NÁBOJ junior

4. ročník

2015/16

Vzorové riešenia

Ahojte,

práve sa Vám do rúk dostala brožúrka zadaní a riešení úloh Náboja Junior 2015.

Náboj Junior je matematicko-fyzikálna súťaž pre štvorčlenné tímy žiakov druhého stupňa základnej školy a žiakov nižšieho stupňa viacročných gymnázií. Celá súťaž trvá presne 120 minút, počas ktorých sa tímy snažia vyriešiť čo najviac úloh.

V tejto súťaži nejde o bezhlavú aplikáciu už nadobudnutých vedomostí. Úlohy vyžadujú tiež istú dávku invencie a dôvtipu.

4. ročník Náboja Junior prebiehal dňa 20. 11. 2015 v šestnástich mestách na Slovensku a v trinástich mestách v Českej republike. Práve v týchto mestách sa našli šikovní organizátori zo stredných, prípadne vysokých škôl a umožnili regionálnym základným školám zasúťažiť si a preveriť svoje vedomosti.

Cieľom súťaže je ukázať, že matematika a fyzika sú zaujímavé prírodné vedy s množstvom výziev a príležitostí pre každého žiaka. Zároveň organizátori dostanú možnosť vytvoriť svoju súťaž a zistiť, že organizovanie a práca v tíme vie byť zábavná, ale aj náročná.

Súťaž Náboj Junior vznikla ako spoločná aktivita občianskeho združenia Trojsten a korešpondenčného seminára MFF UK Výfuk. Členovia organizácií sú vysokoškolskí študenti Fakulty matematiky, fyziky a informatiky UK v Bratislave alebo Matematicko-fyzikální fakulty UK v Prahe, ktorí sa snažia o rozvoj detí a študentov.

Prajeme príjemné zamýšľanie sa nad príkladmi,

o. z. Trojsten a korešp. seminár MFF UK Výfuk

Riešenia úloh IV. ročníka Náboja Junior

Úloha 1 ... zber papiera

Organizátori Náboja Junior sa zapojili do zberu papiera a povedali si, že ho chcú vyzbierať 1 tonu. *Dušan priniesol* 150 kg*, Jarka priniesla* 4 500/15 kg*, Katke sa podarilo zohnať* 2/5 tony*, Maťo priniesol* 120 000 g *a silák Fero doniesol úžasné* 4 000 000 mg*. Koľko gramov papiera musí priniesť Edo, aby sa organizátorom podarilo splniť ich cieľ?*

Aby sme mohli jednotlivé hmotnosti sčítať, musíme všetky hmotnosti previesť na spoločné jednotky. Vyberieme si napríklad kilogramy: cieľ organizátorov je teda vyzbierať dokopy 1 000 kg. Dušan priniesol 150 kg, Jarka 4 500/15 kg = 300 kg, Katka 2/5 t = 2/5 · 1 000 kg = 400 kg, Maťo 120 000 g = 120 000/1 000 kg = 120 kg a Fero 4 000 000 mg = 4 000 000/1 000 000 kg = = 4 kg. Po sčítaní týchto hmotností dostávame 974 kg, čo znamená, že zostáva ešte doniešť ďalších 26 kg, čo je v požadovaných jednotkách 26 000 g.

Úloha 2 ... Radka zakúrila

Radka sa po Vianociach vrátila na intrák, kde bolo iba 13 °C*, preto o 14:15 zapla všetky tri druhy kúrenia. Prvé zvýši teplotu o* 4 °C *za* 3 *hodiny, druhé o* 2 °C *za hodinu a tretie o* 2 °C *za* 3 *hodiny. Kedy bude Radka spokojná a v miestnosti bude mať vytúžených* 25 °C*?*

Najskôr si spočítajme, o koľko zvýšia jednotlivé ohrievače teplotu v miestnosti za hodinu. Prvý z nich zvýši teplotu o 4 °C za 3 hodiny, teda o 4/3 °C za hodinu. Druhý za hodinu zvýši teplotu o 2 °C a tretí o 2/3 °C. Po sčítaní týchto troch prírastkov dostaneme, že za hodinu sa v Radkinej izbe zvýši teplota presne o 4 °C. Rozdiel medzi pôvodnou a požadovanou teplotou je $(25-13)$ °C = 12 °C, čo ale znamená, že Radkina izba sa na požadovanú teplotu 25 °C vykúri za 12 °C/(4 °C/h) = 3 h, tzn. o 17:15.

Úloha 3 ... prenikavý parfum

Majka dostala na narodeniny nový parfum. Hneď musela vyskúšať, koľko spolužiakov sediacich okolo nej zacíti jej novú vôňu. Tá sa od Majky šíri rýchlosťou 20 cm/s *a po* 9 s *sa rozplynie. Koľko Majkiných spolužiakov vôňu ucíti, ak v triede sedia tak, že okolo nej tvoria pravidelnú štvorcovú sieť a najbližší spolužiak je od Majky vzdialený* 1 m*?*

Najprv vyjadríme rýchlosť šírenia vône 20 cm/s v základných jednotkách: 20 cm/s = 0,2 m/s. Vzdialenosť d, do ktorej sa vôňa dostane, už teraz vypočítame jednoducho ako súčin rýchlosti a času $d = 0{,}2\,\mathrm{m/s}\cdot 9\,\mathrm{s} = 1{,}8\,\mathrm{m}$. Ak si nakreslíme obrázok rozmiestnenia Majkiných spolužiakov, zistíme, že vôňu zacítia štyria najbližší ľudia, ktorých vzdialenosť od Majky je 1 m, a štyria ľudia, ktorí voči Majke sedia uhlopriečne.[1] Ďalší spolužiaci sú už vo vzdialenosti väčšej ako 2 m, tí už vôňu neucítia. Spolu teda vôňu ucíti osem spolužiakov.

[1] Podľa pytagorovej vety je ich vzdialenosť rovná $\sqrt{2}\,\mathrm{m} \doteq 1{,}4\,\mathrm{m}$.

Úloha 4 ... zlepené kocky

Arthur má tri rovnaké hracie kocky. Jednu kocku vezme a na dve jej steny prilepí zvyšné dve kocky tak, aby súčet bodiek, ktoré na tomto útvare zostanú viditeľné, bol čo najväčší. Aký je tento (najväčší) súčet?

Keďže kocky k sebe môžeme prilepiť ľubovoľnými stranami a môžeme ich ľubovoľne otáčať, je jednoduché si premyslieť, že najlepšie je zlepiť prvé dve kocky stenami, na ktorých sú jednotky. Zvyšnú kocku potom prilepíme stenou, na ktorej je jedna bodka, o stenu, na ktorej sú dve bodky.

Spoje teda prekryli tri steny s jednou bodkou, a jednú stenu s dvomi bodkami – teda najmenšiu možnú kombináciu súčtu zlepených bodiek $3 \cdot 1 + 2 = 5$, ktorú musíme odrátať od súčtu všetkých hodnôt na všetkých troch kockách $3 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 63$. Z čoho dostaneme výslednú hodnotu 58 bodiek.

Úloha 5 ... nový tablet

Paťo si kúpil nový tablet, ktorý stál 311,2 €. Pri pokladni platil päťstovkou. Aký je najmenší možný počet bankoviek a mincí, ktoré mu predavačka mohla vydať?

Predavačka musí Paťovi vydať (500 − 311,2) € = 188,8 €. Túto čiastku budeme musieť skladať postupne od najvyšších bankoviek, ktoré môžeme použiť na zníženie zostávajúcej čiastky. Stoeurovka nám čiastku zníži na 88,8 €, päťdesiatka potom na 38,8 €, dvadsiatka na 18,8 €, desiatka na 8,8 €, päťka na 3,8 €, ktoré ďalej zložíme z jednej dvojeurovky, jednoeurovky a päťdesiatcentovky, dvadsaťcentovky a desaťcentovky. Paťo od nej teda dostal dokopy 10 bankoviek a mincí.

Úloha 6 ... knižnica

Čajka má zaujímavú zbierku knižiek. Najčítanejšia knižka je hrubá 0,5 cm, každá ďalšia knižka je o 0,5 cm hrubšia ako predchádzajúca. Najhrubšia kniha je hrubá 11,5 cm. Aká je celková hrúbka jej zbierky?

Celková hrúbka zbierky kníh je daná súčtom hrúbok všetkých knižiek, ktorých je $11{,}5/0{,}5 = 23$. Buď môžeme sčítať postupne alebo využiť vzorec pre súčet aritmetickej postupnosti:

$$\frac{23 \cdot (0{,}5\,\mathrm{cm} + 11{,}5\,\mathrm{cm})}{2} = 138\,\mathrm{cm}\,.$$

Čajka má teda zbierku kníh hrubú 138 cm.

Úloha 7 ... dobiehanie autobusu

Bebe prišla na zastávku presne vtedy, keď jej pred nosom odišiel autobus. Autobus prešiel 300 m na križovatku, kde stál 30 s, potom odbočil kolmo doprava a išiel ďalších 400 m na nasledujúcu *zastávku. Ako rýchlo musí Bebe bežať skratkou cez park (od zastávky priamo k nasledujúcej zastávke), aby autobus na druhej zastávke stihla? Rýchlosť autobusu je* $10\,\mathrm{m/s}$.

Najskôr vypočítame, ako dlho trvá autobusu cesta medzi dvomi uvedenými zastávkami. Dráhu $300\,\mathrm{m}$ prejde autobus rýchlosťou $10\,\mathrm{m/s}$ za $(300/10)\,\mathrm{s} = 30\,\mathrm{s}$, podobne pre časť cesty za križovatkou vychádza $40\,\mathrm{s}$. Cesta teda autobusu trvá $30\,\mathrm{s} + 30\,\mathrm{s} + 40\,\mathrm{s} = 100\,\mathrm{s}$ (Nemôžeme zabudnúť na $30\,\mathrm{s}$, počas ktorých stál na križovatke). Vzdialenosť, ktorú Bebe musí prebehnúť, vypočítame pomocou pytagorovej vety: $c^2 = a^2 + b^2$, kde za a a b dosadíme vzdialenosti zo zadania. Dostaneme $c = 500\,\mathrm{m}$. Ak má Bebe autobus stihnuť, musí túto vzdialenosť prekonať za $100\,\mathrm{s}$, teda musí bežať rýchlosťou $(500/100)\,\mathrm{m/s} = 5\,\mathrm{m/s}$.

