NÁBOJ junior

4. ročník

2015/16

Vzorová řešení

Milí příznivci matematiky a fyziky,

v rukou držíte brožurku čtvrtého ročníku soutěže Náboj Junior, ve které naleznete zadání a vzorová řešení 42 úloh této soutěže. Náboj Junior je týmová soutěž v řešení matematických a fyzikálních problémů určená pro žáky druhého stupně základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií. Spoluvyhlašovateli soutěže jsou Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy České republiky a Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy v Praze.

Letos Náboj Junior probíhal současně na třinácti místech České republiky a na šestnácti místech Slovenska. Veškeré informace o průběhu soutěže, včetně mezinárodních výsledků, jsou k nalezení na stránce `junior.naboj.org`. Pokud vás tato soutěž zaujala, jistě budete potěšeni zprávou, že v příštím roce proběhne další ročník.

Pokud byste chtěli uspořádat regionální kolo i ve vašem městě a zvýšit tak přístupnost soutěže v regionu, budeme velice potěšeni a rádi s vámi navážeme spolupráci. V případě zájmu nám napište na kontaktní e-mail.

Na organizaci soutěže se podíleli organizátoři a přátelé korespondenčního semináře Výfuk, který zastřešuje Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy v Praze, ve spolupráci s jednotlivými organizačními místy. Na Slovensku organizaci zabezpečilo občanské sdružení Trojsten.

Přejeme vám příjemné rozjímání nad příklady,

Organizátoři
`info-cz@junior.naboj.org`

Řešení úloh IV. ročníku Náboje Junior

Úloha 1 ... sběr papíru

Organizátoři Náboje Junior se zapojili do sběru papíru a řekli si, že ho chtějí vybrat 1 tunu. *David přinesl* 150 kg, *Terka dovezla* 4 500/15 kg, *Ladě se povedlo sehnat celkem přijatelné* 2/5 tuny, *Lukáš přinesl závratných* 120 000 g *a Patrik dopravil úžasných* 4 000 000 mg. *Kolik gramů papíru musí donést Petr, aby se organizátorům povedlo splnit jejich cíl?*

Abychom mohli jednotlivé hmotnosti sečíst, všechny je musíme převést na společné jednotky. Vybereme si třeba kilogramy: cíl organizátorů je tedy nasbírat celkem 1 000 kg. David přinesl 150 kg, Terka $4\,500/15\,\mathrm{kg} = 300\,\mathrm{kg}$, Lada $2/5\,\mathrm{t} = 2/5 \cdot 1\,000\,\mathrm{kg} = 400\,\mathrm{kg}$, Lukáš $120\,000\,\mathrm{g} = 120\,000/1\,000\,\mathrm{kg} = 120\,\mathrm{kg}$ a Patrik $4\,000\,000\,\mathrm{mg} = 4\,000\,000/1\,000\,000\,\mathrm{kg} = 4\,\mathrm{kg}$. Po sečtení dostáváme 974 kg, tudíž zbývá donést ještě 26 kg, což je v požadovaných jednotkách 26 000 g.

Úloha 2 ... Radka topí

Radka se po Vánocích vrátila na kolej, kde bylo pouhých 13 °C, *proto ve 14:15 zapnula všechna tři dostupná topení. První zvýší teplotu o* 4 °C *za* 3 *hodiny, druhé o* 2 °C *za hodinu a třetí o* 2 °C *za* 3 *hodiny. V kolik hodin bude v místnosti Radčiných oblíbených* 25 °C*?*

Nejdříve si spočítáme, o kolik jednotlivá topení zvýší teplotu v místnosti za hodinu. První zvýší teplotu o 4 °C za 3 hodiny, tedy o 4/3 °C za hodinu. Druhé za hodinu zvýší teplotu o 2 °C a třetí o 2/3 °C. Po sečtení dostaneme, že se každou hodinu zvýší teplota přesně o 4 °C. Rozdíl mezi původní a požadovanou teplotou je $(25 - 13)\,°\mathrm{C} = 12\,°\mathrm{C}$, což znamená, že místnost se vytopí na kýžených 25 °C za $12\,°\mathrm{C}/(4\,°\mathrm{C/h}) = 3\,\mathrm{h}$, tedy v 17:15.

Úloha 3 ... pronikavý parfém

Radka dostala k narozeninám nový parfém, který omylem vystříkla ve třídě. Vůně se od Radky šíří rychlostí 20 cm/s, *ale po* 9 s *se vůně rozplyne. Kolik spolužáků ucítí novou Radčinu vůni, pokud jsou všichni seřazeni tak, že tvoří pravidelnou čtvercovou síť okolo Radky a nejbližší spolužák je od Radky vzdálen* 1 m*?*

Nejdříve převedeme rychlost šíření vůně 20 cm/s do základních jednotek: $20\,\mathrm{cm/s} = 0{,}2\,\mathrm{m/s}$. Nyní již snadno dopočítáme vzdálenost d, do níž se vůně dostane, a to jako součin rychlosti a času: $d = 0{,}2\,\mathrm{m/s} \cdot 9\,\mathrm{s} = 1{,}8\,\mathrm{m}$. Pokud si nakreslíme obrázek rozmístění Radčiných spolužáků, zjistíme, že vůni ucítí čtyři nejbližší lidé, jejichž vzdálenost od Radky je 1 m, a čtyři lidé, kteří vůči Radce sedí úhlopříčně.[1] Další spolužáci jsou už ve vzdálenosti 2 m a více, ti již vůni neucítí. Celkem tedy vůni ucítí osm spolužáků.

[1] Dle Pythagorovy věty je jejich vzdálenost rovna $\sqrt{2}\,\mathrm{m} \doteq 1{,}4\,\mathrm{m}$.

Úloha 4 ... slepené kostky

Pepa má tři stejné hrací kostky. Jednu kostku vezme a na dvě její stěny přilepí zbylé dvě kostky takovým způsobem, aby součet teček, které na tomto útvaru zůstanou viditelné, byl co největší. Jaký je tento součet?

Protože kostky můžeme k sobě přilepit libovolnými stranami a můžeme s nimi libovolně otáčet, je snadné si rozmyslet, že nejlepší je slepit první dvě kostky a slepit je stěnami s jedničkami. Zbylou kostku pak přilepíme též jedničkovou stěnou na stěnu se dvěma tečkami.

Protože spoje překryly celkem tři stěny s jednou tečkou a jednu stěnu se dvěma tečkami, tedy nejmenší možnou kombinaci teček, které jsme schopni dosáhnout, od součtu hodnot na všech třech kostkách $3 \cdot (1+2+3+4+5+6) = 63$ musíme odečíst $3 \cdot 1 + 2 = 5$, čímž dostáváme výslednou hodnotu 58 teček.

Úloha 5 ... nový tablet

Patrik si koupil nový tablet, který stál 3 112 Kč*. U pokladny platil pěti tisícikorunovou bankovkou. Jaký je nejmenší možný počet bankovek a mincí, které mu pokladní mohla vrátit?*

Paní pokladní musí Patrikovi vrátit $(5\,000 - 3\,112)\,\text{Kč} = 1\,888\,\text{Kč}$. Tuto částku budeme skládat postupně od nejvyšších bankovek, které můžeme použít na snížení zbývající částky. Tisícikoruna nám částku sníží na 888 Kč, pětistovka poté na 388 Kč, dvoustovka na 188 Kč, stovka na 88 Kč, padesátikoruna na 38 Kč, které složíme z dvacetikoruny, desetikoruny, pětikoruny, dvoukoruny a koruny. Patrik získal nazpět 4 bankovky a 6 mincí, dohromady 10 bankovek a mincí.

Úloha 6 ... knihovnička

Pavel má zajímavou sbírku knížek: Nejtenčí knížka má hřbet tlustý 0,5 cm*, hřbet každé další knížky je pak o* 0,5 cm *tlustší, přičemž nejtlustší Pavlova knížka je široká* 11,5 cm*. Jaká je celková šířka Pavlovy sbírky?*

Celková šířka Pavlovy sbírky je dána pouhým součtem tlouštěk všech knížek, kterých je celkem $11{,}5/0{,}5 = 23$. Buď můžeme sčítat postupně nebo pomocí vzorce pro součet aritmetické řady:

$$\frac{23 \cdot (0{,}5\,\text{cm} + 11{,}5\,\text{cm})}{2} = 138\,\text{cm}\,.$$

Pavlova sbírka knížek má šířku 138 cm.

Úloha 7 ... dobíhání autobusu

Lucka přišla na zastávku přesně ve chvíli, kdy odjížděl její autobus. Autobus popojel 300 m *na křižovatku, kde stál* 30 s*, poté odbočil kolmo doprava a jel dalších* 400 m *na následující zastávku. Jak rychle musí Lucka běžet zkratkou přes park (od zastávky přímo k další zastávce), aby autobus na další zastávce stihla? Rychlost autobusu je* 10 m/s.

Nejprve si spočítáme, jak dlouho trvá autobusu cesta mezi dvěma uvedenými zastávkami. Dráhu 300 m rychlostí 10 m/s ujede autobus za $(300/10)\,\mathrm{s} = 30\,\mathrm{s}$, podobně pro část cesty za křižovatkou vychází 40 s. Cesta tedy autobusu trvá $30\,\mathrm{s} + 30\,\mathrm{s} + 40\,\mathrm{s} = 100\,\mathrm{s}$ (nesmíme zapomenout na 30 s, kdy stál na křižovatce). Vzdálenost, kterou Lucka musí uběhnout, spočítáme pomocí Pythagorovy věty: $c^2 = a^2 + b^2$, kde za a a b dosadíme uvedené vzdálenosti ze zadání. Vyjde nám $c = 500\,\mathrm{m}$. Má-li Lucka autobus stihnout, musí tuto vzdálenost překonat za 100 s, tedy musí běžet rychlostí $(500/100)\,\mathrm{m/s} = 5\,\mathrm{m/s}$.

