer dráhy $r_1 = 150\,000\,\mathrm{km}$, prostredná loď $r_2 = 200\,000\,\mathrm{km}$ a najvzdialenejšia loď má polomer dráhy $r_3 = 250\,000\,\mathrm{km}$. Všetky lode letia vďaka svojmu pohonu na antihmotu rovnakou rýchlosťou $v = 50\,000\,\mathrm{km/rok}$. Na začiatku sa lode nachádzajú na jednej priamke. Koľkokrát obehne najvzdialenejšia loď hviezdu Orion, kým sa lode znova stretnú na jednej priamke?

Pomer polomerov dráh je $3 : 4 : 5$, čo je aj pomer ich obežných dôb, pretože všetky lode obiehajú rovnakou rýchlosťou. Lode sa stretávajú na jednej priamke po takom počte obehov, ktorý je rovný najmenšiemu spoločnému násobku čísel 3, 4 a 5. Ľahko určíme, že najmenším spoločným násobkom je číslo $3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$, pretože sú to nesúdeliteľné čísla. Z toho vieme určiť, že najvzdialenejšia loď obehne okolo hviezdy Orion $60/5 = 12$krát.

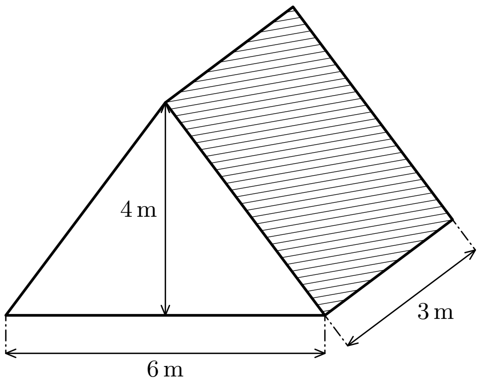
Jakub Sláma

Úloha 19 ... Horolezec amatér

Bugy sa rozhodol, že si v podkrovnej izbe širokej $s = 6\,\mathrm{m}$ a dlhej $l = 3\,\mathrm{m}$, postaví na jednej zo šikmých stien horolezeckú stenu. Koľko metrov štvorcových má k dispozícii, ak rez strechou má tvar rovnoramenného trojuholníku a najvyšší bod izby má kolmú vzdialenosť od podlahy $h = 4\,\mathrm{m}$?

Pomocou Pytagorovej vety vypočítame jeden z rozmerov horolezeckej steny c: na obrázku nájdeme pravouhlý trojuholník so stranami $s/2 = 3\,\mathrm{m}$ a $h = 4\,\mathrm{m}$. Teda platí:

$$c^2 = h^2 + \left(\frac{s}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{(4\,\mathrm{m})^2 + (3\,\mathrm{m})^2} = \sqrt{25\,\mathrm{m}^2} = 5\,\mathrm{m}\,.$$



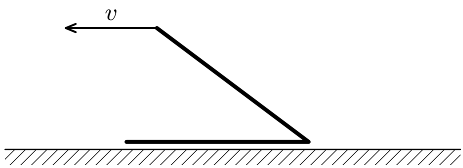
Teraz už vieme dopočítať plochu steny (zo zadania vieme, že dĺžka izby je $l = 3\,\mathrm{m}$): $S = 5\,\mathrm{m} \cdot 3\,\mathrm{m} = 15\,\mathrm{m}^2$.

Bugy si teda môže postaviť stenu s plochou 15 metrov štvorcových.

Pavla Trembulaková

Úloha 20 ... Lepiaca páska

Na stole je nalepený kus lepiacej pásky s dĺžkou 0,5 m. Vlejd si vezme jeden jej koniec a začne ho strhávať rýchlosťou $v = 4\,\mathrm{cm/s}$ (rýchlosť ruky). Za aký čas Vlejd odlepí celú pásku?



Na začiatok, je dôležité si uvedomiť, že páska sa bude odlepovať rýchlosťou $v/2 = 2\,\mathrm{cm/s}$. Je to preto, že páska sa síce odlepuje, ale Vlejdova ruka sa od miesta kde sa páska odliepa vzďaľuje rovnakou rýchlosťou ako je rýchlosť odlepovania sa pásky. Sú to teda dva pohyby, medzi ktoré sa rýchlosť $v = 4\,\mathrm{cm/s}$ musí rozdeliť. Keďže na stole je $50\,\mathrm{cm}$ pásky, môžeme dopočítať čas

$$t = \frac{s}{v} = \frac{50\,\mathrm{cm}}{2\,\mathrm{cm/s}} = 25\,\mathrm{s}\,.$$

Lepiaca páska sa odlepí za 25 sekúnd.

Ku správnemu výsledku je možné prísť uvedomením si faktu, že ruka musela za čas t prejsť dráhu, ktorá je dvojnásobok dĺžky pásky.

David Němec

Úloha 21 ... Nuda

Jerguš sa v škole nudil, začal sa hrabať v školskej taške a objavil hraciu kocku. Začal si ju hádzať a vždy si zapísal, aké číslo na kocke padlo. Všimol si, že hodnota prvého hodu bola dvakrát väčšia ako hodnota druhého hodu, ktorá však bola tretinové oproti tretiemu hodu. Pri štvrtom hode padlo rovnako veľa, ako bol súčet prvého a druhého hodu, a pri piatom pokuse hodil polovicu z tretieho hodu. Nakoniec sčítal všetkých päť hodov. Aké číslo Jergušovi vyšlo?

Označme si x hodnotu druhého hodu. Ostatné hody si zapíšeme ako násobky tejto neznámej. Prvý hod je dvakrát väčší ako druhý, teda $2x$. Tretí hod je trojnásobok druhého, teda $3x$. Pri štvrtom hode Jergušovi padlo $2x + x = 3x$ a v piatom hode $3x/2$. Teraz si pomôžeme logickou úvahou. Vieme, že na kocke sú len čísla od 1 do 6. Aby bol výraz $3x/2$ celočíselný a menší ako 6, x musí byť 2 alebo 4. Z výrazu $3x$ si hneď všimneme, že pre $x = 4$ dostávame číslo väčšie ako 6. Správna hodnata x je teda 2. Dopočítame zvyšné hodnoty: 4, 2, 6, 6 a 3 a ich súčet je 21.