Úloha 8 ... pán Alzheimer

Pán Alzheimer často zabúda svoj vek, a preto si na nástenku pripína nápovedy, keďže všetky významné udalosti jeho života sa stali presne v deň jeho narodenín. V jednej trinástine svojho života sa naučil jesť príborom, v jednej šestine sa prvýkrát zamiloval, v jednej tretine vyšiel na Mount Everest a v polovici bol na dne Mariánskej priekopy. Koľko mal rokov, keď písal túto nápovedu?

Keďže sa všetky tieto významné udalosti stali v deň jeho narodenín, tak jeho presný vek bol v ten deň celé číslo. Inak povedané, vek pána Alzheimera musí byť vždy deliteľný danou časťou jeho života. V úlohe teda hľadáme vhodný spoločný násobok čísel 2, 3, 6 a 13. Preto si ich rozložíme na prvočísla: 2, 3 a 13 už prvočísla sú, číslo 6 rozložíme na $2 \cdot 3$.

Najmenší spoločný násobok vypočítame ako $2 \cdot 3 \cdot 13 = 78$ (výsledok je potom deliteľný aj šestkou). Pán Alzheimer sa potom mohol dožiť ľubovoľného celočíselného násobku 78 rokov. Keďže je to človek, u ktorého očakávame, že sa dožíva bežného veku, vidíme, že v dobe písania nápovedy mal 78 rokov.

Úloha 9 ... triktát rež a raz meraj

Dávid našiel v kôlni drevenú tyč a pílku. Rozhodol sa tyč rozrezať v pomere $4:3$. *Zapáčilo sa mu to a pokračoval pílením kratšej časti, ktorú rozdelil v pomere* $3:2$. *Novovzniknutú dlhšiu časť potom rozdelil v pomere* $5:4$. *Akú časť pôvodnej tyče tvorí najmenší vzniknutý kúsok?*

Dávid tyč rozdelil najprv v pomere $4:3$, menšia časť mala teda dĺžku $3l/7$, kde l je dĺžka celej tyče. Po rozdelení tejto časti v pomere $3:2$ dostaneme pre dlhší zo vzniknutých kúskov dĺžku

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{3l}{7} = \frac{9l}{35}\,.$$

Potom čo tento diel ďalej rozdelíme v pomere $5:4$, bude dĺžka najmenšieho kúska rovná

$$\frac{4}{9} \cdot \frac{9l}{35} = \frac{4l}{35}\,.$$

Dĺžka najmenšieho kúska Dávidovej tyče je teda rovná $4/35$ pôvodnej dĺžky tyče. Podobným výpočtom si môžeme overiť, že všetky ostatné kúsky tyče sú dlhšie.

Úloha 10 ... pražské metro

Tom by rád vedel, koľko súprav jazdí na pražskej linke metra C. Raz mal pri ceste z Matfyzu chvíľu čas a pozoroval ako metro jazdí. Počas svojho pozorovania zistil, že

- *linka C má 20 staníc,*
- *cesta mezi dvoma stanicami (aj so zastavením na stanici) trvá priemerne 1 minútu a 30 sekúnd,*
- *súpravy jazdia v oboch smeroch v intervaloch 1 minúta a 20 sekúnd,*
- *otočenie súpravy v konečnej stanici trvá presne tri a pol minúty.*

Koľko súprav metra jazdí na linke C?

Každá súprava metra prejde v jednom okruhu $3 \cdot 19$ úsekov medzi stanicami a dvakrát sa otáča. Jeden okruh teda trvá

$$t = 2 \cdot 19 \cdot (1\,\mathrm{min}\,30\,\mathrm{s}) + 2 \cdot (3\,\mathrm{min}\,30\,\mathrm{s}) = 57\,\mathrm{min} + 7\,\mathrm{min} = 64\,\mathrm{min}\,.$$

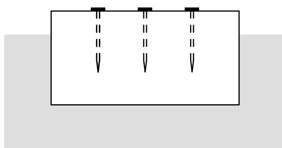
Keďže vieme, že súpravy jazdia neustále, vydelíme tento čas intervalom medzi súpravami, z čoho získame hľadaný počet súprav:

$$n = \frac{64\,\mathrm{min}}{1\,\mathrm{min}\,20\,\mathrm{s}} = 48\,.$$

Na linke C jazdí 48 súprav.

Úloha 11 ... drevená lodička

Luxusko má drevenú lodičku tvaru kvádra. Jej hmotnosť je $80\,\mathrm{g}$ *a celá je zhotovená z dreva s hustotou* $800\,\mathrm{kg/m^3}$. *Najviac koľko klincov s hmotnosťou* $1{,}5\,\mathrm{g}$ *môže Luxusko zabiť do lodičky (pozri obrázok), tak, aby sa lodička nepotopila? Objem kvádra sa pri zatĺkaní nemení, Luxusko zatĺka klince celé, až po hlavičku.*



Lodička je podľa Archimedovho zákona nadľahčovaná silou F_{vz} s veľkosťou $F_{\mathrm{vz}} = V\varrho g$, kde V je jej objem, ϱ hustota vody a g tiažové zrýchlenie. Na lodičku pôsobí maximálna vztlaková sila, keď je lodička ponorená celým svojím objemom. Dosadením zadaných hodnôt (objem lodičky získame ako podiel jej hmotnosti a hustoty dreva) nám vyjde vztlaková sila $F_{\mathrm{vz}} = 1\,\mathrm{N}$. Zároveň je lodička priťahovaná smerom dole tiažovou silou, ktorá je rovná $F_g = mg$, kde m je hmotnosť lodičky. Dosadením dostávame $F_g = 0{,}8\,\mathrm{N}$. Aby sa lodička nepotopila, nesmie byť veľkosť tiažovej sily väčšia ako veľkosť vztlakovej sily. Klince teda môžu byť priťahované k zemi silou maximálne $F = 0{,}2\,\mathrm{N}$. Z toho vyplýva, že maximálna povolená hmotnosť klincov je $m_{\max} = F/g = 0{,}02\,\mathrm{kg} = 20\,\mathrm{g}$. Jeden klinec váži $1{,}5\,\mathrm{g}$, takže ich Luxusko môže zatĺcť najviac 13, aby sa lodička nepotopila.

Úloha 12 ... je tu nejak tesno!

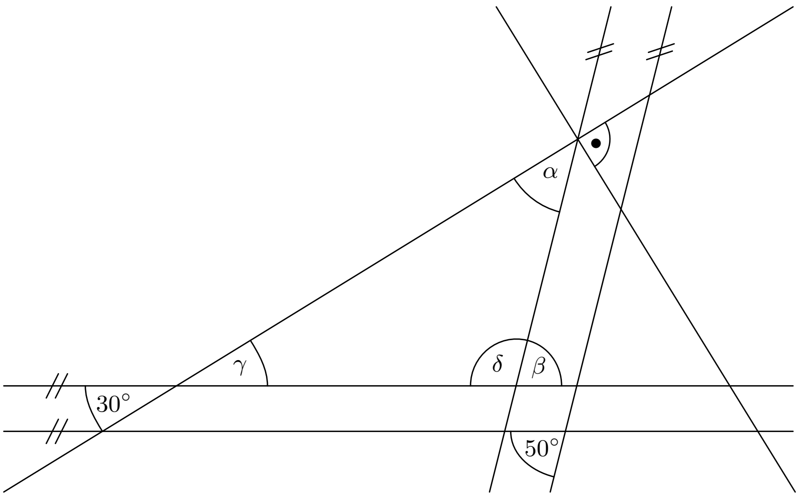
Cestou na náboj Kamila zbadala na električke napísané pätnásťmiestne číslo 453 739 612 759 810. *Aby zahnala nudu v preplnenom vagóne, rozmýšľala, aké najmenšie číslo môže z tohto čísla vytvoriť vyškrtnutím piatich ľubovoľných cifier. Aké?*

Číslo si poriadne prezrieme a všimneme si, že sa musíme snažiť dostať čo najmenšiu číslicu na predné pozície (doľava). Najlepšie teda bude začať zľava a postupne vyškrtávať niektoré číslice. Štvorku a päťku hneď na ľavom kraji môžeme vyškrtnúť, lebo na vedúcej pozícii sa takto objaví trojka, ktorá je menšia ako obe uvedené čísla. Trojku preskočíme a škrtneme sedmičku (medzi trojkami), získame tak číslo začínajúce ciframi 33. Keby sme škrtli aj prvú trojku, dostali by sme číslo začínajúce ciframi 39 a výsledné číslo by bolo väčšie. Škrtať môžeme ešte dvakrát. Rovnakou úvahou nahliadneme, že vyškrtnutím deviatky a šestky (medzi trojkou a jednotkou) získame hľadané číslo 3 312 759 810.

Úloha 13 ... rozsypané špajle

Tinke sa rozsypali špajle a utvorili obrazec na obrázku. Tinka by rada vedela, aká je veľkosť uhlu α. Poradíte jej?

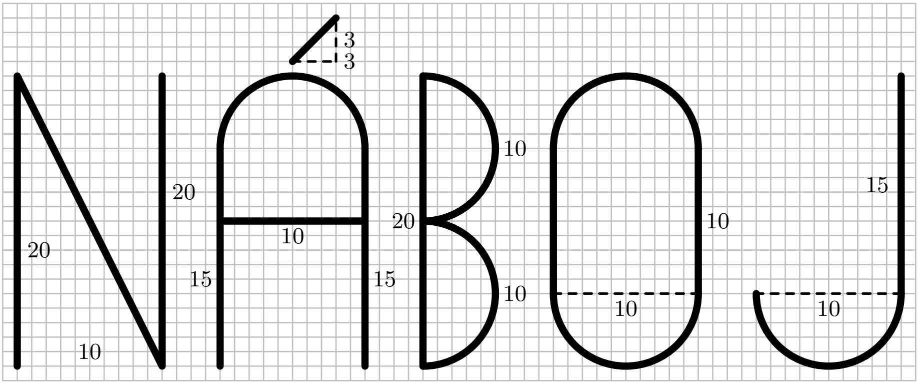
Najskôr si v obrázku označíme uhly β, γ a δ (viď obrázok). Vidíme, že uhol β a uhol o veľkosti 50° sú striedavé uhly, preto $\beta = 50^\circ$. Ďalej vidíme, že uhol γ a uhol o veľkosti 30° sú uhly súhlasné, teda $\gamma = 30^\circ$. Uhol δ je doplnkovým uhlom k uhlu β, a preto $\delta = 180^\circ - \beta = 130^\circ$. Nakoniec si môžeme všimnúť, že uhly α, γ a δ sú vnútorné uhly trojuholníku, čo znamená, že $180^\circ = \alpha + \gamma + \delta$, odkiaľ ľahko určíme, že $\alpha = 20^\circ$.