Úloha 8 ... pan Alzheimer

Pan Alzheimer často zapomíná svůj věk, a proto si na lednici věší papír s nápovědami, neboť všechny významné události jeho života se odehrály přesně ve dnech jeho narozenin. V jedné třináctině svého života se naučil jíst příborem, v jedné šestině se poprvé zamiloval, v jedné třetině zdolal Mount Everest a v jedné polovině byl na dně Mariánského příkopu. Kolik mu bylo let, když tuto nápovědu psal?

Neboť se všechny tyto významné události udály v den jeho narozenin, tak jeho přesný věk byl v ten den celé číslo. Jinak řečeno, věk pana Alzheimera musí být vždy dělitelný danou částí jeho života. V úloze tedy hledáme vhodný společný násobek čísel 2, 3, 6 a 13. Proto si je rozložíme na prvočísla: 2, 3 a 13 již jsou prvočísla, číslo 6 rozložíme na $2 \cdot 3$.

Nejmenší společný násobek spočteme jako $2 \cdot 3 \cdot 13 = 78$ (výsledek je pak dělitelný i šesti). Pan Alzheimer se pak mohl dožít libovolného celočíselného násobku 78 let. Ale protože to je člověk, u kterého očekáváme, že se dožívá běžného věku, vidíme, že mu v době psaní nápovědy bylo právě 78 let.

Úloha 9 ... třikrát řež a jednou měř

David doma v kumbále našel dřevěnou tyč. Rozdělil ji v poměru $4:3$. Kratší část poté dále rozdělil v poměru $3:2$ a nově vzniklou delší část v poměru $5:4$. Jakou část původní tyče tvoří nejmenší vzniklý kousek?

David tyč rozdělil nejdříve v poměru $4:3$, menší část měla tedy délku $3l/7$, kde l je délka celé tyče. Po rozdělení této části v poměru $3:2$ dostaneme pro delší ze vzniklých kousků délku

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{3l}{7} = \frac{9l}{35}\,.$$

Poté, co tento dílek dále rozdělíme v poměru $5:4$, bude délka nejmenšího kousku rovna

$$\frac{4}{9} \cdot \frac{9l}{35} = \frac{4l}{35}\,.$$

Délka nejmenšího kousku Davidovy tyče je tedy rovna $4/35$ původní délky tyče. Podobným výpočtem si můžeme ověřit, že všechny další kousky tyče jsou delší.

Úloha 10 ... pražské metro

Tom by rád věděl, kolik souprav jezdí na lince metra C. Jednou při cestě z Matfyzu domů měl chvíli čas, a tak pozoroval, jak metro jezdí. Během svého pozorování zjistil, že

- *linka C má 20 stanic,*
- *cesta mezi dvěma stanicemi (i se stáním ve stanici) trvá v průměru 1 minutu a 30 sekund,*
- *soupravy jezdí v obou směrech v intervalech 1 minuta a 20 sekund,*
- *otočení soupravy v konečné stanici trvá přesně tři a půl minuty.*

Kolik souprav metra jezdí na lince C?

Každá souprava metra v jednom okruhu projede $2 \cdot 19$ úseků mezi stanicemi a dvakrát se otáčí. Jeden okruh tedy trvá

$$t = 2 \cdot 19 \cdot (1\,\mathrm{min}\,30\,\mathrm{s}) + 2 \cdot (3\,\mathrm{min}\,30\,\mathrm{s}) = 57\,\mathrm{min} + 7\,\mathrm{min} = 64\,\mathrm{min}\,.$$

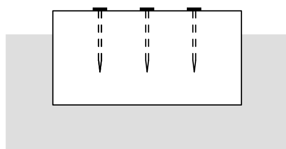
Protože víme, že soupravy jezdí neustále, vydělíme tento čas intervalem mezi soupravami, čímž získáme hledaný počet souprav:

$$n = \frac{64\,\mathrm{min}}{1\,\mathrm{min}\,20\,\mathrm{s}} = 48\,.$$

Na lince C jezdí 48 souprav.

Úloha 11 ... dřevěná lodička

Lukáš má dřevěnou lodičku ve tvaru kvádru. Lodička má hmotnost $80\,\mathrm{g}$ *a celá je ze dřeva o hustotě* $800\,\mathrm{kg/m^3}$*. Kolik nejvíce hřebíků o hmotnosti* $1{,}5\,\mathrm{g}$ *může Lukáš do lodičky zatlouci (viz obrázek), aniž by se lodička potopila? Objem kvádru se při zatloukání nemění, hřebíky zatlouká Lukáš celé až po hlavičku.*



Lodička je podle Archimédova zákona nadlehčována silou F_{vz} o velikosti $F_{\mathrm{vz}} = V\varrho g$, kde V je její objem, ϱ hustota vody a g tíhové zrychlení. Maximální vztlaková síla, která může na lodičku působit, je v případě, kdy je lodička ponořená celým svým objemem. Dosazením zadaných hodnot (objem lodičky získáme jako podíl její hmotnosti a hustoty dřeva) nám vyjde vztlaková síla $F_{\mathrm{vz}} = 1\,\mathrm{N}$. Zároveň je lodička přitahována směrem dolů tíhovou silou o velikosti $F_g = mg$, kde m je hmotnost lodičky. Dosazením dostáváme $F_g = 0{,}8\,\mathrm{N}$. Aby se lodička nepotopila, nesmí být velikost tíhové síly větší než velikost vztlakové síly. Hřebíky tedy smějí být přitahovány k zemi silou o maximální velikosti $F = 0{,}2\,\mathrm{N}$. Odtud tedy vyplývá maximální povolená hmotnost závaží (hřebíků) $m_{\max} = F/g = 0{,}02\,\mathrm{kg} = 20\,\mathrm{g}$. Jeden hřebík váží $1{,}5\,\mathrm{g}$, takže jich Lukáš může zatlouci nanejvýš 13, aby se lodička nepotopila.

Úloha 12 ... je tu nějak těsno!

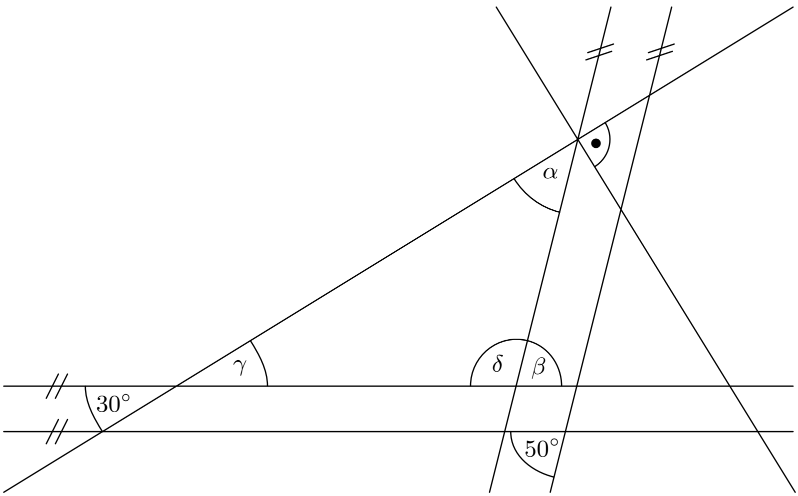
Cestou na Náboj viděl Patrik na tramvaji napsané patnáctimístné číslo $453\,739\,612\,759\,810$*. Aby zahnal nudu v přeplněném vagónu, přemýšlel, jaké nejmenší číslo může z tohoto čísla vytvořit vyškrtáním pěti libovolných cifer. Pomůžete mu?*

Číslo si pořádně prohlédneme a všimneme si, že se musíme snažit dostat co nejmenší číslice na přední pozice (doleva). Nejlepší tedy bude začít zleva a postupně vyškrtávat některé číslice. Čtyřku a pětku hned na levém kraji můžeme vyškrtnout, neboť na vedoucí pozici se nyní objeví trojka, která je menší než obě uvedená čísla. Trojku přeskočíme a škrtneme sedmičku (mezi trojkami), získáme tak číslo začínající ciframi 33. Kdybychom první trojku také škrtli, dostali bychom číslo začínající ciframi 39 a bylo by tedy větší. Škrtat můžeme ještě dvakrát. Stejnou úvahou nahlédneme, že vyškrtnutím devítky a šestky (mezi trojkou a jedničkou) získáme hledané číslo 3 312 759 810.

Úloha 13 ... rozsypané špejle

Terce se při vaření rozsypaly špejle a utvořily obrazec na obrázku. Zajímalo by ji, jaká je velikost úhlu α. Poradíte jí?

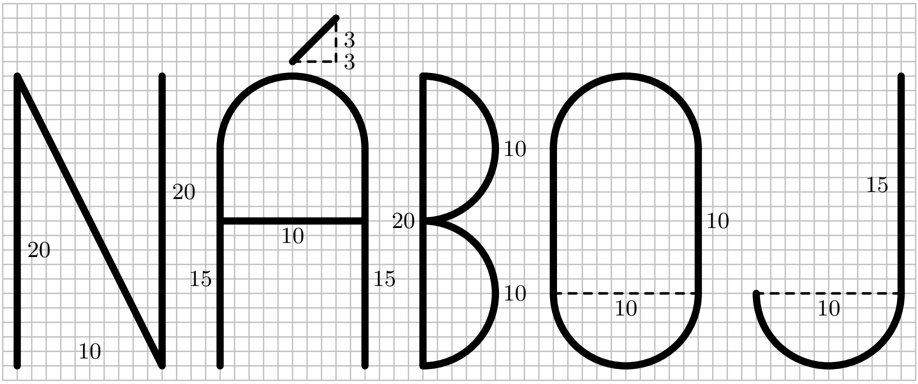
Nejprve si v obrázku označíme úhly β, γ a δ (viz obrázek). Vidíme, že úhel β a úhel o velikosti $50°$ jsou úhly střídavé, tedy $\beta = 50°$. Dále vidíme, že úhel γ a úhel o velikosti $30°$ jsou úhly vrcholové, tedy že $\gamma = 30°$. Úhel δ je doplňkovým úhlem úhlu β, tedy $\delta = 180° - \beta = 130°$. Můžeme si všimnout, že úhly α, γ a δ tvoří vnitřní úhly trojúhelníku, tedy že $180° = \alpha + \gamma + \delta$, odkud lehce zjistíme, že $\alpha = 20°$.