Simona Gabrielová

Úloha 22 ... Hojdačka

Enka a Aďo si chcú postaviť hojdačku z ľahkej dosky dlhej $4{,}2\,\mathrm{m}$ *a polena. Keď si zoženú potrebný materiál a postavia hojdačku, Enka chce, aby bola s Aďom v rovnováhe. V akej vzdialenosti od Aďa musí byť poleno, ak Aďo váži* $24\,\mathrm{kg}$*, Enka* $18\,\mathrm{kg}$ *a obaja sedia na koncoch dosky?*

Pomer hmotností Aďa a Enky je 4 : 3. Aby boli na hojdačke v rovnováhe, musí platiť tzv. momentová veta – momenty síl (súčin sily a jej vzdialenosti od polena) pôsobiacich na hojdačku musia byť v rovnováhe. To zariadime jednoducho, poleno umiestnime medzi Aďa a Enku tak, aby boli v prevrátenom pomere 3 : 4. Vtedy budú súčiny sily a vzdialenosti rovnaké.

Poleno teda musia umiestiť do vzdialenosti troch dielikov z celkových siedmich dielikov. Jeden dielik je rovný $4{,}2\,\mathrm{m}/7 = 0{,}6\,\mathrm{m}$, teda Aďo je od polena vzdialený $3 \cdot 0{,}6\,\mathrm{m} = 1{,}8\,\mathrm{m}$.

Tomáš Kremel

Úloha 23 ... Ten najmenší

Pre pravouhlý rovnobežník s celočíselnými dĺžkami strán platí, že číselná hodnota jeho obsahu je rovnaký ako číselná hodnota obvodu. Nájdite rozmery tohto štvoruholníka, ktorý má uvedenú vlastnosť a jeho obsah je čo najmenší.

Dĺžky strán rovnobežníka si označíme a a b, pre jeho obsah platí $S = ab$ a pre jeho obvod $o = 2(a + b)$. Teda hľadáme riešenie rovnice

$$ab = 2\,(a + b)\ .$$

Pravá strana rovnice je vždy párne číslo (lebo súčet $a + b$ násobíme dvomi). Aby celá rovnica platila, musí byť aj ľavá strana rovnice (ab) deliteľná dvomi. To nastane v prípade, že *aspoň jedno* z čísel a alebo b je párne. Predpokladajme, že a je párne. Ak by bolo $a = 2$ (čo je najmenšie párne číslo), zároveň by muselo platiť $2b = 2(2 + b)$, z čoho vyplýva, že $2b = 4 + 2b$. To ale nie je pravda, lebo $0 \neq 4$. Druhé najmenšie a, ktoré môže vyhovovať zadaniu je $a = 4$. Ak za a dosadíme $4a$, dostaneme

$$4b = 2\,(4 + b)\ , \quad \Rightarrow \quad 4b = 8 + 2b\,, \quad \Rightarrow \quad b = 4\,.$$

Rovnakým spôsobom dpočítame, že pre $a = 6$ podmienku vyššie spĺňa $b = 3$. Hodnota obsahu tohto útvaru je ale $6{\cdot}3 = 18 > 16$. Ďalej pre $a = 8$ a $a = 16$ nenájdeme celočíselné b. A pre $a > 16$ už čísla b ani nemusíme hľadať, pretože ab bude určite väčšie ako 16.

Hľadaný rovnobežník s najmenším obsahom je teda štvorec s rozmermi 4×4.

Patrik Švančara

Úloha 24 ... Teplé mliečko

Kajka potrebovala FtáKopySkovi ohriať mliečko. Mala $V = 0{,}25\,\ell$ mlieka s teplotou $t_0 = 20\,^\circ\mathrm{C}$, a potrebovala ho ohriať na teplotu $t_1 = 42\,^\circ\mathrm{C}$. Po ruke mala iba rýchlovarnú kanvicu. Zapojila ju k zdroju elektrického napätia $U = 220\,\mathrm{V}$, ktorý do kanvice privádzal prúd $I = 3{,}9\,\mathrm{A}$. Ako dlho musí Kajka čakať, kým sa mliečko ohreje? Hustota mlieka je rovnaká ako hustota vody a jeho merná tepelná kapacita je $c = 3\,900\,\mathrm{J/(kg{\cdot}^\circ C)}$. Tepelné straty zanedbajte.

Z kalorimetrickej rovnice vieme, že teplo, ktoré musíme dodať mliečku aby sa ohrialo na požadovanú teplotu je $Q = mc\Delta t$, kde $m = \varrho V$ je hmotnosť mlieka a Δt je rozdiel medzi koncovou a počiatočnou teplotou (v našom prípade $\Delta t = 22\,^\circ\mathrm{C}$). Potom vieme, že práca, ktorú vykoná kanvica je $W = Pt = UIt$. Táto práca sa odovzdá mlieku vo forme tepla, teda platí $Q = W$.

Úpravou dostaneme

$$t = \frac{\varrho V c \Delta t}{UI} = \frac{1\,\mathrm{kg}/\ell \cdot 0{,}25\,\ell \cdot 3\,900\,\mathrm{J(kg{\cdot}^\circ C)} \cdot 22\,^\circ\mathrm{C}}{220\,\mathrm{V} \cdot 3{,}9\,\mathrm{A}} = \frac{21\,450}{858}\,\mathrm{s} = \frac{250}{10}\,\mathrm{s} = 25\,\mathrm{s}\,.$$

Mlieko sa v kanvici ohreje na požadovanú teplotu za 25 s.