Úloha 14 ... guľôčkové pero

Denda si zakladá na kvalitnej úprave písma vo svojom zošite, a preto používa kvalitné guľôčkové pero. To funguje tak, že v hrote pera je umiestnená malá guľôčka s polomerom 0,5 mm, ktorá sa ťahaním po papieri odvaľuje, čím sa na papier nanáša atrament. Koľkokrát sa otočí *guľôčka v Dendinom pere, kým napíše nápis „NÁBOJ“ (na obrázku)? Obrázok je zväčšený, šírka štvorčeku je v skutočnosti* 1 mm.

Všimnime si, že nápis sa skladá iba z rovných a šikmých čiar a polkružníc. Zo zadania vieme, že štvorček má stranu dĺžky 1 mm, takže môžeme spočítať dĺžky jednotlivých čiar, respektíve polomery polkružníc, viď. obrázok. Dĺžku šikmej čiary zrátame pomocou Pytagorovej vety. Sčítaním dĺžok všetkých čiar dostaneme celkovú dĺžku napísanej čiary $l = 255{,}85\,\mathrm{mm}$. Obvod guľôčky v pere je $o = 2\pi r = \pi\,\mathrm{mm}$. Guľôčka v pere sa preto otočí $(255{,}85/\pi)$krát, číselne asi 81krát.



Úloha 15 ... cesta z Náboja

Kvík sa rozhodol, že pôjde na Náboj bicyklom. Ak by naspäť išiel priemernou rýchlosťou 15 km/h, *dorazil by domov o 16:30. Ak by išiel priemernou rýchlosťou* 25 km/h, *prišiel by o 15:30. Akou rýchlosťou by musel ísť, aby prišiel o 16:00?*

Dobu jazdy, po ktorej Kvík dorazí domov o 16:00, označme t a dĺžku cesty na Náboj označme s. Ak ide rýchlosťou 15 km/h, cesta mu trvá o 0,5 h dlhšie, a ak ide rýchlosťou 25 km/h, cesta mu trvá o 0,5 h kratšie.Teda platia rovnosti

$$\frac{s}{15\,\mathrm{km/h}} = t + 0{,}5\,\mathrm{h}\,,$$
$$\frac{s}{25\,\mathrm{km/h}} = t - 0{,}5\,\mathrm{h}\,.$$

Riešime teda sústavu dvoch rovníc s dvomi neznámymi

$$s = 15\,\mathrm{km/h}\cdot t + 7{,}5\,\mathrm{km}\,,$$
$$s = 25\,\mathrm{km/h}\cdot t - 12{,}5\,\mathrm{km}\,.$$

Pomocou porovnávacej metódy (musia sa rovnať pravé strany rovníc) určíme t

$$15\,\mathrm{km/h}\cdot t + 7{,}5\,\mathrm{km} = 25\,\mathrm{km/h}\cdot t - 12{,}5\,\mathrm{km}\,,$$
$$t = 2\,\mathrm{h}\,.$$

Čas t dosadíme späť do rovníc a dopočítame dĺžku Kvíkovej cesty

$$s = 15\,\mathrm{km/h} \cdot 2\,\mathrm{h} + 7{,}5\,\mathrm{km} = 37{,}5\,\mathrm{km}\,.$$

Nakoniec vypočítame Kvíkovu rýchlosť ako podiel dráhy a času

$$v = \frac{s}{t} = \frac{37{,}5\,\mathrm{km}}{2\,\mathrm{h}} = 18{,}75\,\mathrm{km/h}\,.$$

Aby Kvík dorazil domov o 16:00, musel by ísť rýchlosťou 18,75 km/h.

Úloha 16 ... cestovanie MHD

Samko ide z centra mesta autobusom o 17:05 až na konečnú zastávku, ktorá je vzdialená presne 15 km*. Z tejto konečnej zastávky odchádzajú autobusy celý deň, vždy o celej a potom každých desať minút. Koľko protismerných autobusov Samko počas svojej cesty stretne, ak je priemerná rýchlosť všetkých autobusov* 30 km/h*?*

Podľa vzťahu pre rovnomerný pohyb bude doba Samkovej cesty

$$t = \frac{s}{v} = \frac{15\,\mathrm{km}}{30\,\mathrm{km/h}} = 0{,}5\,\mathrm{h}\,.$$

Cestovať teda bude od 17:05 do 17:35. Pretože sa cestou bude pohybovať z centra mesta na konečnú, stretne všetky autobusy, ktoré majú príchod do centra medzi 17:05 a 18:05 (posledný autobus, ktorý by Samko mohol stretnúť, musí vyraziť z konečnej najenskôr o 17:35, neskorší autobus už nemôže stretnúť). Pretože cesta protiidúcich autobusov trvá tiež 0,5 h, Samko stretne tiež všetky autobusy, ktoré vyrazili z konečnej zastávky medzi 16:35 a 17:35. Pretože autobusy odchádzajú vždy o celej hodine a potom po 10 minútach, stretne dokopy šesť autobusov, ktoré z konečnej zastávky odišli medzi 16:35 a 17:35.

Úloha 17 ... lietadlo

Kubo s Tinou boli na prechádzke, keď zrazu na oblohe spozorovali lietadlo svojho kamaráta Jimiho. Jimi ich z lietadla videl tiež, a tak v momente, kedy sa nachádzal priamo nad nimi, vyslal na pozdrav krátky zvukový signál. Kubo s Tinou tento signál počuli až 10 s *po jeho vyslaní. Ako ďaleko sa od nich Jimi nachádzal vo chvíli, keď Kubo s Tinou zvuk započuli? Jimi letí vodorovne konštantnou rýchlosťou* 200 m/s.

Z omeškania zvuku $t = 10\,\mathrm{s}$ vieme určiť výšku, v ktorej Jimi letel. Keďže z tabuliek poznáme rýchlosť zvuku, Jimiho letová výška je

$$h = v_\mathrm{z} t = 300\,\mathrm{m/s} \cdot 10\,\mathrm{s} = 3\,000\,\mathrm{m}\,.$$

Za ten istý čas 10 s Jimi prejde vzdialenosť $s = vt$, kde v je rýchlosť jeho lietadla. Číselne je to

$$s = v_\mathrm{s} t = 200\,\mathrm{m/s} \cdot 10\,\mathrm{s} = 2\,000\,\mathrm{m}\,.$$

Vzdialenosť stíhačky l od Kuba a Tiny dopočítame pomocou Pytagorovej vety, pričom táto vzdialenosť je prepona pravouhlého trojuholníka s odvesnami h a s. Môžeme teda napísať

$$l = \sqrt{h^2 + s^2} = \sqrt{(3\,000\,\mathrm{m})^2 + (2\,000\,\mathrm{m})^2} = \sqrt{13\,000\,000\,\mathrm{m}^2} = \sqrt{13}\,\mathrm{km} \doteq 3{,}6\,\mathrm{km}\,.$$

Od chvíle, kedy Tina s Kubom započuli Jimiho pozdrav, bol Jimi vzdialený už o asi 3,6 km.

Úloha 18 ... kúpte si novú!

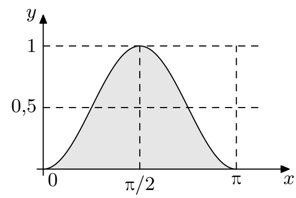
Po babičke sme zdedili chladničku. Táto chladnička mala príkon 50 W a po troch rokoch používania sa pokazila. Museli sme si kúpiť novú, ktorá bola úspornejšia, s príkonom iba 25 W. Cena elektriny je 0,5 €/kWh, chladnička je zapojená celý deň, rok má 365 dní. Koľko peňazí by sme ušetrili, ak by sme si rovno kúpili novú chladničku?

Najskôr spočítame, koľko hodín odpovedá trom (nepriestupným) rokom. $(3 \cdot 365 \cdot 24)\,\mathrm{h} = 26\,280\,\mathrm{h}$. Ďalej zistíme, koľko elektriny spotrebuje každá z chladničiek za túto dobu: $(26\,280 \cdot 50)\,\mathrm{Wh} = 1\,314\,000\,\mathrm{Wh}$ v prípade starej chladničky a $(16\,280 \cdot 25)\,\mathrm{Wh} = 657\,000\,\mathrm{Wh}$ v prípade novej. Rozdiel týchto dvoch čísel (prevedený na kWh) vynásobíme cenou elektriny a dostaneme hľadaný výsledok: $(1\,314 - 657)\,\mathrm{kWh} \cdot 0{,}5\,€/\mathrm{kWh} = 328{,}5\,€$. Ušetrili by sme teda 328,5 €.

Úloha 19 ... integrálna

Kajka si nakreslila zvláštnu krivku a zaujímalo by ju, aký je obsah plochy medzi jej krivkou a osou x, medzi bodmi $x = 0$ a $x = \pi$. Odhadnite ho s presnosťou na jednu desatinu.

Z obrázku si môžeme všimnúť, že pomocné čiarkované čiary rozďeľujú plochu pod krivkou na štyri časti s nápadnou symetriou. Tie môžeme preusporiadať tak, aby vytvorili obdĺžnik so stranami 0,5 a π. Hľadaná plocha pod krivkou je teda $S = \pi/2 \doteq 1{,}57$. Tolerované výsledky sú preto v intervale $\langle 1{,}47; 1{,}67 \rangle$.



Úloha 20 ... sila hesla

Syslík používa k svojmu počítaču iba trojznakové heslo. Pretože má problém si heslo zapamätať, zapísal si, že obsahuje dve spoluhlásky a jednu samohlásku. Žiadne písmeno sa v ňom neopakuje a neobsahuje diakritiku. Potom odišiel na sústredenie, kde ho spoľahlivo zabudol. Koľko rôznych kombinácií hesiel teraz musí Syslík vyskúšať, aby určite natrafil na tú správnu kombináciu? Syslík používa výhradne anglickú abecedu.

Ak má heslo tri písmená, tak umiestnenie samohlások a spoluhlások má len tri varianty: samohláska—spoluhláska—spoluhláska, spoluhláska—samohláska—spoluhláska a spoluhláska—spoluhláska—samohláska.