Úloha 14 ... kuličkové pero

Denča si zakládá na kvalitní úpravě písma ve svém sešitě, a tak používá kuličkové pero. Kuličkové pero píše tak, že v hrotu pera je umístěna malá kulička s poloměrem 0,5 mm, *která je tažením po papíře odvalována, čímž se nanáší inkoust na papír. Kolikrát se otočí kulička v Denčině* *peru, než napíše nápis „NÁBOJ“ (viz obrázek)? Obrázek je zvětšený, šířka čtverečku je ve skutečnosti* 1 mm.

Všimněme si, že nápis se skládá pouze z rovných a šikmých čar a půlkružnic. Ze zadání víme, že čtvereček má hranu o velikosti 1 mm, takže můžeme spočítat délky jednotlivých čar, resp. poloměry půlkružnic, viz obrázek. Délku šikmé čáry spočteme pomocí Pythagorovy věty. Sečtením délky všech čar dostaneme celkovou délku napsané čáry $l = 255{,}85\,\mathrm{mm}$. Obvod kuličky v peru je $o = 2\pi r = \pi\,\mathrm{mm}$. Kulička v peru se tedy otočí $(255{,}85/\pi)$krát, číselně asi 81krát.



Úloha 15 ... cesta z Náboje

Tomáš se rozhodl, že pojede na Náboj na kole. Kdyby jel zpátky průměrnou rychlostí 15 km/h, *dorazil by domů v 16:30. Pokud by jel průměrnou rychlostí* 25 km/h, *přijel by už v 15:30. Jak rychle by musel jet, aby domů dorazil v 16:00?*

Dobu jízdy, po které Tomáš dorazí domů v 16:00, označíme t. Délku cesty na Náboj označme s. Když jede rychlostí 15 km/h, trvá mu cesta o 0,5 h déle, a když jede rychlostí 25 km/h, trvá mu cesta o 0,5 h kratší dobu. Platí tedy rovnosti

$$\frac{s}{15\,\mathrm{km/h}} = t + 0{,}5\,\mathrm{h}\,,$$
$$\frac{s}{25\,\mathrm{km/h}} = t - 0{,}5\,\mathrm{h}\,.$$

Řešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$s = 15\,\mathrm{km/h}\cdot t + 7{,}5\,\mathrm{km}\,,$$
$$s = 25\,\mathrm{km/h}\cdot t - 12{,}5\,\mathrm{km}\,.$$

Pomocí srovnávací metody (musí se rovnat pravé strany rovnic) určíme dobu jízdy

$$15\,\mathrm{km/h}\cdot t + 7{,}5\,\mathrm{km} = 25\,\mathrm{km/h}\cdot t - 12{,}5\,\mathrm{km}\,,$$
$$t = 2\,\mathrm{h}\,.$$

Nyní dosadíme zpět do rovnic a spočteme s:

$$s = 15\,\mathrm{km/h} \cdot 2\,\mathrm{h} + 7{,}5\,\mathrm{km} = 37{,}5\,\mathrm{km}\,.$$

Nakonec dopočítáme Tomovu rychlost jako podíl dráhy a času

$$v = \frac{s}{t} = \frac{37{,}5\,\mathrm{km}}{2\,\mathrm{h}} = 18{,}75\,\mathrm{km/h}\,.$$

Aby Tom dorazil domů v 16:00, musel by jet rychlostí 18,75 km/h.

Úloha 16 ... cestování MHD

Lukáš jede z centra města autobusem v 17:05 až na konečnou stanici, která je od centra města vzdálena 15 km. *Z této konečné vyjíždí autobusy po celý den vždy v celou a pak každých deset minut. Kolik protisměrných autobusů Lukáš během své cesty potká, je-li průměrná rychlost všech autobusů* 30 km/h*?*

Dle vztahu pro rovnoměrný pohyb pojede Lukáš po dobu

$$t = \frac{s}{v} = \frac{15\,\mathrm{km}}{30\,\mathrm{km/h}} = 0{,}5\,\mathrm{h}\,.$$

Pojede tedy od 17:05 do 17:35 hodin. Protože se cestou bude pohybovat z centra ke konečné, tak potká všechny autobusy, co mají příjezd do centra mezi 17:05 a 18:05 (poslední by vyjel z konečné v 17:35, s pozdějším už se Lukáš nemůže potkat). Protože jim cesta trvá také 0,5 h, tak potká všechny autobusy, které vyjely z konečné mezi 16:35 a 17:35. Protože autobusy vyjíždí v celou a pak po 10 minutách, potká tedy celkem šest autobusů, které z konečné vyjely mezi 16:40 a 17:30.

Úloha 17 ... letadlo

Lukáš s Terkou byli na procházce, když na obloze zpozorovali letadlo jejich kamaráda Petra. Petr je z letadla viděl taky, a tak v momentě, kdy se nacházel přímo nad nimi, vyslal na pozdrav krátký zvukový signál. Ten Lukáš s Terkou slyšeli až 10 s *po jeho vyslání. Jak daleko od nich se nacházel Petr ve chvíli, kdy Terka a Lukáš zvuk uslyšeli? Petr letí letadlem vodorovně konstantní rychlostí* 200 m/s.

Ze zpoždění zvuku $t = 10\,\mathrm{s}$ můžeme nejdříve určit výšku, ve které Petr letěl. Poněvadž z tabulek známe rychlost zvuku, Petrova letová výška je

$$h = v_z t = 300\,\mathrm{m/s} \cdot 10\,\mathrm{s} = 3\,000\,\mathrm{m}\,.$$

Za tu samou dobu 10 s Petr urazil vzdálenost $s = vt$, kde v je rychlost Petrova letadla. Číselně je to

$$s = vt = 200\,\mathrm{m/s} \cdot 10\,\mathrm{s} = 2\,000\,\mathrm{m}\,.$$

Vzdálenost letadla l od Terky a Lukáše nakonec dopočítáme pomocí Pythagorovy věty, přičemž tato vzdálenost je přepona pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami h a s. Můžeme tedy zapsat

$$l = \sqrt{h^2 + s^2} = \sqrt{(3\,000\,\mathrm{m})^2 + (2\,000\,\mathrm{m})^2} = \sqrt{13\,000\,000\,\mathrm{m}^2} = \sqrt{13}\,\mathrm{km} \doteq 3{,}6\,\mathrm{km}\,.$$

Od chvíle, kdy Terka s Lukášem zaslechli Petrův pozdrav, byl Petr již vzdálen asi 3,6 km.

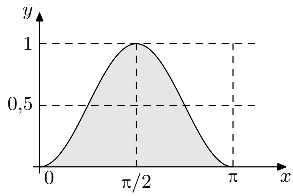
Úloha 18 ... kupte si novou!

Zdědili jsme lednici po babičce. Tato lednička měla příkon 50 W a po třech letech používání se pokazila. Koupili jsme tedy novou, úspornější lednici s příkonem jen 25 W. Cena elektřiny je 5 Kč/kWh, lednice je v provozu celý den, rok má 365 dní. Kolik peněz bychom ušetřili, kdybychom koupili novou lednici rovnou?

Spočítáme si, kolik hodin odpovídá třem rokům o 365 dnech, což je $(3 \cdot 365 \cdot 24)\,\mathrm{h} = 26\,280\,\mathrm{h}$. Dále zjistíme, kolik elektřiny spotřebuje každá z ledniček za tuto dobu: $(26\,280 \cdot 50)\,\mathrm{Wh} = 1\,314\,000\,\mathrm{Wh}$ v případě staré ledničky a $(16\,280 \cdot 25)\,\mathrm{Wh} = 657\,000\,\mathrm{Wh}$ v případě nové. Rozdíl těchto dvou čísel (převedený na kWh) vynásobíme cenou elektřiny a dostaneme hledaný výsledek: $(1\,314 - 657)\,\mathrm{kWh} \cdot 5\,\mathrm{Kč/kWh} = 3\,285\,\mathrm{Kč}$. Ušetřili bychom tedy částku 3 285 Kč.

Úloha 19 ... integrální

Kája si nakreslila zvláštní křivku a zajímalo by ji, jaký je obsah plochy mezi její křivkou a osou x, mezi body $x = 0$ a $x = \pi$. Odhadněte ho s přesností na jednu desetinu.



Z obrázku si můžeme všimnout, že pomocné čárkované čáry dělí plochu pod křivkou na čtyři části s nápadnou symetrií, které pak můžeme přeskládat tak, že tyto čtyři části vytvoří obdélník se stranami 0,5 a π. Hledaná plocha pod křivkou je tedy $S = \pi/2 \doteq 1{,}6$. Tolerované výsledky jsou tudíž v intervalu $\langle 1{,}5;1{,}7\rangle$.

Úloha 20 ... síla hesla

David používá ke svému počítači pouze tříznakové heslo. Protože má problém si heslo pamatovat, zapsal si, že obsahuje dvě souhlásky a jednu samohlásku. Žádné písmeno se v něm neopakuje a neobsahuje diakritiku. Pak odjel na tábor, kde ho spolehlivě zapomenul. Kolik různých kombinací hesel teď musí David vyzkoušet, aby určitě natrefil na tu správnou? David používá výhradně anglickou abecedu.

Pokud má heslo pouze tři písmena, tak umístění souhlásek a samohlásek má tři varianty: samohláska—souhláska—souhláska, souhláska—samohláska—souhláska a souhláska—souhláska—samohláska.

Anglická abeceda obsahuje 26 písmen, z toho je 6 samohlásek a 20 souhlásek. Vidíme, že do každé z variant lze dosadit libovolnou samohlásku ze šesti, umístění souhlásek je pak již jednoznačné. Víme však, že se nesmějí opakovat, proto u první souhlásky volíme z 20 možností, ale u druhé již jen z 19 možností. Pro každou variantu hesla tak získáme celkem $6 \cdot 19 \cdot 20$ různých kombinací.