Jakub Sláma

Úloha 25 . . . Karimatka

Artur ide na letné sústredenie FKS *a berie si karimatku, ktorá má tvar kvádru s dĺžkou l, šírkou d a výškou h. Artur si karimatku natesno zroluje pozdĺž dlhšej strany l do tvaru valca. Aký bude polomer tohoto valca? Zanedbajte „zub“, ktorý vznikne na konci karimatky.*

Pri rolovaní Artur vytvaruje z bočnej strany s rozmermi $l \times h$ podstavu valca s polomerom r, ktorý chceme vypočítať. Pri našom zanedbaní bude platiť, že obe plochy sú rovnaké a teda platí $lh = \pi r^2$. Odtiaľ vyjadríme r a dostaneme

$$r = \sqrt{\frac{lh}{\pi}}\,.$$

Polomer zrolovanej karimatky bude $r = \sqrt{lh/\pi}$.

Jakub Sláma

Úloha 26 . . . Zrkadlá

Tinka rada cestuje vlakmi. Minule mala miestenku v kupé, v ktorom boli oproti sebe umiestnené dve zrkadlá. To malo za následok, že pri pohľade do jedného zo zrkadiel mierne zboku videla veľa obrazov svojej tváre: rvý obraz od zrkadla, na ktorý sa pozerala, druhý ako obraz obrazu obrazu, tretí ako obraz obrazu obrazu obrazu obrazu a tak ďalej. V akej zdanlivej vzdialenosti videla Tinka druhý pozorovaný obraz, ak kupé bolo široké 2 m *a Tinka stála presne uprostred?*

Tinka bola v kupé vzdialená 1 m od zrkadla pred ňou (na ktoré sa pozerala). V rovnakej vzdialenosti od tohto zrkadla potom vidí aj svoj obraz. Od prvého obrazu je teda Tinka vzdialená 2 m.

Tento obraz je od zrkadla za Tinkou vzdialený $2\,\mathrm{m} + 1\,\mathrm{m} = 3\,\mathrm{m}$. Obraz tohto obrazu je v zrkadle za Tinkou vzdialený tiež 3 m, teda od zrkadla pred Tinkou je vzdialený $2\,\mathrm{m} + 3\,\mathrm{m} = 5\,\mathrm{m}$.

Po zobrazení aj týmto zrkadlom Tinka uvidela obraz obrazu vzdialený 5 m od zrkadla. Keďže bola od zrkadla vzdialená ešte 1 m, druhý pozorovaný obraz bol od Tinky vzdialený 6 m.

Patrik Švančara

Úloha 27 . . . Dvojhviezda

Paťko na nočnej oblohe pozoruje dvojhviezdu, o ktorej si myslí, že je od Zeme vzdialená 8,24 *parsekov* (pc)*. Obe zložky dvojhviezdy Paťko pozoruje pod uhlom $1''$. Ako ďaleko sú od seba vzdialené zložky dvojhviezdy v skutočnosti? Vzdialenosť vyjadrite v astronomických jednotkách* (AU)*.*
Hint: *Jeden parsek je vzdialenosť, z ktorej je jedna astronomická jednotka pozorovaná pod uhlom $1''$.*

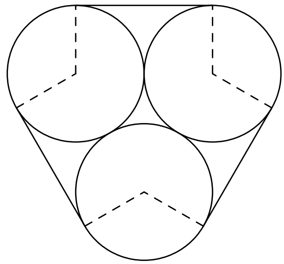
Keďže sa Paťko pozerá na dvojhviezdu pod rovnakým uhlom, ako je uhol pod ktorým je definovaná vzdialenosť jedného parseku, stačí z podobnosti trojuholníkov určiť hľadanú dĺžku. Vzdialenosť Zeme a dvojhviezdy je 8,24 pc, čo je 8,24-krát väčšia vzdialenosť ako jeden parsek.

Preto bude aj vzdialenosť hviezd videných pod uhlom $1''$ 8,24-krát väčšia, než 1 AU (astronomická jednotka). Výsledná vzdialenosť medzi zložkami dvojhviezdy je teda 8,24 AU.

David Němec

Úloha 28 ... Duškove plechovky

Duško má 3 plechovky s polomerom podstavy $r = 5\,\mathrm{cm}$. Postavil ich tesne k sebe tak, aby stredy ich podstáv tvorili rovnostranný trojuholník. Duško by ich rád omotal potravinovou fóliou. Akú dlhú potravinovú fóliu potrebuje, aby ich raz omotal?



Pohľadom zhora si nakreslíme plechovky a doplníme kolmice zo stredu ich podstáv na rovné úseky fólie. Z obrázku je vidieť, že zohnuté časti fólie tvoria jednú celú kružnicu a rovné časti dajú šesťnásobok polomeru kružnice. Dĺžka Duškovej fólie je potom

$$l = 2\pi r + 6r \doteq 2 \cdot \frac{22}{7} \cdot 5\,\mathrm{cm} + 6 \cdot 5\,\mathrm{cm} = \frac{430}{7}\,\mathrm{cm}\,.$$

Duško potrebuje aspoň $430/7\,\mathrm{cm}$ fólie.

Miroslav Hanzelka

Úloha 29 ... Odporná

Janíčko má tri rezistory s odporom $R = 1\,\Omega$. Rád sa s nimi hrá tak, že ich zapojí vždy tak, aby všetkými rezistormi tiekol prúd. Najskôr ich zapojil jedným spôsobom a zapísal si hodnotu výsledného odporu, potom ich zapojil inak (tak, aby mali iný odpor) a znovu si zapísal výsledný odpor zapojenia. Takto si Janíčko zapísal hodnoty všetkých možných výsledných odporov zapojenia a výsledky sčítal. Akú hodnotu dostal?

Sú štyri možné kombinácie zapojenia. Všetky rezistory môžeme zapojiť sériovo (schéma 1), všetky rezistory môžeme zapojiť paralelne (schéma 2), dva rezistory môžeme zapojiť sériovo a jeden rezistor k nim paralelne (schéma 3), dva rezistory paralelne a k nim jeden rezistor sériovo (schéma 4).