Anglická abeceda obsahuje 26 písmen, z toho je 6 samohlások a 20 spoluhlások. Vidíme, že do každej z troch variánt môžeme dosadiť ľubovoľnú samohlásku zo šiestich, umiestnenie spoluhlások je už potom jednoznačné. Vieme však, že sa nemôžu opakovať, a preto u prvej zo spoluhlások volíme jednu z 20 možností, ale u druhej spoluhlásky už len z 19 možností. Pre každú variantu hesla tak získame celkom $6 \cdot 19 \cdot 20$ rôznych kombinácií.

Spolu je počet možností trikrát väčší, pretože existujú tri varianty umiestnenia samohlások. Prípustných kombinácií je teda

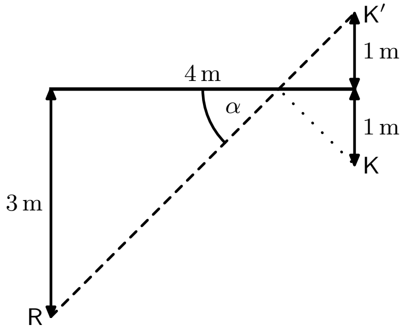
$$3 \cdot 6 \cdot 19 \cdot 20 = 6\,840\,.$$

Ak Syslík vyskúša dokopy 6 840 rôznych hesiel, jedno z nich bude určite správne.

Úloha 21 ... posvietim si na teba

Na obrázku v bode R *stojí Radka a chce si baterkou posvietiť na Katku, ktorá stojí v bode* K. *Určte, pod akým uhlom α má Radka svietiť na zrkadlo, aby sa lúč šíril po čo najkratšej dráhe.*

Dráha bude rovnaká, ak polohu Katky zobrazíme zrkadlom do bodu K', inak povedané, ak budeme svietiť na Katkin obraz v zrkadle (viď. obrázok). Vieme, že najkratšia spojnica dvoch bodov leží na priamke – spojíme teda bod R s bodom K' úsečkou. Teraz ostáva už len určiť uhol α. Môžeme si všimnúť, že body R a K' sú protiľahlé vrcholy štvorca so stranou 4 m. Úsečka RK' je v tom prípade uhlopriečka tohto štvorca. Uhol α teda musí byť polovica pravého uhla, čo je práve 45°.



Úloha 22 ... rande

Žabčo sa rozhodol pozvať Kaťu na rande. Zaujímavé na tom bolo, že miesto ich stretnutia zašifroval. Poradíte Kati, kam má prísť? Riešenie tejto úlohy sú dve slová písané bez diakritiky, k výsledku vám pomôžu rovnosti $\odot + \diamondsuit = E$, $\odot + \bigcirc = X$, $\triangle + * = H + 26 = AH$ *a* $Z = 26$

	$\oplus$	$-$	$\heartsuit$	$\bigcirc$	$\heartsuit$	$\Box$	$\diamondsuit$
	$*$	$\diamondsuit$	$\triangle$	$\times$	$\diamondsuit$	$\odot$	$\diamondsuit$
A	M	G	B	L	T	O	B

Je zrejmé, že naším cieľom je priradiť každému symbolu nejaké písmenko, aby sme dostali hľadané slová. Vzhľad šifry pripomína sčítanie pod sebou, pričom v nápovede máme $Z = 26$. Každému písmenu by sme teda mohli priradiť číslo zodpovedajúce jeho pozícii v anglickej abecede, ktorú máme v tabuľke.

Indícia $\triangle + * = H + 26 = AH$ napovedá, že sčítavať budeme musieť v dvadsaťšestkovej sústave, tzn. pokiaľ je náš súčet väčší ako 26, abeceda sa „zopakuje“. Navyše sa tento presah zapamätá rovnako tak, ako pri sčítaní s presahom cez desiatku.

Pri lúštení šifry začneme, ako to pri sčítaní býva, od konca. V poslednom stĺpci je $\diamondsuit + \diamondsuit = B$. Keďže B má hodnotu 2, $\diamondsuit$ môže byť buď A (neboť $A + A \Rightarrow 1 + 1 = 2$), alebo N ($N + N \Rightarrow 14 + 14 = 28 = 2 + 26$). Pokiaľ ale $\diamondsuit = N$, museli by sme v ďalšom stĺpci pričítať „jednotku“. Avšak, v prvom riadku nápovedy máme, že $\odot + \diamondsuit = E$, teda $\diamondsuit$ musí byť A, pretože $N > E$. Z toho tiež môžme zistiť, že $\odot = D$.

Teraz môžeme pokračovať predposledným stĺpcom $\square + \odot = O$, z ktorého zistíme, že $\square = K$. Rovnakým spôsobom môžeme pokračovať ďalej, až dostaneme riešenie *MESTSKA ZAHRADA*. Žabčo s Kaťou sa teda stretnú v mestskej záhrade.

Úloha 23 ... uvoľnený náklad

Julo sedel na voze ťahanom dvomi koňmi. Zrazu sa mu vzadu na rebrináku uvoľnil záves a drevo sa mu začalo zosúvať. Zoskočil a išiel pozdĺž voza vzad. Kone sa nijak nevzrušovali a pokojne klusali ďalej rovnakým tempom. Cesta na koniec voza Julovi zabrala 8 krokov. Záves šikovne prichitil a hneď sa vydal na cestu dopredu, teraz ale potreboval až 24 krokov. Vypočítajte, koľko krokov by Julo potreboval na prejdenie voza spredu dozadu, ak by kone zastavili.

Vieme, že kone s vozom sa pohybovali rovnako dlho ako Julo. Ďalej vieme, že cestou dozadu sa Julo a voz pohybovali oproti sebe – súčet prejdených vzdialeností je teda dĺžka vozu. Naopak pri návrate dopredu sa pohybovali rovnakým smerom, teda dĺžka vozu je rovná rozdielu prejdených vzdialeností. Môžeme teda napísať sústavu rovníc

$$s = x_{\text{vzad}} + v_{\text{vôz}} t_1 \,,$$
$$s = x_{\text{vpred}} - v_{\text{vôz}} t_2 \,,$$

kde s je dĺžka vozu a t_1 a t_2 sú časy, za ktoré Julo prešiel na koniec vozu a späť V oboch prípadoch sa Julo pohyboval rovnakou rýchlosťou,[2] takže je zrejmé, že cesta pozdĺž vozu dopredu mu trvala trikrát dlhšie ako cesta vzad, teda $t_2 = 3t_1$. Teda rovnice môžeme prepísať do tvaru

$$s = x_{\text{vzad}} + v_{\text{voz}} t_1 \,,$$
$$s = x_{\text{vpred}} - 3v_{\text{voz}} t_1 \,.$$

Ak sa rovnajú ľavé strany rovníc, tak sa rovnajú aj pravé strany. Z tejto rovnosti vyjadríme neznámy člen $v_{\text{voz}} t_1$:

$$v_{\text{voz}} t_1 = \frac{x_{\text{vpred}} - x_{\text{vzad}}}{4} \,.$$

Toto vyjadrenie dosadíme do jednej z dvoch pôvodných rovníc:

$$s = x_{\text{vzad}} + v_{\text{voz}} t_1 = x_{\text{vzad}} + \frac{x_{\text{vpred}} - x_{\text{vzad}}}{4} = \frac{3x_{\text{vzad}} + x_{\text{vpred}}}{4} = \frac{3 \cdot 8 + 24}{4}\,\text{kr.} = 12\,\text{krokov} \,.$$

[2] Rýchlosť „meriame“ v krokoch za sekundu.

Dĺžka vozu je teda 12 krokov, a to je vzdialenosť, ktorú by Julo musel prejsť, ak by kone zastavili.

Úloha 24 ... rybička

Jerguš si kúpil rybičku, ktorá musí žiť pri vysokom tlaku $p_\mathrm{o} = 500\,\mathrm{kPa}$*. Objednal si teda valcové akvárium s plochou hladiny* $10\,\mathrm{m}^2$ *a hĺbkou* $10\,\mathrm{m}$*. Na hladinu položil kovový piest. Akou veľkou silou musí Jerguš na piest tlačiť, aby bola rybka plávajúca na dne akvária spokojná s hodnotou tlaku? Atmosférický tlak má hodnotu približne* $p_\mathrm{a} = 100\,\mathrm{kPa}$*. Hmotnosť piestu zanedbajte.*

Bez vonkajšej sily pôsobiacej na dosku je tlak na dne akvária rovný súčtu atmosférického a hydrostatického tlaku. Atmosférický tlak poznáme, hydrostatický tlak vypočítame pomocou vzťahu $p_\mathrm{h} = h\varrho g$, kde h je hĺbka akvária, ϱ hustota vody a g tiažové zrýchlenie. Súčet atmosférického a hydrostatického tlaku je teda

$$p_\mathrm{a} + p_\mathrm{h} = 100\,000\,\mathrm{Pa} + 10\,\mathrm{m} \cdot 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} = 200\,000\,\mathrm{Pa} = 200\,\mathrm{kPa}\,.$$

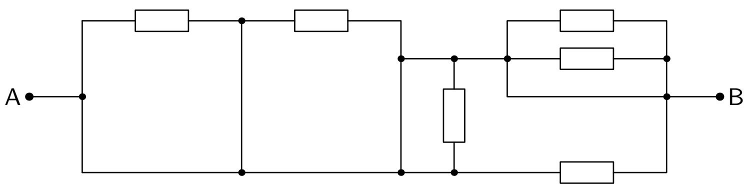
Na dosku preto musíme pôsobiť dodatočnou silou F, ktorá vyvolá zmenu tlaku o $p = 300\,\mathrm{kPa}$. Pretože tlak je rovný podielu sily a plochy, platí

$$F = pS = 300\,000\,\mathrm{Pa} \cdot 10\,\mathrm{m}^2 = 3\,000\,000\,\mathrm{N} = 3\,\mathrm{MN}\,.$$

Na piest musíme pôsobiť silou $F = 3\,\mathrm{MN}$, aby bola Jergušova rybička spokojná.