Dohromady je počet možností třikrát větší, neboť jsou tři varianty pro umístění samohlásky. Kombinací tedy je

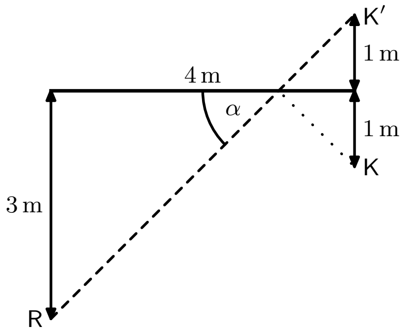
$$3 \cdot 6 \cdot 19 \cdot 20 = 6\,840\,.$$

Pokud David vyzkouší celkem 6 840 různých hesel, jedno z nich bude určitě správné.

Úloha 21 ... posvítím si na tebe

Na obrázku v bodě R *stojí Radka a chce si baterkou posvítit na zrcadlo tak, aby v něm uviděla Káťu, která stojí v bodě* K*. Určete, pod jakým úhlem α má Radka na zrcadlo svítit, aby se paprsek šířil po co nejkratší možné dráze.*

Dráha bude stejná, pokud polohu Katky zobrazíme zrcadlem do bodu K′, jinými slovy, pokud budeme svítit na Katčin obraz v zrcadle (viz obrázek). Víme, že nejkratší spojnice dvou bodů leží na přímce – spojíme tedy bod R s bodem K′ úsečkou. Nyní už zbývá jen určit úhel α. Můžeme si všimnout, že body R a K′ jsou protilehlé vrcholy čtverce o straně 4 m. Úsečka RK′ je z tohoto pohledu úhlopříčka takového čtverce. Úhel α tedy musí být polovina pravého úhlu, což je právě 45°.



Úloha 22 ... rande

Lukáš se rozhodl pozvat Terku na rande. Zvláštní na tom bylo to, že místo jejich schůzky zašifroval. Poradíte Terce, kam má přijít? Řešením úlohy jsou dvě slova psaná bez diakritiky, k vyluštění vám pomohou rovnosti $\odot + \diamondsuit = E$, $\odot + \bigcirc = X$, $\triangle + * = H + 26 = AH$ a $Z = 26$.

$$\begin{array}{cccccccc}
 & \oplus & - & \heartsuit & \bigcirc & \heartsuit & \square & \diamondsuit \\
 & * & \diamondsuit & \triangle & \times & \diamondsuit & \odot & \diamondsuit \\
\hline
A & M & G & B & L & T & O & B
\end{array}$$

Je zřejmé, že našim cílem je přiřadit každému symbolu nějaké písmenko, abychom dostali hledaná slova. Vzhled šifry připomíná sčítání pod sebou, přičemž v nápovědě máme $Z = 26$. Každému písmenu bychom tedy mohli přiřadit číslo odpovídající jeho pozici v anglické abecedě, kterou máme v tabulce.

Indicie $\triangle + * = H + 26 = AH$ napovídá, že sčítat budeme muset v šestadvacítkové soustavě, tzn. pokud je náš součet větší než 26, abeceda se „zopakuje". Navíc se tento přesah zapamatuje stejně tak, jako při sčítání s přesahem přes desítku.

V luštění šifry začneme, jak to u sčítání bývá, od konce. V posledním sloupci je $\diamondsuit + \diamondsuit = B$. Jelikož B má hodnotu 2, $\diamondsuit$ může být buď A (neboť $A + A \Rightarrow 1 + 1 = 2$), nebo N ($N + N \Rightarrow 14 + 14 = 28 = 2 + 26$). Pokud ale $\diamondsuit = N$, museli bychom v dalším sloupci přičíst „jedničku". V prvním řádku nápovědy ovšem máme, že $\odot + \diamondsuit = E$, tedy $\diamondsuit$ musí být A, neboť $N > E$. Z toho lze rovněž zjistit, že $\odot = D$.

Nyní můžeme pokračovat předposledním sloupcem obsahujícím rovnici $\square + \odot = O$, ze které rychle zjistíme, že $\square = K$. Stejným způsobem můžeme pokračovat dál až dostaneme řešení *MESTSKA ZAHRADA*. Lukáš s Terkou se tedy sejdou v městské zahradě.

Úloha 23 ... uvolněný náklad

Vozka seděl na voze taženém dvěma koňmi. Náhle se mu vzadu na žebřiňáku uvolnil závěs a začalo se mu sesouvat dříví na zimu. Proto seskočil a šel podél vozu vzad. Koně se nijak nevzrušovali a v klidu klusali dál stejným tempem. Cesta na konec vozu vozkovi zabrala 8 kroků. Závěs hbitě přichytil a hned se vydal na cestu zpět vpřed, tentokrát na to však potřeboval celých 24 kroků. Vypočtěte, kolik kroků by vozka potřeboval na přejití zepředu dozadu vozu v případě, kdyby oba koně zastavili.

Víme, že koně s vozem se pohybovali stejně dlouho jako vozka. Dále víme, že cestou dozadu se vozka a vůz pohybovali proti sobě – součet uražených vzdáleností je tedy délka vozu. Naopak při návratu dopředu se pohybovali stejným směrem, tedy délce vozu je roven rozdíl uražených vzdáleností. Můžeme tedy napsat soustavu rovnic

$$s = x_{\text{vzad}} + v_{\text{vůz}} t_1 \,,$$
$$s = x_{\text{vpřed}} - v_{\text{vůz}} t_2 \,,$$

kde s je délka vozu, a t_1 a t_2 jsou časy, za které vozka došel na konec vozu a zpět. V obou případech se vozka pohyboval stejně rychle,[2] takže je zřejmé, že cesta podél vozu vpřed mu trvala třikrát déle, než cesta dozadu, tedy $t_2 = 3t_1$. Rovnice můžeme tedy přepsat do tvaru

$$s = x_{\text{vzad}} + v_{\text{vůz}} t_1 \,,$$
$$s = x_{\text{vpřed}} - 3 v_{\text{vůz}} t_1 \,.$$

Rovnají-li se levé strany rovnic, rovnají se i jejich pravé strany. Z této rovnosti vyjádříme neznámý člen $v_{\text{vůz}} t_1$:

$$v_{\text{vůz}} t_1 = \frac{x_{\text{vpřed}} - x_{\text{vzad}}}{4} \,.$$

[2] Rychlost „měříme" v krocích za sekundu.

Toto vyjádření dosadíme do jedné ze dvou původních rovnic:

$$s = x_{\text{vzad}} + v_{\text{vůz}} t_1 = x_{\text{vzad}} + \frac{x_{\text{vpřed}} - x_{\text{vzad}}}{4} = \frac{3x_{\text{vzad}} + x_{\text{vpřed}}}{4} = \frac{3 \cdot 8 + 24}{4}\,\text{kr.} = 12\,\text{kroků}\,.$$

Délka vozu je 12 kroků, což je také počet kroků, kolik by vozka potřeboval na přejití zepředu vzad vozu v případě, kdyby koně zastavili.

Úloha 24 ... oliheň

Mirkova oliheň žije ráda v místech s vysokým tlakem $p_\text{o} = 500\,\text{kPa}$*. Připravil pro ni tedy válcové akvárium s plochou hladiny* $10\,\text{m}^2$ *a s hloubkou* $10\,\text{m}$*. Na hladinu pak položil kovový píst. Jak velkou silou musí Mirek na píst tlačit, aby byla jeho oliheň plavající u dna spokojená s hodnotou tlaku? Počítejte s tím, že atmosférický tlak má hodnotu přibližně* $p_\text{a} = 100\,\text{kPa}$*. Hmotnost samotného pístu zanedbejte.*

Bez vnější síly působící na desku je tlak u dna roven součtu atmosférického a hydrostatického tlaku. Atmosférický tlak známe, hydrostatický spočítáme dle vztahu $p_\text{h} = h\varrho g$, kde h je hloubka akvária, ϱ hustota vody a g tíhové zrychlení. Součet atmosférického a hydrostatického tlaku je

$$p_\text{a} + p_\text{h} = 100\,000\,\text{Pa} + 10\,\text{m} \cdot 1\,000\,\text{kg/m}^3 \cdot 10\,\text{m/s}^2 = 200\,000\,\text{Pa} = 200\,\text{kPa}\,.$$

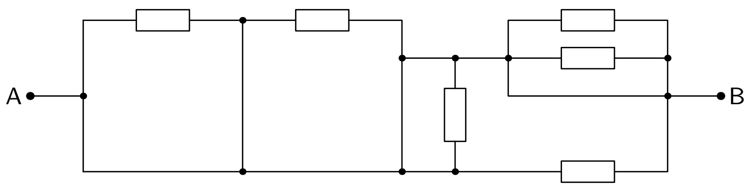
Na desku musíme tedy působit silou F, která vyvolá změnu tlaku o $p = 300\,\text{kPa}$. Protože tlak je roven podílu síly a plochy, platí

$$F = pS = 300\,000\,\text{Pa} \cdot 10\,\text{m}^2 = 3\,000\,000\,\text{N} = 3\,\text{MN}\,.$$

Na píst tedy musíme působit silou $F = 3\,\text{MN}$, abychom oliheň uspokojili.

Úloha 25 ... nebezpečné rezistory

Patrik dostal k narozeninám spoustu rezistorů s odporem $1\,\text{k}\Omega$*. Měl z toho takovou radost, že je hned začal náhodně spojovat. Po chvíli si řekl, že by mohl změřit, jaký je elektrický odpor mezi body* A *a* B *(viz obrázek). Jakou hodnotu naměřil? Odpor přívodních vodičů zanedbejte.*



Podíváme-li se na schéma pozorněji, zjistíme, že nemusíme nic počítat, neboť mezi body A a B existuje cesta, kde není žádný rezistor. Obvod je tedy ve zkratu a odpor mezi danými body A a B je tudíž nulový.