Pre určenie celkového odporu sériového zapojenia rezistorov sčítame odpory na jednotlivých rezistoroch:

$$R_1 = R + R + R = 3R\,.$$

V prípade paralelného zapojenia je prevrátená hodnota celkového odporu rovná súčtu prevrátených hodnôt jednotlivých odporov, teda odpor tohto zapojenia je

$$R_2 = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{1}{3}R\,.$$

Schéma 1

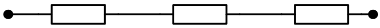


Schéma 2

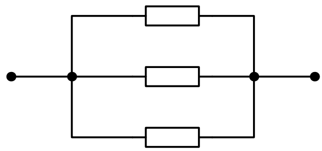


Schéma 3

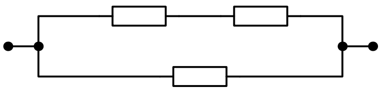
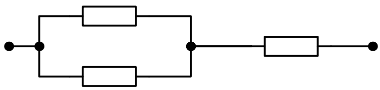


Schéma 4



Ak máme kombinované zapojenia, určíme odpory v jednotlivých vetvách a potom použijeme už spomenuté vzťahy Pre jednotlivé schémy postupne máme

$$R_3 = \frac{1}{\frac{1}{R+R} + \frac{1}{R}} = \frac{2}{3}R\,,$$
$$R_4 = R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R}} = \frac{3}{2}R\,.$$

Ak sčítame hodnoty všetkých výsledných odporov, zistíme, že Janíčko dostal celkový odpor $5{,}5\,\Omega$.

Jakub Sláma

Úloha 30 ... Posolené more

Koľko soli by Samo musel nasypať do Baltského mora, aby malo rovnakú salinitu (slanosť) ako Červené more? Rozloha Baltského mora je $400\,000\,\mathrm{km}^2$ *a jeho priemerná hĺbka* $50\,\mathrm{m}$. *Priemerná salinita Baltského mora je* $10\,‰$, *Červeného mora* $40\,‰$ *(salinita* $1‰$ *predstavuje* $1\,\mathrm{g}$ *soli na* $1\,\ell$ *vody).*

Potrebujeme vypočítať objem Baltského mora $V = Sh$ kde S je jeho rozloha a h hĺbka. Po správnej premene jednotiek ($1\,\mathrm{km}^2 = 1\,000\,000\,\mathrm{m}^2$) dostávame

$$V = Sh = 1\,000\,000 \cdot 400\,000\,\mathrm{m}^2 \cdot 50\,\mathrm{m} = 4 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}^2 \cdot 5 \cdot 10^1\,\mathrm{m} =$$
$$= (20 \cdot 10^{11+1})\,\mathrm{m}^3 = 2 \cdot 10^{13}\,\mathrm{m}^3 = 2 \cdot 10^{16}\,\mathrm{dm}^3 = 2 \cdot 10^{16}\,\ell\,.$$

Vieme, že $1\,\ell$ vody z Baltského mora obsahuje $10\,\mathrm{g}$ soli. Samo ale chce, aby $1\,\ell$ obsahoval $40\,\mathrm{g}$ soli. Preto musí na každý liter vody pridať $30\,\mathrm{g}$ soli. Potrebná hmotnosť soli je

$$m = 2 \cdot 10^{16} \cdot 30\,\mathrm{g} = 6 \cdot 10^{17}\,\mathrm{g} = 6 \cdot 10^{14}\,\mathrm{kg}\,.$$

Aby malo Baltské more rovnakú salinitu ako Červené, Samo by do neho musel nasypať neskutočných $6 \cdot 10^{14}$ kg soli.

Veronika Dočkalová

Úloha 31 ... Ideme na Náboj!

Katka a Samko idú na Náboj. Prvú hodinu išli rýchlosťou v. Potom náhle zrýchlili a ďalšiu polhodinu išli rýchlosťou $2v$. Keď sa im podarilo dostať do cieľa, Samko zistil, že ich priemerná rýchlosť bola o $20\,\mathrm{km/h}$ väčšia ako rýchlosť v. Aká bola priemerná rýchlosť v_p?

Priemerná rýchlosť je podiel celkovej dráhy prejdenej za celkový čas, ktorý je v našom prípade $1{,}5\,\mathrm{h}$. Celkovú dráhu vypočítame pomocou vzorčeka $s = vt$:

$$s = v \cdot 1\,\mathrm{h} + 2v \cdot 0{,}5\,\mathrm{h}\,,$$

Keďže vieme, že v_p je rovnaká ako $v + 20\,\mathrm{km/h}$, môžeme napísať rovnicu

$$v_\mathrm{p} = \frac{s}{t} = \frac{v + 2v \cdot 0{,}5}{1{,}5} = v + 20\,.$$

V tejto rovnici sme schválne nepísali jednotky. Vieme ale, že všetky dráhy sú v kilometroch, časy v hodinách a rýchlosti v km/h. Z rovnice napokon dostávame

$$\frac{v+v}{1{,}5} = v + 20 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3}v = v + 20 \quad \Rightarrow \quad v = 60\,.$$

Ich priemerná rýchlosť bola $v_\mathrm{p} = 60\,\mathrm{km/h} + 20\,\mathrm{km/h} = 80\,\mathrm{km/h}$.

Jakub Sláma

Úloha 32 ... Pečieme tortu

Jirka mal narodeniny. Čajka a Zuzka sa rozhodli, že mu urobia radosť a upečú tortu. Pripravili si cesto, z ktorého vytvarovali kruh s polomerom r. Potom sa však rozhodli, že na túto príležitosť bude oveľa lepšia štvorcová torta, a tak z už pripraveného kruhu vykrojili najväčší možný štvorec, z ktorého potom tortu upiekli. Aká veľká časť z pôvodného množstva cesta ostala Zuzke a Čajke?

Kruh, ktorý si Čajka a Zuzka pripravili mal polomer r. Vieme, že z neho vykrojili najväčší možný štvorec, teda uhlopriečka štvorca meria $2r$. Stranu štvorca označme ako a. Trojuholník, ktorého prepona meria $2r$, má odvesny dĺžky a, môžeme teda napísať Pytagorovú vetu.

$$a^2 + a^2 = 4r^2\,.$$

Plocha cesta, ktorá Čajke a Zuzke ostala, je rozdiel týchto plôch, teda

$$S_\mathrm{zvyšok} = S_\mathrm{kruh} - S_\square = \pi r^2 - 2r^2 = r^2(\pi - 2)\,.$$

Aby sme vyjadrili časť, ktorá im ostala, vydelíme plochu zvyšného cesta plochou cesta, ktoré mali na začiatku, teda plochou kruhu. Dostaneme výsledný pomer

$$\frac{S_{\text{zvyšok}}}{S_{\text{kruh}}} = \frac{r^2(\pi - 2)}{\pi r^2} = 1 - \frac{2}{\pi} \doteq 36\,\% \,.$$

Čajke a Zuzke teda zostane 36 % cesta.