Úloha 25 ... nebezpečné rezistory

Adam dostal na narodeniny mnoho rezistorov s odoporom $1\,\mathrm{k\Omega}$*. Mal z toho takú radosť, že ich hneď začal náhodne spájať. Po chvíli si povedal, že by mohol odmerať odpor medzi bodmi* A *a* B *(na obrázku). Akú hodnotu nameral? Odpor spojovacích vodičov zanedbajte.*



Ak sa poriadne pozrieme na schému zapojenia, zistíme, že nič nemusíme počítať. Stačí si všimnúť, že medzi bodmi A a B existuje cesta, ktorá neprechádza žiadnym rezistorom. Obvod je preto v skrate a odpor medzi bodmi A a B je nulový.

Úloha 26 ... čajíček

Vladko si uvaril 300 ml *horúceho čaju s teplotou* 80 °C. *Nechcelo sa mu čakať kým vychladne, preto ho prelial do veľkého pohára, v ktorom bolo* 900 g *ľadu s teplotou* −50 °C. *Chvíľu počkal, kým sa teplota v pohári ustálila. Aká bola výsledná teplota Vladkovho čaju?*

Merná tepelná kapacita vody (čaju) je 4 200 J/kg°C, *ľadu* 2 100 J/kg°C. *Merné skupenské teplo topenia ľadu je* 334 000 J/kg. *Tepelné straty do okolia zanedbajte.*

Najskôr skúsme vypočítať, koľko tepla by horúci čaj odovzdal, aby sa ochladil na 0 °C:

$$Q_\mathrm{c} = c_\mathrm{v} m \Delta t = 4\,200\,\mathrm{J/kg{\cdot}^\circ C} \cdot 0{,}3\,\mathrm{kg} \cdot 80\,^\circ\mathrm{C} = 100\,800\,\mathrm{J}\,.$$

Pre teplo potrebné na ohriatie ľadu na 0 °C dostávame podobne

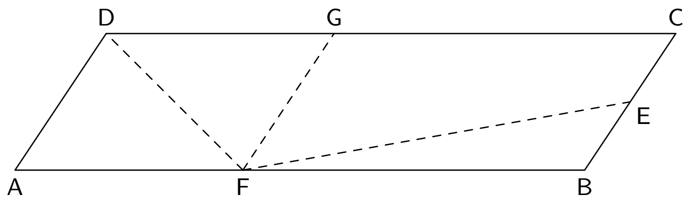
$$Q_\mathrm{l} = c_\mathrm{l} m \Delta t = 2\,100\,\mathrm{J/kg{\cdot}^\circ C} \cdot 0{,}9\,\mathrm{kg} \cdot 50\,^\circ\mathrm{C} = 94\,500\,\mathrm{J}\,.$$

Ak sa teda čaj ochladí na 0 °C, odovzdá svoje teplo ľadu, ktorý sa tak ohreje na 0 °C, ale zatiaľ sa ešte neroztopí. Na topenie ľadu sa spotrebuje len „zbytkové“ teplo $100\,800\,\mathrm{J} - 94\,500\,\mathrm{J} = 6\,300\,\mathrm{J}$. Avšak zo zadaných hodnôt ihneď vidíme, že na roztopenie všetkého ľadu je treba omnoho viac tepla ako 6 300 J. Preto sa rozotopí iba malá časť ľadu a výsledná teplota zmesi bude 0 °C.

Úloha 27 ... rovnobežník

V rovnobežníku ABCD *označme stred strany* BC *ako* E. *Uvažujme taký bod* F *ležiaci na strane* AB, *že obsah trojuholníka* AFD *je* $15\,\mathrm{cm}^2$ *a obsah trojuholníka* FBE *je práve* $14\,\mathrm{cm}^2$. *Určte obsah štvoruholníka* FECD.

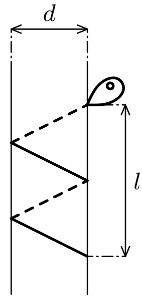
Rovnobežník a útvary v ňom si nakreslíme podľa zadania. Všimnime si, že ak budeme viesť rovnobežku so stranami AD a BC bodom F, rovnobežník sa rozdelí na dva menšie (priesečník do stranou DC označíme G). FD je uhlopriečkou rovnobežníku AFGD a delí ho na dva zhodné trojuholníky, pričom obsah jedného z nich je $15\,\mathrm{cm}^2$. Odtiaľ vieme, že obsah celého rovnobežníka AFGD je $30\,\mathrm{cm}^2$. V druhom rovnobežníku BCGF si podobne všimneme, že v zadaní uvedený trojuholník FBE tvorí štvrtinu obsahu tohto rovnobežníku.[3] Rovnobežník BCGF má teda obsah $4 \cdot 14\,\mathrm{cm}^2 = 56\,\mathrm{cm}^2$. Odčítaním obsahov zadaných trojuholníkov získame hľadaný obsah štvoruholníku FECD: $((56+30) - 14 - 15)\,\mathrm{cm}^2 = 57\,\mathrm{cm}^2$.



[3]Bod E je v polovici strany BC, preto ním môžeme viesť rovnobežku so stranami BF a CG a rovnobežník rozpoliť. Trojuholník FBE potom tvorí polovicu jedného z novovzniknutých útvarov.

Úloha 28 ... anakonda

Anakondy často bývajú obrovské. Aká dlhá je anakonda, ktorá omotá doknale ohkrúhly kmeň stromu s priemerom $d = 63{,}7\,\mathrm{cm}$ do výšky $h = 3\,\mathrm{m}$ v dvoch závitoch tak, ako je znázornené na obrázku? Výsledok uveďte s presnosťou na centimeter.



Podľa obrázku predpokladáme, že strom má tvar valca. Jeho plášťom je preto obdĺžnik. Jeden závit anakondy sa na plášti zobrazí ako uhlopriečka obdĺžniku so stranami $b = h/2$ (výška, do ktorej dosahuje jeden závit) a $a = \pi d$ (obvod valca). Túto uhlopriečku vypočítame pomocou Pytagorovej vety

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\pi \cdot 63{,}7\,\mathrm{cm})^2 + (150\,\mathrm{cm})^2} \doteq 250\,\mathrm{cm}\,.$$

Keďže anakonda vytvorila dva závity, meria celkom $x = 2c = 500\,\mathrm{cm} = 5\,\mathrm{m}$.

Úloha 29 ... héééééj!

Kamča stojí $290\,\mathrm{m}$ od plochej čadičovej skaly a o ďalších $50\,\mathrm{m}$ ďalej sa nachádza Jerry, ktorá od Kamči uteká rýchlosťou $10\,\mathrm{m/s}$. Kamča na Jerry zavolá, nech tak šialene nebeží. Zvuk sa jednak šíri priamo k Jerry, ale tiež sa šíri smerom k stene a späť ako ozvena. Určte, za aký čas od zaznamenania prvého zvuku bude Jerry počuť ozvenu.

Najskôr vypočítame čas, za ktorý dorazí zvuk k Jerry prvýkrát. Za hľadaný čas t_1 zvuk prejde vzdialenosť $50\,\mathrm{m}$ plus vzdialenosť, ktorú stihne Jerry za čas t_1 ubehnúť svojou rýchlosťou $v_\mathrm{J} = 10\,\mathrm{m/s}$. Môžeme teda napísať rovnicu

$$t_1 = \frac{50\,\mathrm{m} + v_\mathrm{J} t_1}{v_\mathrm{z}} \quad \Rightarrow \quad t_1 = \frac{50\,\mathrm{m}}{v_\mathrm{z} - v_\mathrm{J}}\,,$$

kde v_z je rýchlosť zvuku.

Ďalej vypočítame, za akú dobu t_2 k nej dorazila ozvena. Zvuk ozveny za čas t_2 musí prejsť vzdialenosť $2 \cdot 290\,\mathrm{m}$ (od Kamči ku skale a naspäť), ale tiež $50\,\mathrm{m}$, ktoré mala Jerry ako „náskok“ na začiatku a naviac vzdialenosť, ktorú stihne Jerry odbehnúť za čas t_2. Môžeme preto napísať

$$t_2 = \frac{290\,\mathrm{m} + 290\,\mathrm{m} + 50\,\mathrm{m} + v_\mathrm{J} t_2}{v_\mathrm{z}} \quad \Rightarrow \quad t_2 = \frac{630\,\mathrm{m}}{v_\mathrm{z} - v_\mathrm{J}}\,.$$

Nakoniec odčítame časy t_2 a t_1:

$$t_2 - t_1 = \frac{630\,\mathrm{m}}{v_\mathrm{z} - v_\mathrm{J}} - \frac{50\,\mathrm{m}}{v_\mathrm{z} - v_\mathrm{J}} = \frac{580\,\mathrm{m}}{v_\mathrm{z} - v_\mathrm{J}} = \frac{580\,\mathrm{m}}{300\,\mathrm{m/s} - 10\,\mathrm{m/s}} = 2\,\mathrm{s}\,.$$

Jerry bude počuť ozvenu $2\,\mathrm{s}$ po tom, ako zaznamenala zvuk prvýkrát.

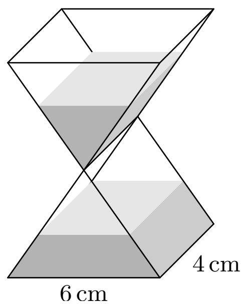
Úloha 30 ... samé deviatky

Marek sa raz na dejepise nudil a začal premýšľať nad zaujímavým problémom. Koľko existuje trojciferných čísel, ktoré sú deliteľné tromi a zároveň obsahujú aspoň jednu číslicu deväť?

Vyriešiť túto úlohu šlo viacerými spôsobmi. Napríklad zistíme, koľko je všetkých trojciferných čísel, ktoré sú deliteľné tromi a od nich odčítame tie, ktoré neobsahujú číslicu deväť. Počet všetkých trojciferných čísel je $999 - 99 = 900$, spomedzi ktorých je každé tretie, tzn. 300 čísel, deliteľné tromi. Otázka je, koľko z nich neobsahuje deviatku. Trojciferné čísla majú tri miesta (stovky, desiatky, jednotky), na ktoré môžeme číslice ukladať. Na miesto stoviek môžeme dať číslice $1 - 8$ (tzn. 8 číslic), na miesto desiatok vieme uložiť číslice $0 - 8$ (tzn. 9 číslic). Aby bolo číslo deliteľné tromi, musí byť jeho ciferný súčet deliteľný tromi. Na miesto jednotiek tak môžeme umiestniť iba 3 číslice (vždy podľa súčtu prvých dvoch). Počet čísel, ktoré sú deliteľné tromi a neobsahujú deviatku je preto $8 \cdot 9 \cdot 3 = 216$. Teraz už jednoducho určíme výsledok: čísel, ktoré spĺňajú podmienky zo zadania, je $300 - 216 = 84$.