Úloha 26 ... ledový čaj

Pavla si uvařila 300 ml *horkého čaje s teplotou* 80 °C*. Poněvadž má Pavla raději ledový čaj, přelila ho do velké sklenice, kde se již nacházelo* 900 g *ledu o teplotě* −50 °C*. Pak počkala dostatečně dlouho, aby se teplota ve sklenici ustálila. Jaká byla tato výsledná teplota?*

Měrná tepelná kapacita vody (čaje) je 4 200 J/kg°C*, ledu* 2 100 J/kg°C*. Měrné skupenské teplo tání ledu je* 334 000 J/kg*. Tepelné ztráty do okolí zanedbejte.*

Nejprve zkusíme spočítat, kolik tepla by horký čaj odevzdal, aby se ochladil na 0 °C:

$$Q_\mathrm{c} = c_\mathrm{v} m \Delta t = 4\,200\,\mathrm{J/kg{\cdot}^\circ C} \cdot 0{,}3\,\mathrm{kg} \cdot 80\,^\circ\mathrm{C} = 100\,800\,\mathrm{J}\,.$$

Pro ohřátí ledu na 0 °C vychází podobně

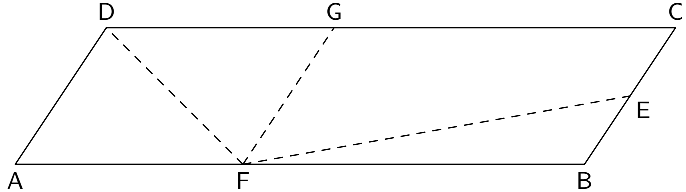
$$Q_\mathrm{l} = c_\mathrm{l} m \Delta t = 2\,100\,\mathrm{J/kg{\cdot}^\circ C} \cdot 0{,}9\,\mathrm{kg} \cdot 50\,^\circ\mathrm{C} = 94\,500\,\mathrm{J}\,.$$

Ochladí-li se tedy čaj na 0 °C, předá své teplo ledu, který se tak ohřeje na 0 °C, ale pořád ještě neroztaje. Pouze „zbývající" teplo 100 800 J − 94 500 J = 6 300 J způsobí tání ledu. Ze zadaných hodnot však vidíme, že na roztání veškerého ledu je potřeba mnohem více tepla než 6 300 J. Proto roztaje jen malá část ledu. Výsledná teplota směsi ledu a vody bude 0 °C.

Úloha 27 ... plošná

V rovnoběžníku ABCD *označme střed strany* BC *jako* E*. Uvažujme takový bod* F *ležící uvnitř strany* AB*, že obsah trojúhelníku* AFD *je* $15\,\mathrm{cm}^2$ *a obsah trojúhelníku* FBE *je* $14\,\mathrm{cm}^2$*. Určete obsah čtyřúhelníku* FECD*.*

Rovnoběžník a útvary v něm si nakreslíme podle zadání. Všimneme si, že bychom mohli vést rovnoběžku se stranami AD a BC bodem F, která nám rozdělí rovnoběžník na dva menší (průsečík se stranou DC označíme G). FD je uhlopříčkou rovnoběžníku AFGD a dělí ho na dva shodné trojúhelníky, přičemž obsah jednoho z nich je $15\,\mathrm{cm}^2$. Odtud tedy obsah celého rovnoběžníku AFGD vychází $30\,\mathrm{cm}^2$. V druhém rovnoběžníku BCGF, si podobně všimneme, že v zadání uvedený trojúhelník FBE tvoří čtvrtinu obsahu tohoto rovnoběžníku.[3] Rovnoběžník BCGF má tedy obsah $4 \cdot 14\,\mathrm{cm}^2 = 56\,\mathrm{cm}^2$. Odečtením obsahů zadaných trojúhelníků získáme obsah čtyřúhelníku FECD: $((56 + 30) - 14 - 15)\,\mathrm{cm}^2 = 57\,\mathrm{cm}^2$.

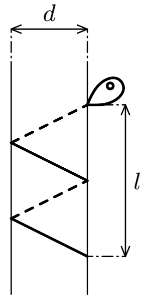


[3]Bod E je v polovině strany BC, můžeme jím tedy vést rovnoběžku se stranami BF a CG a rovnoběžník rozpůlit, trojúhelník FBE pak tvoří polovinu jednoho z nově vzniklých rovnoběžníků.

Úloha 28 ... pozor, anakonda!

Některé anakondy jsou opravdu dlouhé. Jak dlouhá je anakonda, která omotá dokonale kulatý kmen stromu o průměru $d = 63{,}7\,\mathrm{cm}$ do výšky $h = 3\,\mathrm{m}$ ve dvou závitech tak, jak je znázorněno na obrázku? Výsledek udejte s přesností na centimetr.

Podle obrázku předpokládáme, že strom má tvar válce. Jeho pláštěm je proto obdélník. Jeden závit anakondy se na plášti zobrazí jako úhlopříčka obdélníku se stranami $b = h/2$ (výška, do které dosahuje jeden závit) a $a = \pi d$ (obvod válce). Tuto úhlopříčku c pak dopočítáme pomocí Pythagorovy věty



$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\pi \cdot 63{,}7\,\mathrm{cm})^2 + (150\,\mathrm{cm})^2} \doteq 250\,\mathrm{cm}\,.$$

Jelikož anakonda vytvořila dva závity, měří celkem $x = 2c = 500\,\mathrm{cm} = 5\,\mathrm{m}$.

Úloha 29 ... heeej, počkeeej!

Lukáš stojí $290\,\mathrm{m}$ od ploché čedičové skály a o dalších $50\,\mathrm{m}$ dále se nachází Terka, která od Lukáše utíká rychlostí $10\,\mathrm{m/s}$. Lukáš na Terku zavolá, ať tak šíleně nespěchá. Zvuk se jednak šíří přímo k Terce, ale také se šíří směrem ke stěně a zpět jako ozvěna. Určete, za jak dlouho od zaznamenání prvního zvuku uslyší Terka ozvěnu.

Napřed spočítáme, za jak dlouho k Terce dorazí zvuk poprvé. Za hledaný čas t_1 urazí zvuk vzdálenost $50\,\mathrm{m}$ plus vzdálenost, kterou stihne Terka za čas t_1 uběhnout svojí rychlostí $v_\mathrm{T} = 10\,\mathrm{m/s}$. Můžeme tedy napsat rovnici

$$t_1 = \frac{50\,\mathrm{m} + v_\mathrm{T} t_1}{v_\mathrm{z}} \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{50\,\mathrm{m}}{v_\mathrm{z} - v_\mathrm{T}}\,,$$

kde v_z je rychlost zvuku.

Poté spočítáme, za jakou dobu t_2 k ní dorazí ozvěna. Zvuk za čas t_2 urazí jednak vzdálenost $2 \cdot 290\,\mathrm{m}$ (od Lukáše ke skále a zpět), jednak $50\,\mathrm{m}$, které měla Terka jako „náskok“ na začátku, a navíc vzdálenost, kterou stihne Terka utéct za čas t_2. Můžeme tedy napsat rovnici

$$t_2 = \frac{290\,\mathrm{m} + 290\,\mathrm{m} + 50\,\mathrm{m} + v_\mathrm{T} t_2}{v_\mathrm{z}} \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{630\,\mathrm{m}}{v_\mathrm{z} - v_\mathrm{T}}\,.$$

Nakonec od sebe odečteme časy t_2 a t_1:

$$t_2 - t_1 = \frac{630\,\mathrm{m}}{v_\mathrm{z} - v_\mathrm{T}} - \frac{50\,\mathrm{m}}{v_\mathrm{z} - v_\mathrm{T}} = \frac{580\,\mathrm{m}}{v_\mathrm{z} - v_\mathrm{T}} = \frac{580\,\mathrm{m}}{300\,\mathrm{m/s} - 10\,\mathrm{m/s}} = 2\,\mathrm{s}\,.$$

Terka uslyší ozvěnu $2\,\mathrm{s}$ po zaznamenání prvního zvuku.

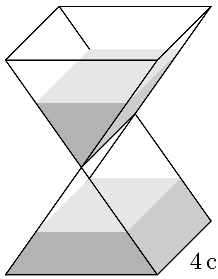
Úloha 30 ... samá devítka

Lukáš se jednou nudil při hodině dějepisu, a tak přemýšlel nad zajímavým problémem. Kolik existuje trojciferných čísel, která jsou dělitelná třemi a obsahují alespoň jednu číslici devět?

K řešení se dá dopátrat mnoha způsoby. Například zjistíme, kolik je všech trojciferných čísel, která jsou dělitelná třemi, a odečteme ta, která neobsahují číslici devět. Počet všech trojciferných čísel je $999 - 99 = 900$, z nichž každé třetí, tedy 300 čísel, je dělitelné třemi. Otázka je, kolik z nich neobsahuje devítku. Máme tři místa (stovky, desítky, jednotky), na které můžeme uložit číslice. Na místo stovek můžeme dát číslice $1 - 8$ (tedy 8 číslic), ke každé z nich se na místo desítek dá uložit číslice $0-8$ (tedy 9 číslic). Aby číslo bylo dělitelné třemi, musí byt jeho ciferný součet dělitelný třemi. Na místo jednotek tak můžeme umístit jenom 3 číslice (vždy podle součtu prvních dvou). Počet čísel, které jsou dělitelná třemi a neobsahují devítku, je $8 \cdot 9 \cdot 3 = 216$. Teď už zjistíme výsledek jednoduše: počet čísel, které splňují podmínky ze zadání, je $300 - 216 = 84$.