Jakub Sláma

Úloha 33 ... Autohydraulika

Silvia si v obchode so špeciálnymi fyzikálnymi pomôckami kúpila nové hydraulické zariadenie, ktoré sa skladá z dvoch prepojených piestov s plochami $100\,\mathrm{cm}^2$ a $1\,000\,\mathrm{m}^2$. Na väčší piest umiestila merací prístroj s hmotnosťou $250\,\mathrm{kg}$ a zistila, že dvíhať ho pomaly do výšky je úplne jednoduché. Akú prácu Silvia pri dvíhaní vykonala, ak prístroj zdvihla do výšky $2\,\mathrm{m}$?

Na vyriešenie tohto príkladu si stačí uvedomiť, že práca, ktorú Silvia vykonala je rovnaká ako práca, ktorú vykoná zdvíhané teleso v tiažovom poli. Tento fakt vyplýva z Pascalovho zákona. Takže môžeme počítať

$$W_{\text{Silvia}} = Fs = mgs = 250\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m{\cdot}s}^{-2} \cdot 2\,\mathrm{m} = 5\,000\,\mathrm{J} = 5\,\mathrm{kJ}\,.$$

Silvia teda pri zdvíhaní vykonala prácu 5 kJ.

Patrik Švančara

Úloha 34 ... Faktoriál

Koľko núl je na konci dekadického zápisu čísla, ktoré Poli dostane vynásobením všetkých čísel od 1 do 100?

Keď si všetky čísla rozložíme na prvočísla, po vynásobení získame súčin veľmi veľkého počtu prvočísel. Dôležité sú však len čísla 2 a 5, lebo ich vynásobením dostávame 10. Teda nulu na konci výsledku. Toto je jediný spôsob, ako pripísať nulu do výsledku, lebo číslo 10 nemôžeme dostať vynásobením iných dvoch prvočísel.

Keďže dvojek je viac ako pätiek (každé druhé číslo obsahuje aspoň jednu 2), stačí nám spočítať koľko 5 je v prvočíselnom zápise. Po jednej pätke získame z jej násobkov $(5, 10, 15, \dots)$, čo je spolu 20 pätiek. Čísla $25, 50, 75$ a 100 sú deliteľné aj 25, teda vo svojom prvočíselnom rozklade obsahujú dve päťky. K naším 20 päťkám musíme pripočítať ešte ďalšie 4 päťky. To je spolu 24 pätiek: Poliho výsledok má teda na konci 24 núl.

Jakub Sláma

Úloha 35 ... Príprava bronzu

Helboj rád zmiešava veci. Zistil, že bronz je zliatina cínu a medi v hmotnostnom pomere $1:3$. *V tabuľkách našiel, že hustota cínu je približne* $\varrho_{Sn} = 7\,\mathrm{kg/dm^3}$ *a hustota medi* $\varrho_{Cu} = 9\,\mathrm{kg/dm^3}$. *Rád by vedel aký bude pomer objemov cínu a medi* V_{Sn}/V_{Cu} *potrebných na výrobu* $m = 1\,\mathrm{kg}$ *bronzu?*

Pomer hmotností $1:3$ znamená, že v $1\,\mathrm{kg}$ bronzu bude $1/4\,\mathrm{kg}$ cínu a $3/4\,\mathrm{kg}$ medi. Ich objemy sú:

$$V_{\mathrm{Sn}} = \frac{\frac{1}{4}\,\mathrm{kg}}{7\,\mathrm{kg/dm^3}} = \frac{1}{28}\,\mathrm{dm^3}\,,$$
$$V_{\mathrm{Cu}} = \frac{\frac{3}{4}\,\mathrm{kg}}{9\,\mathrm{kg/dm^3}} = \frac{3}{36}\,\mathrm{dm^3}\,.$$

Vydelením dostaneme hľadaný pomer objemov

$$\frac{V_{\mathrm{Sn}}}{V_{\mathrm{Cu}}} = \frac{\frac{1}{28}\,\mathrm{dm^3}}{\frac{3}{36}\,\mathrm{dm^3}} = \frac{36}{3\cdot 28} = \frac{3}{7}\,.$$

Pomer objemov cínu a medi v $1\,\mathrm{kg}$ bronzu je $3:7$.

Miroslav Hanzelka

Úloha 36 ... Energeťák

Unavený turista sa zastavil v obchode v Dolnej Marikovej a kúpil si chladený energetický nápoj. Ten má teplotu $t_0 = 7\,^\circ\mathrm{C}$, *objem* $V = 250\,\mathrm{m}\ell$ *a jeho energetická hodnota je* $\varepsilon = 1\,000\,\mathrm{kJ/kg}$. *Svojimi vlastnosťami je nápoj podobný vode, má teda hustotu* $\varrho = 1\,\mathrm{kg}/\ell$ *a mernú tepelnú kapacitu* $c = 4\,\mathrm{kJ/(kg{\cdot}^\circ C)}$. *Koľko energie turista z nápoja získa, ak ho po vypití vo svojom tele zahreje na teplotu* $t_1 = 37\,^\circ\mathrm{C}$*?*

Energetická hodnota ε nám hovorí, koľko energie získame z jedného kila nápoja. Zo známeho objemu a hustoty vieme určiť hmotnosť nápoja

$$m = \varrho V = 1\,\mathrm{kg}/\ell \cdot 0{,}25\,\ell = 0{,}25\,\mathrm{kg}\,.$$