Úloha 31 ... padajúci piesok

Katka bola na návšteve u DeDuška a zaujali ju staré presýpacie hodiny, ktoré vyzerali ako dva trojboké hranoly (pozri obrázok). Ich základne boli tvorené dvoma rovnostrannými trojuholníkmi s hranou dlhou 6 cm *a výškou* 4 cm*. Pred otočením bol spodný hranol úplne naplnený pieskom. Vo chvíli, keď ich Katka otočila, sa piesok začal presýpať do spodnej časti, čo trvalo 2 minúty. Katke ako správnej študentke fyziky napadlo, že by bolo možné zaviesť pre tieto hodiny veličinu nazývanú výkon. Jeho hodnotu by vypočítala ako podiel zmeny potenciálnej energie piesku za čas. A tak v tabuľkách našla hustotu piesku* $1{,}5\,\mathrm{g/cm^3}$ *a spočítala priemerný výkon presýpacích hodín. Koľko jej to vyšlo?*



Zmena potenciálnej energie piesku je úmerná zmene výšky jeho ťažiska medzi pôvodnou (všetok piesok je v hornom hranole) a konečnou situáciou (všetok piesok je dole). Z obrázku a zo znalosti, že ťažisko rovnostranného trojuholníka sa nachádza v tretine jeho výšky, vyplýva, že na začiatku sa ťažisko piesku nachádzalo vo výške $v + 2v/3 = 5v/3$ nad podstavou hodín, (v tu označuje „výšku“ jedného hranola) a po presypaní ťažisko pokleslo do výšky $v/3$ nad podstavou hodín. Tomu zodpovedá zmena výšky o $\Delta h = 5v/3 - v/3 = 4v/3$.

Výšku rovnostranného trojuholníka so stranou $a = 6\,\mathrm{cm}$ vypočítame pomocou pytagorovej vety, lebo výška v v rovnostrannom trojuholníku vytvára pravouhlý trojuholník s odvesnami $a/2$ a v a preponou a:

$$v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{3}a}{2}\,.$$

Hodnotu $\sqrt{3}$ nájdeme v tabuľkách, po dosadení dostaneme $v = 5{,}19\,\mathrm{cm}$.

Teraz vypočítame hmotnosť piesku m ako súčin jeho hustoty a objemu. Objem piesku je rovnaký ako objem jedného hranola a získame ho ako súčin šírky hranola ($s = 4\,\mathrm{cm}$) a obsahu rovnostranného trojuholníka tvoriaceho základňu hranola:

$$m = \varrho V = \varrho s \frac{av}{2} = 1{,}5\,\mathrm{g/cm^3} \cdot 4\,\mathrm{cm} \cdot \frac{6\,\mathrm{cm} \cdot 5{,}19\,\mathrm{cm}}{2} \doteq 93{,}4\,\mathrm{g}\,.$$

Teraz už len dáme všetko dokopy: zmena potenciálnej energie piesku v hodinách je potom rovná $\Delta E = mg\Delta h$, výkon hodín je táto zmena energie vydelená časom, za ktorý sa piesok presypal ($\Delta t = 2\,\mathrm{min} = 120\,\mathrm{s}$):

$$P = \frac{mg\Delta h}{\Delta t} = \frac{\varrho s \frac{av}{2} g \frac{4v}{3}}{\Delta t} = \frac{2\varrho s a g v^2}{3\Delta t} = \frac{\varrho s a^3 g}{2\Delta t}\,.$$

Po dosadení v základných jednotkách SI dostávame

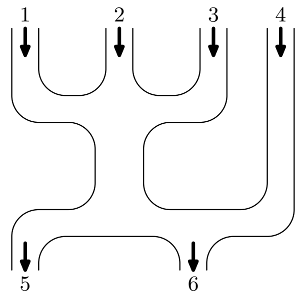
$$P = \frac{1\,500\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 0{,}04\,\mathrm{m} \cdot (0{,}06\,\mathrm{m})^3 \cdot 10\,\mathrm{m/s^2}}{2 \cdot 120\,\mathrm{s}} = 5{,}4 \cdot 10^{-4}\mathrm{W} = 0{,}54\,\mathrm{mW}\,.$$

Priemerný výkon presýpacích hodín je 0,54 mW.

Úloha 32 ... potrubie

Maťo a Naťa majú doma zvláštne potrubie. Po krátkom pozorovaní zistili, že voda z potrubia sa nikam nestráca, je nestlačiteľná a netečie smerom nahor.

Podarilo sa im tiež zmerať priemery potrubí $d_1 = 40\,\mathrm{mm}$, $d_2 = 20\,\mathrm{mm}$, $d_3 = 1\,\mathrm{cm}$, $d_4 = 10\,\mathrm{mm}$, $d_5 = 30\,\mathrm{mm}$ *a* $d_6 = 1\,\mathrm{cm}$. *Rýchlosť prúdiacej vody v jednotlivých trubkách je* $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = 1\,\mathrm{m/s}$ *a* $v_5 = 2\,\mathrm{m/s}$. *Akou rýchlosťou vyteká voda z trubky číslo 6?*



Objem vody, ktorá vtečie do trubky číslo 1 za jednu sekundu je rovný objemu valca s prierezom trubky a výškou, ktorá je číselne rovná veľkosti rýchlosti. Čiže za sekundu do trubky vtečie

$$Q_1 = S_1 v_1 = \pi \frac{d_1^2}{4} v_1$$

vody. Tejto veličine budeme hovoriť objemový prietok. Rovnakým spôsobom môžeme určiť aj prietoky ostatnými trubkami.

Z pozorovania Maťa a Nati môžeme usúdiť, že všetka voda, ktorá vtečie štyrmi hornými trubkami, musí vytiecť dvomi spodnými. Preto musí platiť $Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 = Q_5 + Q_6$, z čoho jednoducho dostávame

$$\pi \frac{d_6^2}{4} v_6 = Q_6 = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 - Q_5$$

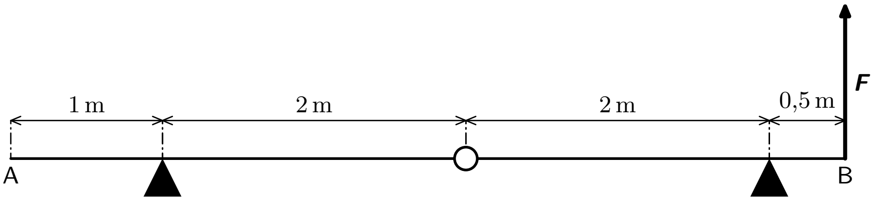
a teda

$$v_6 = 4\frac{Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 - Q_5}{\pi d_6^2} = \frac{d_1^2 v_1 + d_2^2 v_2 + d_3^2 v_3 + d_4^2 v_4 - d_5^2 v_5}{d_6^2}\,.$$

Dosadením dostaneme $v_6 = 4\,\mathrm{m/s}$. Pri dosadzovaní si musíme dať pozor na jednotky!

Úloha 33 ... rovnováha

Na obrázku vidíme dlhú dosku, ktorá má blízko svojho stredu kĺbový spoj a je položená na dvoch podperách (ako na obrázku). Do bodu A *si sadne Tom vážiaci* 70 kg*. Akou silou* $\boldsymbol{F}$ *musí pôsobiť Kubo na druhý koniec dosky, aby bola celá doska aj s Tomom v rovnováhe? Hmotnosť samotné dosky zanedbajte.*



Keď sa Tom posadí do bodu A, na dosku bude pôsobiť svojou tiažou, tzn. silou

$$F_g = 70\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} = 700\,\mathrm{N}\,.$$

Aby bola ľavá časť dosky v rovnováhe, v mieste kĺbového spoja by sme na ňu museli pôsobiť takou silou F_k, aby boli v rovnováhe momenty oboch síl vzhľadom na ľavú podperu, teda

$$F_g \cdot 1\,\mathrm{m} = F_\mathrm{k} \cdot 2\,\mathrm{m}\,, \quad \Rightarrow \quad F_\mathrm{k} = F_g \frac{1\,\mathrm{m}}{2\,\mathrm{m}} = 350\,\mathrm{N}\,.$$

Inak povedané, kĺbové spojenie musí na ľavú dosku pôsobiť silou 350 N. Toto spojenie funguje tak, že len „prenáša“ silu z jednej dosky na druhú. Preto Kubo musí pôsobiť silou F tak, aby pravá doska tlačila na spojenie práve silou F_k. Zároveň však musí byť aj pravá doska v rovnováhe, takže opäť musia byť momenty oboch síl voči pravej podpere rovnaké. Odtiaľ vieme vypočítať silu F:

$$F_\mathrm{k} \cdot 2\,\mathrm{m} = F \cdot 0{,}5\,\mathrm{m}\,, \quad \Rightarrow \quad F = F_\mathrm{k} \frac{2\,\mathrm{m}}{0{,}5\,\mathrm{m}} = 4F_\mathrm{k} = 1\,400\,\mathrm{N}\,.$$

Kubo musí na dosku tlačiť silou 1 400 N, aby bola sústava v rovnováhe.

Úloha 34 ... dobrá poistka

Najmenej koľko ampérovú poistku potrebujeme zapojiť na ochranu jednosmerného elektrického vedenia, v ktorom sú pod napätím 220 V *paralelne zapojené* 4 *žiarovky? Každá žiarovka má príkon* 110 W*.*

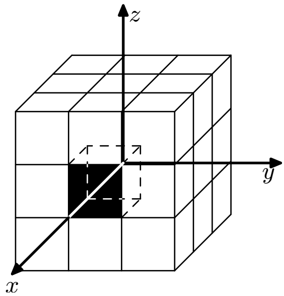
Zo vzťahu pre elektrický príkon $P = UI$ vypočítame prúd I, ktorý tečie jednou žiarovkou. Hodnotu príkonu a napätia poznáme zo zadania (vieme, že napätie v paralelnom zapojení je rovnaké pre všetky vetvy):

$$I = \frac{P}{U} = \frac{110\,\mathrm{W}}{220\,\mathrm{V}} = 0{,}5\,\mathrm{A}\,.$$

V paralelnom zapojení sa naviac delí prúd, takže prúd prechádzajúci poistkou je súčtom prúdov v jednotlivých vetvách zapojenia. Keďže máme štyri paralelné vetvy a každou tečie prúd I, musíme mať poistku na aspoň $4 \cdot 0{,}5\,\mathrm{A} = 2\,\mathrm{A}$.