Úloha 31 ... přesně padající písek

Petr byl na návštěvě u babičky a zaujaly ho staré přesýpací hodiny, které vypadaly jako dva trojboké hranoly (viz obrázek). Jejich základny byly tvořeny dvěma rovnostrannými trojúhelníky o hraně 6 cm *a výšce* 4 cm. *Před otočením byl spodní hranol zcela naplněn pískem. Ve chvíli, kdy je Petr otočil, se písek začal přesypávat do spodní části, což trvalo 2 minuty. Petra jakožto správného studenta fyziky napadlo, že by bylo možné zavést pro tyto hodiny veličinu zvanou výkon. Jeho hodnotu by spočítal jako podíl změny potenciální energie písku za čas. A tak si v tabulkách našel hustotu písku* $1{,}5\,\mathrm{g/cm^3}$ *a spočítal průměrný výkon babiččiných přesýpacích hodin Kolik mu to vyšlo?*



Změna potenciální energie písku je úměrná změně výšky jeho těžiště mezi původní situací (všechen písek je v horním hranolu) a konečnou situací (všechen písek je ve spodním hranolu). Z obrázku a ze znalosti, že těžiště rovnostranného trojúhelníka leží ve třetině jeho výšky, vyplývá, že na začátku se těžiště písku nacházelo ve výšce $v + 2v/3 = 5v/3$ nad podstavou hodin (v zde označuje „výšku“ jednoho hranolu) a po přesypání těžiště pokleslo do výšky $v/3$ nad podstavou hodin. Tomu odpovídá změna výšky o $\Delta h = 5v/3 - v/3 = 4v/3$.

Výšku rovnostranného trojúhelníka o straně $a = 6\,\mathrm{cm}$ vypočítáme pomocí Pythagorovy věty, výška v rozděluje trojúhelník na dva pravoúhlé trojúhelníky s odvěsnami $a/2$ a v a přeponou a:

$$v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}a}{2}\,.$$

Hodnotu $\sqrt{3}$ nalezneme v tabulkách, po dosazení dostaneme $v = 5{,}19\,\mathrm{cm}$.

Nyní vypočítáme hmotnost písku m jako součin jeho hustoty a objemu. Objem písku je stejný jako objem jednoho hranolu a získáme ho jako součin šířky hranolu ($s = 4\,\mathrm{cm}$) a obsahu rovnostranného trojúhelníka tvořící základnu hranolu:

$$m = \varrho V = \varrho s \frac{av}{2} = 1{,}5\,\mathrm{g/cm^3} \cdot 4\,\mathrm{cm} \cdot \frac{6\,\mathrm{cm} \cdot 5{,}19\,\mathrm{cm}}{2} \doteq 93{,}4\,\mathrm{g}\,.$$

Teď už jen dáme všechno dohromady: změna potenciální energie písku v hodinách je tedy rovna $\Delta E = mg\Delta h$, výkon hodin je tato změna energie vydělená časem, za který se písek přesypal ($\Delta t = 2\,\mathrm{min} = 120\,\mathrm{s}$):

$$P = \frac{mg\Delta h}{\Delta t} = \frac{\varrho s \frac{av}{2} g \frac{4v}{3}}{\Delta t} = \frac{2\varrho sagv^2}{3\Delta t} = \frac{\varrho sa^3 g}{2\Delta t}\,.$$

Po dosazení v základních jednotkách SI dostáváme

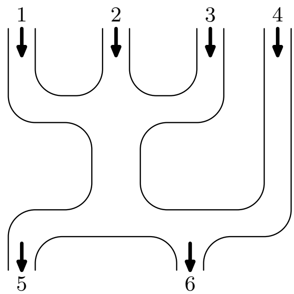
$$P = \frac{1\,500\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 0{,}04\,\mathrm{m} \cdot (0{,}06\,\mathrm{m})^3 \cdot 10\,\mathrm{m/s^2}}{2 \cdot 120\,\mathrm{s}} = 5{,}4 \cdot 10^{-4}\mathrm{W} = 0{,}54\,\mathrm{mW}\,.$$

Průměrný výkon babiččiných hodin je tedy pouze 0,54 mW.

Úloha 32 ... podivné potrubí

Radka má na koleji podivné potrubí. Po krátkém pozorování zjistila, že se voda z potrubí nikde neztrácí, voda je nestlačitelná a voda neteče nahoru.

Dále dokázala změřit, že průměry potrubí jsou $d_1 = 40\,\mathrm{mm}$, $d_2 = 20\,\mathrm{mm}$, $d_3 = 1\,\mathrm{cm}$, $d_4 = 10\,\mathrm{mm}$, $d_5 = 30\,\mathrm{mm}$ *a* $d_6 = 1\,\mathrm{cm}$. *Rychlost proudící vody v jednotlivých trubkách je* $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 1\,\mathrm{m/s}$ *a* $v_5 = 2\,\mathrm{m/s}$. *Jakou rychlostí vytéká voda z trubky číslo 6?*



Objem vody, který vteče do trubky číslo 1 za jednu sekundu, je roven objemu válce s průřezem trubky a výškou číselně rovnou velikosti rychlosti. Jinými slovy, za sekundu do trubky vteče

$$Q_1 = S_1 v_1 = \pi \frac{d_1^2}{4} v_1$$

vody. Této veličině budeme říkat objemový průtok. Stejným způsobem můžeme určit i průtoky ostatními trubkami.

Z Radčina pozorování můžeme usoudit, že veškerá voda, která vteče čtyřmi horními trubkami, musí vytéct dvěma dolními trubkami. Musí tedy platit $Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = Q_5 + Q_6$, z čehož jednoduše dostaneme

$$\pi \frac{d_6^2}{4} v_6 = Q_6 = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 - Q_5$$

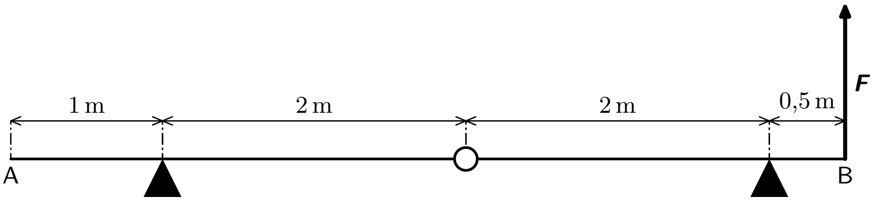
a tedy

$$v_6 = 4\frac{Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 - Q_5}{\pi d_6^2} = \frac{d_1^2 v_1 + d_2^2 v_2 + d_3^2 v_3 + d_4^2 v_4 - d_5^2 v_5}{d_6^2}\,.$$

Dosazením dostaneme $v_6 = 4\,\mathrm{m/s}$. Při dosazování si musíme dát pozor na jednotky!

Úloha 33 ... křehká rovnováha

Na obrázku vidíme dlouhé prkno, které má poblíž svého středu kloubový spoj a je posazené na dvou podpěrách (viz obrázek). Do bodu A *si sedne Tom vážící* 70 kg. *Jak velkou silou* ***F*** *musí působit Kuba na druhý konec prkna, aby bylo celé prkno i s Tomem v rovnováze? Hmotnost samotného prkna zanedbejte.*



Pokud se Tom posadí do bodu A, bude na prkno působit svojí tíhou, tzn. silou

$$F_g = 70\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} = 700\,\mathrm{N}\,.$$

Aby byla levá část prkna v rovnováze, museli bychom na ni v místě spoje působit takovou silou F_k, aby byly v rovnováze momenty obou sil vzhledem k levé podpěře, tedy

$$F_g \cdot 1\,\mathrm{m} = F_\mathrm{k} \cdot 2\,\mathrm{m}\,, \quad \Rightarrow \quad F_\mathrm{k} = F_g \frac{1\,\mathrm{m}}{2\,\mathrm{m}} = 350\,\mathrm{N}\,.$$

Jinak řečeno, kloubové spojení musí na levou část prkna působit silou 350 N. Toto spojení funguje tak, že pouze „přenáší" sílu z jedné části prkna na druhou, proto musí Kuba působit na pravou stranu prkna silou F tak, aby pravá část prkna působila na spoj právě touto silou F_k. Zároveň ale i pravá část prkna musí být v rovnováze, takže opět musí být momenty obou sil F_k a F v rovnováze vůči pravé podpěře. Odtud již dokážeme spočítat sílu F:

$$F_\mathrm{k} \cdot 2\,\mathrm{m} = F \cdot 0{,}5\,\mathrm{m}\,, \quad \Rightarrow \quad F = F_\mathrm{k} \frac{2\,\mathrm{m}}{0{,}5\,\mathrm{m}} = 4F_\mathrm{k} = 1\,400\,\mathrm{N}\,.$$

Aby tedy byla soustava v rovnováze, musí Kuba působit na prkno silou 1 400 N.

Úloha 34 ... správná pojistka je základ

Nejméně kolika ampérovou pojistku je třeba zapojit na ochranu stejnosměrného elektrického vedení, ve kterém jsou při napětí 220 V *paralelně zapojeny* 4 *žárovky? Každá žárovka má příkon* 110 W*.*

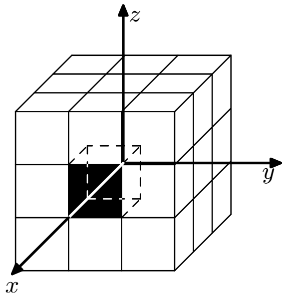
Ze vztahu pro elektrický příkon $P = UI$ vypočítáme proud I, který teče jednou žárovkou. Hodnotu příkonu a napětí známe ze zadání (platí poučka říkající, že napětí v paralelním zapojení je stejné pro všechny větve):

$$I = \frac{P}{U} = \frac{110\,\mathrm{W}}{220\,\mathrm{V}} = 0{,}5\,\mathrm{A}\,.$$

Při paralelním zapojení se navíc dělí proud, takže proud procházející pojistkou je součtem proudů v jednotlivých větvích. Jelikož máme čtyři paralelní větve a každou teče proud I, musíme mít pojistku alespoň na $4 \cdot 0{,}5\,\mathrm{A} = 2\,\mathrm{A}$.