Z tohto množstva získa turista energiu

$$E_1 = m\varepsilon = 1\,000\,\mathrm{kJ/kg}\cdot 0{,}25\,\mathrm{kg} = 250\,\mathrm{kJ}\,.$$

Zároveň sa v tele musí nápoj zohriať o teplotu

$$\Delta t = t_1 - t_0 = (37-7)\,^\circ\mathrm{C} = 30\,^\circ\mathrm{C}\,,$$

ktorú, keď dosadíme do kalorimetrickej rovnice, získame energiu, ktorú turista musí odovzdať nápoju

$$E_2 = mc\Delta t = 0{,}25\,\mathrm{kg}\cdot 4\,\mathrm{kJ/(kg{\cdot}^\circ C)}\cdot 30\,^\circ\mathrm{C} = 30\,\mathrm{kJ}\,.$$

Celková energia, ktorú turista vypitím nápoja získa, je rovná rozdielu energií

$$E = E_1 - E_2 = 250\,\mathrm{kJ} - 30\,\mathrm{kJ} = 220\,\mathrm{kJ}\,.$$

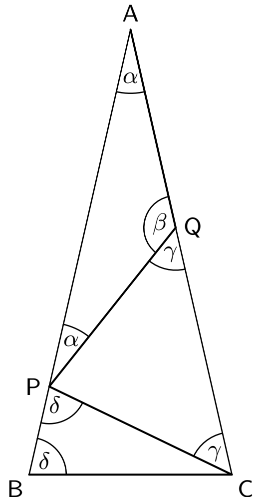
Turista teda vypitím chladeného energetického nápoja získa 220 kJ.

Miroslav Hanzelka

Úloha 37 ... Uholná

Lenka si namaľovala rovnoramenný trojuholník ABC *a s prekvapením zistila, že na jeho ramenách* AB*, resp.* AC*, našla body* P*, resp.* Q*, také, že* $|\mathsf{BC}| = |\mathsf{CP}| = |\mathsf{PQ}| = |\mathsf{QA}|$. *Určte veľkosť uhlu* $\measuredangle$BAC*.*

Hľadaný uhol si označme ako α. Z rovnoramenného trojuholníka AQP vidíme, že a $\measuredangle \mathsf{APQ} = \alpha$. Ďalej si označme $\measuredangle \mathsf{AQP} = \beta$. Tým sme si označili aj posledný vnútorný uhol trojuholníka AQP. Pretože súčet vnútorných uhlov v trojuholníku musí byť rovný 180°, môžeme zapísat prvú rovnicu



$$180^\circ = \alpha + \alpha + \beta\,, \quad \Rightarrow \quad \beta = 180^\circ - 2\alpha\,.$$

Ak sčítame uhol β s uhlom $\measuredangle \mathsf{PQC} = \gamma$, tiež musíme dostať 180°. Preto je uhol γ rovný

$$\gamma = 180^\circ - \beta = 180^\circ - (180^\circ - 2\alpha) = 2\alpha\,.$$

Keďže aj trojuholník PQC je rovnoramenný, uhlu γ sa bude rovnať aj uhol $\measuredangle$QCP. Tretí vnútorný uhol v tomto trojuholníku bude rovný $\measuredangle \mathsf{CPQ} = 180^\circ - 2\gamma$.

Ďalej si označme uhol $\measuredangle \mathsf{BPC} = \delta$. Tento uhol, spolu s $\measuredangle$CPQ a $\measuredangle \mathsf{QPA} = \alpha$ tvoria priamy uhol, čiže dokopy dávajú 180°. Pre uhol δ potom platí

$$\delta = 180^\circ - \measuredangle CPQ - \alpha = 180^\circ - (180^\circ - 2\gamma) - \alpha = 180^\circ - 180^\circ + 2\gamma - \alpha = 2 \cdot 2\alpha - \alpha = 3\alpha\,.$$

Už sme skoro na konci, stačí si uvedomiť, že trojuholník PCB je tiež rovnoramenný a preto sa uhlu δ rovná aj uhol $\measuredangle$PBC. Keďže ale aj samotný trojuholník ABC je rovnoramenný, uhlu δ sa musí rovnať aj uhol $\measuredangle$BCA. Súčet vnútorných uhlov v trojuholníku ABC teda je

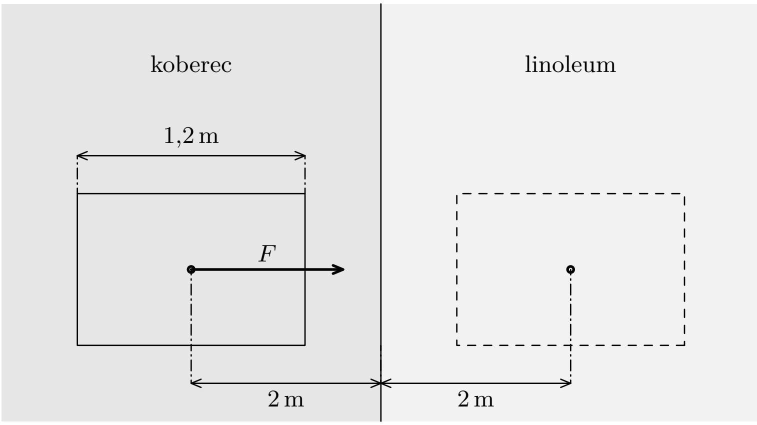
$$180^\circ = \alpha + \delta + \delta = \alpha + 2 \cdot 3\alpha = 7\alpha\,.$$

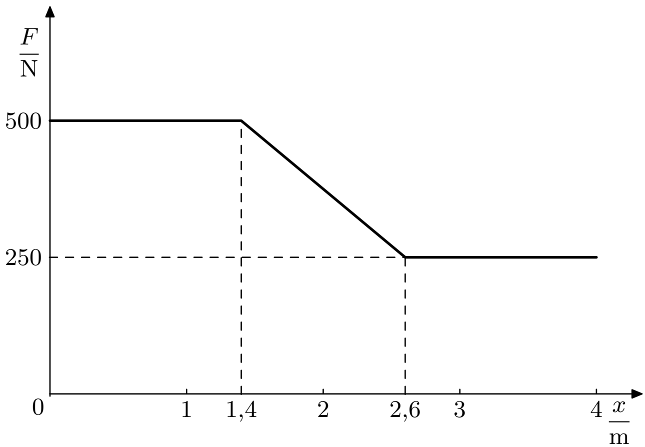
Hľadaný uhol $\measuredangle \mathsf{BAC} = \alpha = 180/7^\circ$.