Úloha 35 ... deravá kocka

Kubo sa hral s kockou so stranou dlhou 6 cm*, ktorá bola zložená z* 27 *menších kociek. Kocka sa Kubovi zdala príliš nezaujímavá, a preto z jednej steny vybral prostrednú kocku. O koľko sa posunulo ťažisko Kubovej kocky?*



Ako je známe, ťažisko plnej kocky je v jej strede. Do tohto bodu umiestnime počiatok kartézskej súradnicovej sústavy xyz (ťažisko bude mať teda súradnice $\mathsf{T}[0;0;0]$). Ak odoberieme jednu malú kocku zo stredu steny, vidíme, že kocka zostáva súmerná podľa osí y a z, symetria sa poruší len v smere osi x (viď obrázok). Preto sa aj ťažisko posunie len v smere osi x, úloha je teda v skutočnosti iba „jednorozmerná“.

Keďže kocka je zložená z $3 \times 3 \times 3$ menších kociek a má hranu dlhú 6 cm, menšia kocka má hranu dlhú $a = 2\,\mathrm{cm}$. Máme teda 9 kociek, ktorých ťažisko má x-ovú súradnicu 2 cm, 9 kociek so súradnicou 0 cm a 8 kociek so súradnicou -2 cm.

Pretože ťažisko je bod, voči ktorému je moment ťiažových síl všetkých kociek rovný nule, môžeme napísať rovnicu

$$26x_{\mathsf{T}'} = 9 \cdot 2\,\mathrm{cm} + 9 \cdot 0\,\mathrm{cm} + 8 \cdot (-2\,\mathrm{cm})\,,$$

kde bodom T' sme označili hľadané ťažisko po odstránení jednej malej kocky. Jednoduchou úpravou z rovnice získame

$$x_{\mathsf{T}'} = \frac{18-16}{26}\,\mathrm{cm} = \frac{1}{13}\,\mathrm{cm} \doteq 0{,}77\,\mathrm{mm}\,.$$

Ťažisko kocky sa posunulo asi o 0,77 mm.

Úloha 36 ... pozor, letí!

Ľudka hádže loptičku do siete so štvorcovými dierami. Aká je pravdepodobnosť, že loptička dierou preletí? Loptička má priemer 6 cm*, dĺžka strany jednej diery v sieti je* 9 cm*. Aby loptička sieťou preletela, nesmie sa jej dotknúť.*

Pravdepodobnosť, že loptička preletí sieťou, vieme vypočítať ako pomer obsahu oblasti, kde sa v okamihu prieletu môže nachádzať stred loptičky, a obsahu jednej diery. Aby sa loptička siete pri prelete nedotkla, musí byť vzdialenosť okraja diery a stredu loptičky väčšia ako je polomer loptičky (3 cm). Oblasť, kde sa môže stred loptičky nachádzať, má teda tvar štvorca so stranou $(9-(3+3))\,\mathrm{cm} = 3\,\mathrm{cm}$. Pravdepodobnosť preletu loptičky sieťou je teda $3^2/9^2 = 1/9 \doteq 11\,\%$.

Úloha 37 ... skákalka

Terka sa rada pozerá na skákajúce loptičky. Raz jednu hodila medzi dve vodorovné dosky, vzdialené od seba 1 m *tak, že loptička mala pred odrazom od spodnej dosky rýchlosť* 5,5 m/s.

Keďže loptička nie je dokonalé pružná, stratí pri každom odraze 25 % *svojej* pohybovej *energie. Ako vysoko loptička vyskočí po treťom odraze? Tolerancia výsledku je* 3 cm.

Na to, aby sa loptička dotkla hornej dosky, musí mať tesne po odraze od spodnej dosky väčšiu (alebo aspoň rovnakú) pohybovú energu ako je potenciálna energia, ktorú loptička pri stúpaní k hornej doske získa. Ak označíme hmotnosť loptičky m, jej rýchlosť tesne po odraze v_{min} a vzdialenosť dosiek h, môžeme napísať nerovnicu

$$\frac{1}{2}mv_{\mathrm{min}}^2 \geq mgh \quad \Rightarrow \quad \frac{v_{\mathrm{min}}^2}{2g} \geq h\,.$$

V našom prípade mala loptička tesne pred odrazom pohybovú energiu $mv^2/2$, kde $v = 5{,}5\,\mathrm{m/s}$. Potom došlo k odrazu, počas ktorého loptička stratila 25 % tejto energie, teda zvyšok, tj. $k = 3/4$ energie jej zostali a tesne po odraze bola jej pohybová energia rovná $kmv^2/2$, teda jeho rýchlosť sa z pôvodnej hodnoty v zmenšila[4] na $\sqrt{k}v$. Namiesto overovania, či $\sqrt{k}v \geq v_{\mathrm{min}}$, vyčíslime jednoduchší výraz

$$\frac{\left(\sqrt{k}v\right)^2}{2g} = \frac{kv^2}{2g} = \frac{363}{320}\,\mathrm{m}\,,$$

z ktorého hneď vidíme, že jeho hodnota je väčšia ako $h = 1\,\mathrm{m}$. To znamená, že $\sqrt{k}v \geq v_{\mathrm{min}}$, tj. pohybová energia loptičky po prvom odraze je dostočná na to, aby sa loptička pri svojom druhom odraze odrazila od hornej dosky.

Tesne pred druhým odrazom bude pohybová energia loptičky rovná

$$k\frac{1}{2}mv^2 - mgh\,,$$

pretože počas stúpania k hornej doske sa časť energie premenila na potenciálnu energiu. Po odraze sa z tejto energie opäť 25 % stratí a loptička začne padať dole, čím sa ale potenciálna energia mgh premení späť na pohybovú energiu. Teda tesne pred tretím odrazom bude pohybová energia loptičky rovná

$$k\left[k\frac{1}{2}mv^2 - mgh\right] + mgh\,.$$

Z tejto energie sa tretím odrazom opäť 25 % stratí a loptička začne stúpať hore. Ako zadanie napovedá, po treťom odraze už loptička nevystúpa k hornej doske, takže všetká energia sa zmení na potenciálnu energiu mgH, kde H je hľadaná výška. S prihliadnutím na vyššie uvedené fakty môžeme napísať rovnosť

$$k\left\{k\left[k\frac{1}{2}mv^2 - mgh\right] + mgh\right\} = mgH\,.$$

Zátvorky roznásobíme a rovnicu vydelíme členom mg. Dostávame tak

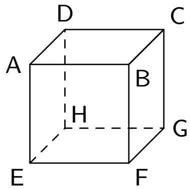
$$H = k^3\frac{v^2}{2g} - k^2h + kh = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{363}{320}\,\mathrm{m} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot 1\,\mathrm{m} + \frac{3}{4} \cdot 1\,\mathrm{m}\,.$$

V poslednom kroku sme využili už vyčíslenú hodnotu výrazu $kv^2/2g$. Po vynásobení a sčítaní všetkých členov (s vhodne zvoleným zaokrúhľovaním) dostávame približne $H = 0{,}83\,\mathrm{m} = 83\,\mathrm{cm}$, teda v rámci tolerancie sú výsledky v intervale $\langle 80\,\mathrm{cm}; 86\,\mathrm{cm}\rangle$.

[4] Potom je štvorec rýchlosti $\left(\sqrt{k}v\right)^2 = kv^2$ a pohybová energia $kmv^2/2$, teda presné taká, aká má po prvom odraze byť.

Úloha 38 ... kocka sem, kocka tam

Tomáš dostal na narodeniny kocku ABCDEFGH *s dĺžkou hrany* 2. *Na nej boli označené nasledovné body:* P *stred hrany* AB, Q *stred hrany* GH, M *stred hrany* BC *a* N *stred hrany* EH. *Ďalej boli pomenované:* X *priesečník* AM *a* CP *a* Y *priesečník* GN *a* EQ. *K darčeku bol priložený lístok: urč dĺžku úsečky* XY *v tvare číselného výrazu (nie je teda potrebné jeho hodnotu uviesť ako desatinné číslo). Tomáš sa zamyslel a po chvíľke sa mu na tvári objavil úsmev. Zvládnete určiť dĺžku* XY *tiež?*



Body X a Y sú v tomto poradí ťažiská trojuholníkov ABC a EGH. Pri pohľade zhora preto musí nutne platiť, že oba body ležia na ťažniciach v oboch trojuholníkoch, ktoré ale spolu zvierajú priamy uhol, jedná sa teda o pomyselnú uhlopriečku štvorca.[5] Z tohto poznatku sme schopní vypočítať pomyselnú vzdialenosť na pomyselnej uhlopriečke, ktorá reálne odpovedá vzdialenosti päty kolmice vedenej bodom X k rovine EFG.

Táto vzdialenosť je, za využitia faktu, že ťažisko trojuholníka je v jednej tretine ťažnice, rovná $2 \cdot 1/3 \cdot \sqrt{2}$. S pomocou tejto „vodorovnej vzdialenosti bodov X a Y“, tzn. vzdialenosti päty kolmice a bodu Y a „zvislej vzdialenosti“, ktorá je rovná dĺžke hrany kocky už môžeme vypočítať aj „skutočnú“ hľadanú vzdialenosť, a to dosadením do Pytagorovej vety:

$$|\mathsf{XY}| = \sqrt{2^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{11}}{3}\,.$$

Vzdialenosť bodov X a Y je $2\sqrt{11}/3 \doteq 2{,}21$.

Úloha 39 ... brzdíme

Peter odchádzal domov z tábora. Išiel autom, rýchlosťou $72\,\mathrm{km/h}$ *a po čase prechádzal okolo dopravnej značky, ktorá hovorila, že o* $75\,\mathrm{m}$ *začne klesanie, kde na každých* 100 *prejdených metrov cesta klesne o päť metrov. Keďže Peter je zodpovedný vodič, rozhodol sa zastaviť. Jeho auto má hmotnosť* $1\,500\,\mathrm{kg}$ *a brzdy vyvíjajú brzdnú silu* $3\,\mathrm{kN}$. *Akú vzdialenosť prejde Peter, kým úplne zastaví? Odpor vzduchu zanedbajte.*

Je zjavné, že počas brzdenia sa bude Peter pohybovať nerovnomerne (bude spomaľovať z rýchlosti $v = 72\,\mathrm{km/h} = 20\,\mathrm{m/s}$ na nulovú rýchlosť). Jednou z možností riešenia je napísať rovnice pre spomalený pohyb a dosť náročným postupom prísť na správne riešenie.