Úloha 35 ... děravá kostka

Kačka si hrála s kostkou o hraně 6 cm, která byla složená z 27 menších kostek. Kostka se Kačce zdála příliš nezajímavá, a tak z jedné stěny vyndala prostřední kostku. O kolik se posunulo těžiště Kaččiny kostky?



Těžiště plné krychle je v jejím středu. Tento bod umístíme do počátku kartézské soustavy souřadnic xyz (bude mít tedy souřadnice $\mathsf{T}[0; 0; 0]$). Pokud odebereme jednu krychličku ze středu stěny, vidíme, že krychle zůstane souměrná podle os y a z, symetrie se ztratí pouze ve směru osy x (viz obrázek). Proto se i těžiště posune pouze v ose x, úloha je tedy „jednorozměrná“.

Jelikož je kostka složená z $3 \times 3 \times 3$ kostiček a má hranu 6 cm, každá kostička má hranu $a = 2\,\mathrm{cm}$. Máme tedy 9 kostiček, jejichž těžiště má x-ovou souřadnici 2 cm, 9 kostiček se souřadnicí 0 cm a 8 kostiček se souřadnicí -2 cm.

Protože těžiště je bod, vůči němuž je moment tíhových sil všech kostiček nulový, můžeme napsat rovnici

$$26 x_{\mathsf{T}'} = 9 \cdot 2\,\mathrm{cm} + 9 \cdot 0\,\mathrm{cm} + 8 \cdot (-2\,\mathrm{cm})\,,$$

kde bodem T' jsme označili hledané těžiště po vyjmutí jedné kostky. Jednoduchou úpravou získáváme

$$x_{\mathsf{T}'} = \frac{18-16}{26}\,\mathrm{cm} = \frac{1}{13}\,\mathrm{cm} \doteq 0{,}77\,\mathrm{mm}\,.$$

Těžiště krychle se posunulo asi o 0,77 mm.

Úloha 36 ... pozor, letí!

Kája hází míčkem na síť se čtvercovými oky. Jaká je pravděpodobnost, že míček okem proletí? Míček má průměr 6 cm, délka jedné strany čtvercového oka je 9 cm. Aby míček sítí proletěl, nesmí se jí samozřejmě dotknout.

Pravděpodobnost, že míček proletí sítí, můžeme vypočítat jako poměr obsahu oblasti, kde se v okamžiku průletu může nacházet střed míčku, a obsahu celého oka. Aby se míček sítě nedotkl, musí být vzdálenost strany oka a středu míčku větší než je poloměr míčku (3 cm). Oblast, kde může být střed míčku v okamžiku průletu, má tedy tvar čtverce o straně $(9-(3+3))\,\mathrm{cm} = 3\,\mathrm{cm}$. Pravděpodobnost průletu míčku je tedy $3^2/9^2 = 1/9 \doteq 11\,\%$.

Úloha 37 ... škodolibý hopík

Peťa si házela s hopíkem a hodila ho svisle mezi dvě vodorovné desky od sebe vzdálené 1 m tak, že hopík měl před odrazem od spodní desky rychlost 5,5 m/s. Jelikož hopík není dokonale pružný, ztratí při každém odrazu 25 % své pohybové *energie. Jak vysoko hopík vyskočí po třetím odrazu? Tolerance výsledku 3 cm.*

Na to, aby se míček dotkl horní desky, musí mít těsně po odrazu od spodní desky větší (nebo alespoň stejnou) pohybovou energii, jako je potenciální energie, kterou míček při stoupání k horní desce získá. Pokud označíme hmotnost míčku m, rychlost míčku těsně po odrazu $v_{\min}$ a vzdálenost desek h, lze psát nerovnici

$$\frac{1}{2}mv_{\min}^2 \geq mgh \quad \Rightarrow \quad \frac{v_{\min}^2}{2g} \geq h\,.$$

V našem případě měl hopík těsně před odrazem pohybovou energii $mv^2/2$, kde $v = 5{,}5\,\mathrm{m/s}$. Pak došlo k odrazu, během kterého hopík ztratil 25 % této energie, tedy zbytek, tj. $k = 3/4$ energie mu zůstal a těsně po odrazu byla jeho pohybová energie rovna $kmv^2/2$. Jeho rychlost se z hodnoty v zmenšila[4] na $\sqrt{k}v$. Místo ověřování, zda-li $\sqrt{k}v \geq v_{\min}$, vyčíslíme jednodušší výraz

$$\frac{\left(\sqrt{k}v\right)^2}{2g} = \frac{kv^2}{2g} = \frac{363}{320}\,\mathrm{m}\,,$$

z něhož hned vidíme, že jeho hodnota je větší než $h = 1\,\mathrm{m}$. To znamená, že $\sqrt{k}v \geq v_{\min}$, tj. pohybová energie míčku po prvním odrazu je dostatečná na to, aby se míček při svém druhém odrazu odrazil od horní desky.

Těsně před druhým odrazem bude pohybová energie míčku rovna

$$k\frac{1}{2}mv^2 - mgh\,,$$

protože během stoupání k horní desce se část energie přeměnila na potenciální energii. Po odrazu se z této energie opět 25 % energie ztratí a míček začne padat dolů, čímž se ale potenciální energie mgh zpět promění v pohybovou energii, tzn. těsně před třetím odrazem bude pohybová energie míčku rovna

$$k\left[k\frac{1}{2}mv^2 - mgh\right] + mgh\,.$$

Z této energie se třetím odrazem opět 25 % ztratí a míček začne stoupat nahoru. Jak zadání napovídá, po třetím odrazu již míček nevystoupá k horní desce, takže veškerá energie se změní na potenciální energii mgH, kde H je hledaná výška. S přihlédnutím k výše uvedeným faktům můžeme psát rovnost

$$k\left\{k\left[k\frac{1}{2}mv^2 - mgh\right] + mgh\right\} = mgH\,.$$

Závorky roznásobíme a rovnici vydělíme členem mg. Dostáváme tak

$$H = k^3\frac{v^2}{2g} - k^2h + kh = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{363}{320}\,\mathrm{m} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 1\,\mathrm{m} + \frac{3}{4} \cdot 1\,\mathrm{m}\,.$$

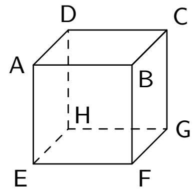
V posledním kroku jsme využili již vypočtené hodnoty výrazu $kv^2/2g$. Po vynásobení a sečtení všech členů (s vhodně zvoleným zaokrouhlováním) dostáváme přibližně $H = 0{,}83\,\mathrm{m} = 83\,\mathrm{cm}$, tzn. v rámci tolerance jsou výsledky v intervalu $\langle 80\,\mathrm{cm}; 86\,\mathrm{cm}\rangle$.

---

[4] Pak je čtverec rychlosti $\left(\sqrt{k}v\right)^2 = kv^2$ a pohybová energie $kmv^2/2$, tedy přesně taková, jaká má po prvním odrazu být.

Úloha 38 ... krychle sem, krychle tam

Tom dostal k narozeninám krychli ABCDEFGH *o hraně délky* 2. *Byly na ní vyznačeny následující body:* P *střed hrany* AB, Q *střed hrany* GH, M *střed hrany* BC *a* N *střed hrany* EH. *Dále byly pak pojmenované:* X *průsečík* AM *a* CP *a* Y *průsečík* GN *a* EQ. *K dárku byl přiložen lísteček: urči délku* XY *ve tvaru číselného výrazu (není tedy nutné hodnotu uvést v desetinném tvaru). Tom se zamyslel a po chvíli se mu objevil úsměv na tváři. Zvládnete určit délku* XY *taky?*



Body X a Y jsou po řadě těžiště trojúhelníků ABC a EGH. Při pohledu shora tedy nutně musí platit, že oba body leží na zbývajících těžnicích v obou trojúhelnících, které spolu ovšem svírají přímý úhel, jedná se o pomyslnou úhlopříčku čtverce.[5] Z této znalosti jsme schopni spočítat pomyslnou vzdálenost na této úhlopříčce, která reálně odpovídá vzdálenosti paty kolmice vedené bodem X k rovině EFG.

Tato vzdálenost je za využití faktu, že těžiště trojúhelníku je v jedné třetině těžnice, rovna $2 \cdot 1/3 \cdot \sqrt{2}$. S pomocí této „vodorovné vzdálenosti bodů X a Y“, tzn. vzdálenosti paty kolmice a bodu Y a „svislé vzdálenosti“, která je rovna délce hrany krychle již můžeme vypočítat i „skutečnou“ hledanou vzdálenost, a to dosazením do Pythagorovy věty:

$$|\mathsf{XY}| = \sqrt{2^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{11}}{3}\,.$$

Vzdálenost bodů X a Y je $2\sqrt{11}/3 \doteq 2{,}21$.

Úloha 39 ... trpělivost růže přináší

Petr se vracel autem domů z tábora rychlostí 72 km/h *a potkal dopravní značku, která mu říkala, že za* 75 m *začne klesání, kde na* 100 *ujetých metrů klesne o pět metrů. Jelikož je Petr zodpovědný řidič, rozhodl se zastavit. Jeho auto má hmotnost* 1 500 kg *a brzdy vyvíjejí brzdnou sílu* 3 kN. *Jakou vzdálenost Petr ujede než zastaví? Odpor vzduchu zanedbejte.*

Je zjevné, že během brzdění se bude Petr pohybovat nerovnoměrně (bude zpomalovat z rychlosti $v = 72\,\mathrm{km/h} = 20\,\mathrm{m/s}$ až do zastavení). Jednou z možností řešení je tedy napsat rovnice pro zpomalení a početně náročným postupem dospět ke správnému řešení.

Nicméně, situace se o mnoho zjednoduší, pokud si uvědomíme, že kromě sil a zrychlení lze v mechanice uplatnit i energie. Zanedbáváme-li odpor vzduchu, můžeme tvrdit, že veškerá energie, kterou mělo Petrovo auto na začátku pohybu, tzn. kinetickou a potenciální energii, musely brzdy třením o brzdové destičky (tzn. prací třecích sil) přeměnit na teplo.