Patrik Švančara

Úloha 38 ... Sťahovanie

Olívia má v obývačke skriňu s hmotnosťou $m = 50\,\mathrm{kg}$ a šírkou $1{,}2\,\mathrm{m}$. Chce presťahovať jej stred o $4\,\mathrm{m}$ ďalej. Medzi pôvodnou a novou polohou skrine sú dva metre koberca a potom dva metre linolea. Koeficient trenia medzi skriňou a kobercom je $f_1 = 1{,}0$ a medzi skriňou a linoleom $f_2 = 0{,}5$. Nakreslite graf, kde na vodorovnej osi bude poloha stredu skrine a na zvislej osi sila, ktorou musíme skriňu tlačiť. Osi správne očíslujte.





Pokiaľ je skriňa celá na koberci, pri posúvaní musíme prekonať treciu silu $F_1 = mgf_1 = 500\,\mathrm{N}$. Keď je skriňa na linoleu, trecia sila je polovičná, lebo f_2 je oproti f_1 polovičný, teda $F_2 = 250\,\mathrm{N}$.

Kým je celá skriňa na koberci, je sila stále F_1. Po posunutí o $1{,}4\,\mathrm{m}$ sa skriňa začne presúvať na linoleum a sila bude rovnomerne klesať (v grafe bude sila šikmá úsečka), kým celá skriňa nebude na linoleu, teda po posunutí o šírku skrine 1,2 m. Odvtedy je sila rovná F_2 a do ukončenia pohybu sa nebude meniť.

Patrik Švančara

Úloha 39 ... Mocninná

Nájdite tri po sebe idúce prirodzené čísla, ktoré po sčítaní dajú piatu mocninu nejakého prirodzeného čísla.

Označme si tri po sebe idúce čísla ako n, $n+1$ a $n+2$. Pre ich súčet má platiť

$$n + (n+1) + (n+2) = m^5\,.$$

Ľavú stranu rovnice upravíme do tvaru $3(n+1) = m^5$. Pretože je n prirodzené, platí $n+1 > 1$. Toto číslo potom násobíme provčíslom tri v jeho prvej mocnine. Aby bola rovnica splnená, číslo tri teda musí deliť aj pravú stranu, čo znamená, že číslo m je deliteľné tromi.

Najmenšie m, ktoré túto podmienku spĺňa, je jednoducho $m = 3$. Riešiť musíme preto rovnicu $3(n+1) = 3^5$, ktorej riešenie je $n = 3^4 - 1 = 80$. Jedna z hľadaných trojíc je postupnosť $80, 81, 82$.

Táto úloha má v skutočnosti nekonečne mnoho riešení v tvare $n = m^5/3 - 1$, kde m je číslo deliteľné tromi. To znamená, že aj pre $m = 6, 9, 12, \ldots$ sme vieme tri po sebe idúce čísla.

Tomáš Kremel

Úloha 40 ... Horská dráha

Kubo išiel skúšať novú horskú dráhu. Na začiatku jazdy je vozík na vrchole stúpania vo výške $h = 20\,\mathrm{m}$, odkiaľ zíde dole. Dole je rovinka dlhá $s = 200\,\mathrm{m}$, na ktorej vozík brzdí s konštantným spomalením. S akým spomalením (záporným zrýchlením) vozík brzdí, ak zastaví presne na konci rovinky? Odporové sily zanedbajte.

Na začiatku má vozík nulovú rýchlosť a je vo výške $h = 20\,\mathrm{m}$. Má teda potenciálnu energiu $E_\mathrm{p} = mgh$. Pri vjazde na rovinku má rýchlosť v. Teda jeho kinetická energia je $E_\mathrm{k} = mv^2/2$ a potenciálna energia je nulová. Platí zákon zachovania energie:

$$E_\mathrm{p} = mgh = E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} \cdot 20\,\mathrm{m}} = 20\,\mathrm{m/s}\,.$$

Pri pohybe na rovinke, vozík rovnomerne spomaľuje z rýchlosti v na nulovú rýchlosť, teda platí $v = at$ a $s = at^2/2$. Z prvej rovnice vyjadríme čas $t = v/a$ a dosadíme do druhej. Dostaneme

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}a\frac{v^2}{a^2} = \frac{v^2}{2a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{v^2}{2s} = \frac{(20\,\mathrm{m/s})^2}{2 \cdot 200\,\mathrm{m}} = 1\,\mathrm{m/s^2}\,.$$

Vozík teda spomaľoval so spomalením $1\,\mathrm{m/s^2}$.

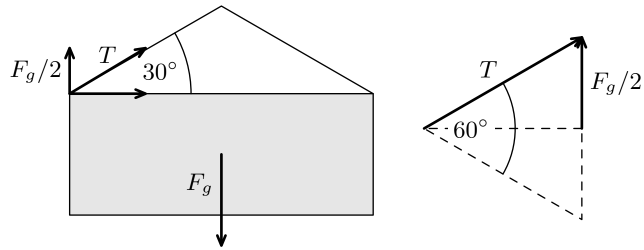
Jakub Sláma

Úloha 41 ... Obraz

Kubo si chce doma zavesiť obraz. Má však len jeden klinec a jeden kus špagátu, ktorý praskne, ak naň pôsobí sila väčšia ako $T = 100\,\mathrm{N}$. Aký najťažší obdĺžnikový obraz si Kubo môže zavesiť na špagát a klinec, ak špagát a obraz zvierajú uhol $\alpha = 30°$?

Všetko vysvetlí obrázok. Na obraz pôsobí sila $F_g = mg$, kde m je hmotnosť obrazu. Naviac tu pôsobia aj dve sily T v šikmom smere. Ak tieto sily rozložíme na vodorovné a zvyslé zložky (obrázok), vidíme, že vodorovné zložky pôsobia proti sebe, majú rovnakú veľkosť a vyrušia sa. Proti tiaži obrazu budú teda pôsobiť iba zvislé zložky.

Veľkosť zvislej zložky určíme tak, že si do obrázku rozkladu síl symetricky dokreslíme aj spodný trojuholník. Tento trojuholník má vnútorné uhly rovné 60°, je teda rovnostranný. Čo znamená, že dvojnásobok veľkosti zvislej sily musí byť rovný veľkosti samotnej sily T. Jedna polovica špagátu teda „drží" obraz silou $T/2$.



Obe polovice držia obraz silou T, ktorá vyrovnáva tiažovú silu F_g. Z tejto úvahy je hmotnosť obrazu

$$F_g = mg = T \quad \Rightarrow \quad m = \frac{T}{g} = \frac{100\,\mathrm{N}}{10\,\mathrm{m/s^2}} = 10\,\mathrm{kg}\,.$$

Najťažší obraz, ktorý si Kubo môže zavesiť, má hmotnosť 10 kg.

Pavla Trembulaková

Úloha 42 ... Kameň v ľade

Vo valcovej nádobe naplnenej vodou, ktorá má plochu podstavy $200\,\mathrm{cm^2}$, sa vznáša kocka ľadu. Vznáša sa, pretože v ľade je zamrznutý kamienok s hmotnosťou $100\,\mathrm{g}$ a hustotou $5\,000\,\mathrm{kg/m^3}$. Časom sa ľad roztopí a kamienok padne na dno. Čo sa stane s hladinou vody? Klesne, stúpne alebo sa nezmení? Ak sa zmení, tak o koľko?

Aby sa ľad s kameňom voľne vznášal, musia mať dokopy rovnakú hustotu ako voda, ktorá má hustotu $\varrho_\mathrm{v} = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} = 1\,\mathrm{g/cm^3}$. Vďaka znalosti hustoty kameňa ϱ_k a vody vieme dorátať objem ľadu V_l

$$\varrho_\mathrm{v} = \frac{m_\mathrm{k} + \varrho_\mathrm{l} V_\mathrm{l}}{\frac{m_\mathrm{k}}{\varrho_\mathrm{k}} + V_\mathrm{l}}\,,$$

$$1\,\mathrm{g/cm^3} = \frac{100\,\mathrm{g} + 0{,}9\,\mathrm{g/cm^3} \cdot V_\mathrm{l}}{\frac{100\,\mathrm{g}}{5\,\mathrm{g/cm^3}} + V_\mathrm{l}}\,.$$

vyriešením dostávame

$$V_\mathrm{l} = 800\,\mathrm{cm}^3\,.$$

Z objemu ľadu dorátame jeho hmotnosť a objem vody, ktorá vznikla jeho roztopením.

$$m_\mathrm{l} = \varrho_\mathrm{l} V_\mathrm{l} = 0{,}9\,\mathrm{g/cm}^3 \cdot 800\,\mathrm{cm}^3 = 720\,\mathrm{g}\,,$$

$$V_\mathrm{v} = \frac{m_\mathrm{l}}{\varrho_\mathrm{v}} = \frac{720\,\mathrm{g}}{1\,\mathrm{g/cm}^3} = 720\,\mathrm{cm}^3\,.$$

Rozdiel objemov je $720\,\mathrm{cm}^3 - 800\,\mathrm{cm}^3 = -80\,\mathrm{cm}^3$, čo znamená, že celkový objem látky v nádobe sa sa zmenšil a hladina vody musela *klesnúť*. Tento pokles zistíme tak, že rozdiel objemov vydelíme plochou podstavy nádoby S_p

$$\Delta h = \frac{\Delta V}{S_\mathrm{p}} = \frac{80\,\mathrm{cm}^3}{200\,\mathrm{cm}^2} = \frac{2}{5}\,\mathrm{cm} = 0{,}4\,\mathrm{cm}\,.$$

Vodná hladina po roztopení ľadu klesne o 0,4 cm.

David Němec

Na organizácii Náboja Junior 2014 sa podieľali nasledujúce organizácie:

Ústredným slovenským organizátorom je občianske združenie Trojsten, zastrešované *Fakultou matematiky, fyziky a informatiky UK v Bratislave*. V Českej republike súťaž organizoval fyzikálny korešpondenčný seminár Výfuk, aktivita *Matematicko-fyzikální fakulty UK v Praze*. Organizátori a spolupracovníci Výfuku boli tiež autormi zadaní a vzorových riešení úloh.

Na Slovensku sa Náboj Junior uskutočnil na 14 stredných školách:

Bratislava – *Gymnázium Grösslingova*
Hlohovec – *Gymnázium I. Kupca*
Nitra – *Gymnázium Párovská*
Lučenec – *Gymnázium B. S. Timravy*
Námestovo – *Gymnázium A. Bernoláka*
Žilina – *Gymnázium Veľká Okružná*
Poprad – *Gymnázium Kukučínova*
Partizánske – *Gymnázium Partizánske*
Púchov – *Gymnázium Púchov*
Brezno – *Gymnázium J. Chalupku*
Trstená – *Gymnázium Trstená*
Košice – *Gymnázium Alejová*
Banská Bystrica – *Gymnázium A. Sládkoviča*
Šurany – *Gymnázium Bernolákova*

V Českej republike sa Náboj Junior uskutočnil na 10 stredných a vysokých školách:

Praha – *Gymnázum Ch. Dopplera*
Praha –*Gymnázium Voděradská 2*
Brno – *Fakulta stroj. inženýrství VUT*
Čes. Budějovice – *Gymnázium Jírovcova*
Hradec Králové – *Univerzita Hr. Králové*
Karlovy Vary – *První české gymnázium v Karlových Varech*
Ostrava – *Gymnázium O. Havlové*
Česká Lípa – *Gymnázium Žitavská*
Olomouc – *Gymnázium Olomouc-Hejčín*
Třebíč – *Katolické gymnázium*