Pokud si označíme vodorovný úsek cesty $d = 75\,\mathrm{m}$, nakloněný úsek cesty s, hmotnost Petrova auta m a brzdnou sílu F, lze psát pro rovnost energií

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg\frac{5}{100}s = F(d+s)\,,$$

[5] Díváním se shora myslíme to, že bod A splyne s bodem E atd.

kde první člen vlevo je kinetická energie, druhý člen popisuje pokles potenciální energie a člen vpravo vyjadřuje práci třecích sil. Rovnici upravíme a vypočítáme neznámou dráhu s:

$$s = \frac{\frac{1}{2}mv^2 - Fd}{F - mg\frac{5}{100}} = \frac{10mv^2 - 20Fd}{20F - mg} = \frac{100}{3}\,\mathrm{m}\,.$$

Jelikož dráha, na které Petr brzdil, byla $s + d$, po sečtení dostáváme

$$s + d = \frac{100}{3}\,\mathrm{m} + 75\,\mathrm{m} = \frac{325}{3}\,\mathrm{m}\,,$$

tedy přibližně $108\,\mathrm{m}$.

Úloha 40 ... myš Lenka

Myš Lenka si myslí přirozené nenulové číslo x. To je rovno jedné tisícině součtu všech přirozených čísel menších než x. Jaké číslo x si myslí?

Součet libovolného počtu po sobě jdoucích přirozených čísel je roven aritmetickému průměru největšího a nejmenšího čísla krát počet sčítaných čísel. Tedy součet všech přirozených čísel menších než x (největší sčítané číslo je $x - 1$, nejmenší samozřejmě 1 a jejich počet je $x - 1$) je

$$s_x = \frac{1 + (x-1)}{2} \cdot (x-1)\,.$$

Pro Lenčino číslo tak můžeme sestavit rovnici

$$x = \frac{1}{1\,000} \cdot \frac{1 + (x-1)}{2} \cdot (x-1)$$

a vyřešit ji. Sami si již ověřte, že jediné nenulové řešení je $x = 2\,001$, což je hledané číslo, které si myš Lenka myslí.

Úloha 41 ... zahradnice

Denisa je šikovná zahradnice, která stále vymýšlí způsoby, jak získat ze svého obdélníkového políčka více druhů zeleniny zároveň. Posledně se rozhodla sázet mrkev a petržel.

Denisino políčko má rozměry $11\,\mathrm{m} \times 23\,\mathrm{m}$. Nejdříve začne sázet mrkev podél delší strany a první sazeničku umístí do rohu pole. Každou další položí $1{,}5\,\mathrm{m}$ od předcházející tak, že nejbližší sazeničky vždy tvoří vrcholy rovnostranných trojúhelníků. Pak doprostřed mezi každé dvě nejbližší mrkve (do středu $1{,}5\,\mathrm{m}$ strany) zasadí právě jednu petržel. Kolik petrželí zasadí?

V první řadě mrkví je 15 mezer, neboť $15 \cdot 1{,}5\,\mathrm{m} = 22{,}5\,\mathrm{m}$ je nejbližší menší násobek délky $1{,}5\,\mathrm{m}$ k délce Denisiny zahrady ($23\,\mathrm{m}$). Tedy v každé liché řadě bude zasazeno 16 mrkví a 15 petrželí.

Každá sudá řada má o jednu mrkev méně (tvoří jeden z vrcholů trojúhelníku, jehož zbylé vrcholy jsou v nižší nebo vyšší řadě mrkví), tedy 15 mrkví. Dále se pak tyto řady střídají.

Vzdálenost mezi jednotlivými řadami je dána výškou rovnostranného trojúhelníku o straně $a = 1{,}5\,\mathrm{m}$. Tuto výšku v určíme z Pythagorovy věty:

$$v = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \doteq 1{,}3\,\mathrm{m}\,.$$

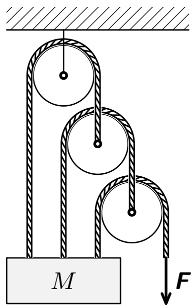
Počet mezer mezi řadami je 8, neboť právě osminásobek je nejbližší menší násobek $1{,}3\,\mathrm{m}$ k výšce její zahrady ($11\,\mathrm{m}$). To znamená, že na záhonu je 9 řad mrkví, konkrétně 5 řad po 16 mrkvích a 4 řady po 15 mrkvích. V řadách je tedy $5 \cdot (16 - 1) + 4 \cdot (15 - 1) = 131$ petrželí.

Další petržele budou vysázeny mezi řadami, ve středech stran příslušných trojúhelníků. Je snadné si rozmyslet, že v každé mezeře je vysázených 30 petrželí, neboť každou mrkev ze sudé řady (kde je 15 mrkví) lze spojit dvěma spojnicemi dlouhými $1{,}5\,\mathrm{m}$, které prochází šikmo přes tu samou mezeru, se dvěma mrkvemi z každé liché řady. Celkem je tedy mezi řadami vysázeno $8 \cdot 30 = 240$ petrželí.

Konečně, celkový počet petrželí, které Denisa vysázela, je $131 + 240 = 371$.

Úloha 42 ... kladkostroj

Petr chce zvedat i těžká břemena, a proto si sestrojil unikátní kladkostroj (viz obrázek s kladkostrojem, jenž má tři kladky). Z kolika kladek má sestrojit kladkostroj, se kterým bude schopen zvednout závaží o hmotnosti $3{,}2\,\mathrm{t}$*? Petr umí tahat silou nejvíce* $1\,000\,\mathrm{N}$.



Na lano první kladky působíme silou $F = 1\,000\,\mathrm{N}$. Tato síla se přes kladku přenáší i na druhý konec lana, kde působí taktéž síla $F = 1\,000\,\mathrm{N}$. Na kladku samotnou tak působí síla F ze dvou stran – tedy závěs první kladky je zatížen silou $2F$. Tato síla $2F$ se opět druhou kladkou přenáší na druhou stranu, kde je i touto silou nadzvedáno břemeno. Zároveň na další kladku už působí síla $4F$ a princip se opět opakuje.

Všimněme si, že síla, kterou je nakonec břemeno nadzvedáno, je vždy dvojnásobkem síly předchozí. Na břemeno tedy působí síly F, $2F$, $4F$, atd. Chceme-li uzvednout břemeno s hmotností m, musíme použít tolik kladek, aby platila nerovnice

$$F + 2F + 4F + \cdots \geq mg \quad \Rightarrow \quad F\left(1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1}\right) \geq mg\,,$$

kde n jsme označili počet použitých kladek. Po vydělení nerovnice silou F a dosazení dostáváme

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} \geq \frac{mg}{F} = \frac{3\,200\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2}}{1\,000\,\mathrm{N}} = 32\,.$$

Postupným přičítáním mocnin dvojky se pak dostaneme k řešení

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{6-1} \geq 32\,.$$

K uzvednutí břemene o hmotnosti $3{,}2\,\mathrm{t}$ tedy Petr potřebuje 6 kladek.

Na organizaci Náboje Junior 2015 se podílely následující organizace:

Organizátorem pro Českou republiku byl fyzikální korespondenční seminář Výfuk, součást *Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze.* Na Slovensku organizaci zajišťovalo občanské sdružení Trojsten.

V České republice se Náboj Junior uskutečnil na 13 středních a vysokých školách:

Brno – *Fakulta stroj. inženýrství VUT*
České Budějovice – *Gymnázium Jírovcova*
Česká Lípa – *Gymnázium Žitavská*
Frýdlant nad Ostravicí – *Gymnázium Frýdlant*
Hradec Králové – *Univerzita Hradec Králové*
Karlovy Vary – *První české gymnázium v Karlových Varech*
Olomouc – *Gymnázium Olomouc-Hejčín*
Ostrava – *Gymnázium O. Havlové*
Písek – *SPŠ a VOŠ Písek*
Praha – *Gymnázium Ch. Dopplera*
Praha – *Gymnázium Voděradská 2*
Třebíč – *Katolické gymnázium*
Zlín – *Gymnázium Zlín-Lesní čtvrť*

Na Slovensku se Náboj Junior uskutečnil na 16 místech:

Banská Bystrica – *Gymnázium A. Sládkoviča*
Bratislava – *Univerzitné pastor. centrum UK*
Brezno – *Gymnázium J. Chalupku*
Hlohovec – *Gymnázium I. Kupca*
Košice – *Gymnázium Alejová*
Levice – *Gymnázium A. Vrábla*
Lučenec – *CVČ Magnet*
Námestovo – *Gymnázium A. Bernoláka*
Nitra – *Gymnázium Párovská*
Partizánske – *Gymnázium Partizánske*
Poprad – *Gymnázium Kukučínova*
Prešov – *Gymnázium J. A. Raymana*
Šurany – *Gymnázium Bernolákova*
Trenčín – *Piar. gymnázium J. Braneckého*
Trstená – *Gymnázium Trstená*
Žilina – *Gymnázium Veľká Okružná*

Autoři úloh a jejich řešení

Jáchym Bártík, Kateřina Bartošová, Vít Beran, Jindřich Dušek, Lukáš Fusek, Simona Gabrielová, Martin Gažo, Miroslav Hanzelka, Denisa Chytilová, Ondřej Knopp, Lucie Kundratová, Matěj Mezera, David Němec, Jan Preiss, Kateřina Rosická, Jakub Sláma, Kateřina Stodolová, Karolína Šromeková, Patrik Švančara, Tomáš Kremel, Pavla Trembulaková, Tereza Uhlířová a lokální organizátoři z Bratislavy a Námestova

Korektury

Lukáš Fusek, Miroslav Hanzelka, Tomáš Kremel, Lukáš Ledvina, David Němec, Jakub Sláma, Petr Šimůnek, Karolína Šromeková, Radka Štefaníková, Patrik Švančara a Tereza Uhlířová

Obrázky a sazba

Michal Červeňák, Tomáš Kremel, Lukáš Ledvina, Petr Šimůnek a Patrik Švančara