Situácia sa zjednoduší, keď si uvedomíme, že okrem síl a zrýchlenia môžeme v mechanike pracovať aj s energiami. Ak zanedbáme odpor vzduchu, môžeme tvrdiť, že všetká energia, ktorú malo Petrovo auto na začiatku pohybu, tj. kinetická a potenciálna, museli brzdy trením o brzdové doštičky (teda prácou trecích síl) premeniť na teplo.

Ak si vodorovný úsek cesty označíme $d = 75\,\mathrm{m}$, naklonený úsek cesty s, hmotnosť Petrovho auta m a brzdnú silu F, môžeme napísať

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg\frac{5}{100}s = F(d+s)\,,$$

[5] Pohľadom zhora myslíme to, že bod A splynie s bodom E atď.

kde prvý člen vľavo je kinetická energia, druhý člen popisuje pokles potenciálnej energie a člen vpravo vyjadruje prácu trecích síl. Rovnicu upravíme a vypočítame neznámu s

$$s = \frac{\frac{1}{2}mv^2 - Fd}{F - mg\frac{5}{100}} = \frac{10mv^2 - 20Fd}{20F - mg} = \frac{100}{3}\,\mathrm{m}\,.$$

Keďže dráha, na ktorej Peter brzdil, bola $s + d$, po sčítaní dostávame

$$s + d = \frac{100}{3}\,\mathrm{m} + 75\,\mathrm{m} = \frac{325}{3}\,\mathrm{m}\,,$$

teda približne $108\,\mathrm{m}$.

Úloha 40 ... myšlienka

Enka si myslí nenulové prirodzené číslo x. Toto číslo je rovné jednej tisícine súčtu všetkých prirodzených čísel menších ako x. Aké číslo si Enka myslí?

Súčet ľubovoľného počtu po sebe idúcich prirodzených čísel je rovný aritmetickému priemeru najväčšieho a najmenšieho čísla krát počet sčítaných čísel. Čiže súčet všetkých prirodzených čísel menších ako x (najväčšie sčítané číslo je $x - 1$, najmenšie 1 a ich počet je $x - 1$) je

$$s_x = \frac{1 + (x-1)}{2} \cdot (x-1)\,.$$

Pre Enkine číslo tak môžeme napísať rovnicu

$$x = \frac{1}{1\,000} \cdot \frac{1 + (x-1)}{2} \cdot (x-1)$$

a vyriešiť ju. Sami si už overte, že jediné nenulové riešenie je $x = 2\,001$, čo je číslo, ktoré si Enka myslí.

Úloha 41 ... záhradníčka

Denisa je šikovná záhradníčka, ktorá neustále vymýšľa spôsoby, ako získať zo svojho obdĺžnikového políčka viac druhov zeleniny zároveň. Naposledy sa rozhodla vysadiť mrkvu a petržlen.

Denisino políčko má rozmery $11\,\mathrm{m} \times 23\,\mathrm{m}$. Najskôr začne sadiť mrkvu pozdĺž dlhšej strany poľa a prvú priesadu umiestni do rohu poľa. Každú ďalšiu položí $1{,}5\,\mathrm{m}$ od predchádzajúcej tak, že najbližšie sadeničky vždy tvoria vrcholy rovnostranných trojuholníkov. Potom do stredu medzi každé dve najbližšie mrkvy (tzn. do stredu každej $1{,}5\,\mathrm{m}$ strany) zasadí práve jeden petržlen. Koľko petržlenov zasadí?

V prvom rade s mrkvou je 15 medzier, lebo $15 \cdot 1{,}5\,\mathrm{m} = 22{,}5\,\mathrm{m}$ je najbližší menší násobok dĺžky $1{,}5\,\mathrm{m}$ k dĺžke Denisinej záhrady ($23\,\mathrm{m}$). Teda v každom nepárnom rade bude zasadených 16 mrkiev a 15 petržlenov.

Každý párny rad má o jednu mrkvu menej (tvorí jeden z vrcholov trojuholníka, ktorého zvyšné vrcholy sú v nižšom alebo vyššom rade s mrkvou), teda 15 mrkiev. Ďalej sa tieto rady striedajú. Vzdialenosť medzi jednotlivými radmi je daná výškou rovnostranného trojuholníka so stranou $a = 1{,}5\,\mathrm{m}$. Tuto výšku v určíme z Pytagorovej vety:

$$v = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \doteq 1{,}3\,\mathrm{m}\,.$$

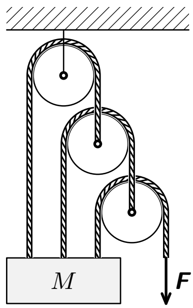
Počet medzier medzi radmi je 8, lebo práve osemnásobok je najbližší menší násobok $1{,}3\,\mathrm{m}$ k výške jej záhrady ($11\,\mathrm{m}$).To znamená, že v záhone je 9 radov mrkiev, konkrétne 5 radov po 16 mrkiev a 4 rady po 15 mrkiev. V radoch je teda $5 \cdot (16-1) + 4 \cdot (15-1) = 131$ petržlenov.

Ďalšie petržleny budú vysadené medzi radmi v stredoch strán príslušných trojuholníkov. Je jednoduché si premyslieť, že v každej medzere je vysadených 30 petržlenov, lebo každú mrkvu z párneho radu (kde je 15 mrkiev) môžeme spojiť dvoma spojnicami dlhými $1{,}5\,\mathrm{m}$, ktoré prechádzajú šikmo cez tú istú medzeru, s dvomi mrkvami z nepárneho radu. Spolu je teda medzi radmi vysadených $8 \cdot 30 = 240$ petržlenov.

Celkový počet vysadených petržlenov je $131 + 240 = 371$.

Úloha 42 ... kladky

Tommy chce zdvíhať aj ťažké bremená, preto si zostrojil unikátny kladkostroj (viď obrázok s kladkostrojom, ktorý má tri kladky). Z koľkých kladiek má zostaviť kladkostroj, s ktorým bude schopný zdvihnúť závažie s hmotnosťou $3{,}2\,\mathrm{t}$*? Tommy vie ťahať silou najviac* $1\,000\,\mathrm{N}$.



Na lano prvej kladky pôsobíme silou $F = 1\,000\,\mathrm{N}$. Táto sila sa cez kladku prenáša aj na druhý koniec lana, kde pôsobí tiež sila $F = 1\,000\,\mathrm{N}$. Na samotnú kladku tak pôsobí sila F z dvoch strán – teda záves prvej kladky je zaťažený silou $2F$. Táto sila $2F$ sa opäť druhou kladkou prenáša na druhú stranu, kde je aj touto silou dvíhané závažie. Zároveň na ďlašiu kladku pôsobí sila už $4F$ a princíp sa opäť opakuje.

Všimneme si, že sila, ktorou je nakoniec závažie dvíhané, je vždy dvojnásobkom predchádzajúcej sily. Na závažie teda pôsobia sily F, $2F$, $4F$, atď. Ak chceme dvihnúť bremeno s hmotnosťou m, musíme pouužiť toľko kladiek, aby platila nerovnica

$$F + 2F + 4F + \cdots \geq mg \quad \Rightarrow \quad F\left(1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1}\right) \geq mg\,,$$

kde n je počet použitých kladiek. Po vydelení nerovnice silou F a dosadení dostávame

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} \geq \frac{mg}{F} = \frac{3\,200\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2}}{1\,000\,\mathrm{N}} = 32\,.$$

postupným pričítaním mocnín dvojky sa potom dostaneme k riešeniu

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{6-1} \geq 32\,.$$

Na zdvihnutie závažia s hmotnosťou $3{,}2\,\mathrm{t}$ Tommy potrebuje 6 kladiek.

Na organizácii Náboja Junior 2015 sa podieľali nasledujúce organizácie:

Ústredným slovenským organizátorom je občianske združenie Trojsten, zastrešované *Fakultou matematiky, fyziky a informatiky UK v Bratislave.* V Českej republike súťaž organizoval fyzikálny korešpondenčný seminár Výfuk, aktivita *Matematicko-fyzikální fakulty UK v Praze.* Organizátori a spolupracovníci Výfuku boli tiež autormi zadaní a vzorových riešení úloh.

Na Slovensku sa Náboj Junior uskutočnil na 16 miestach:

Banská Bystrica – *Gymnázium A. Sládkoviča*
Bratislava – *Univerzitné pastor. centrum UK*
Brezno – *Gymnázium J. Chalupku*
Hlohovec – *Gymnázium I. Kupca*
Košice – *Gymnázium Alejová*
Levice – *Gymnázium A. Vrábla*
Lučenec – *CVČ Magnet*
Námestovo – *Gymnázium A. Bernoláka*
Nitra – *Gymnázium Párovská*
Partizánske – *Gymnázium Partizánske*
Poprad – *Gymnázium Kukučínova*
Prešov – *Gymnázium J. A. Raymana*
Šurany – *Gymnázium Bernolákova*
Trenčín – *Piar. gymnázium J. Braneckého*
Trstená – *Gymnázium Trstená*
Žilina – *Gymnázium Veľká Okružná*

V Českej republike sa Náboj Junior uskutočnil na 13 stredných a vysokých školách:

Brno – *Fakulta stroj. inženýrství VUT*
České Budějovice – *Gymnázium Jírovcova*
Česká Lípa – *Gymnázium Žitavská*
Frýdlant nad Ostravicí – *Gymnázium Frýdlant*
Hradec Králové – *Univerzita Hradec Králové*
Karlovy Vary – *První české gymnázium v Karlových Varech*
Olomouc – *Gymnázium Olomouc-Hejčín*
Ostrava – *Gymnázium O. Havlové*
Písek – *SPŠ a VOŠ Písek*
Praha – *Gymnázum Ch. Dopplera*
Praha – *Gymnázium Voděradská 2*
Třebíč – *Katolické gymnázium*
Zlín – *Gymnázium Zlín-Lesní čtvrť*

Autori úloh a ich riešení

Jáchym Bártík, Kateřina Bartošová, Vít Beran, Jindřich Dušek, Lukáš Fusek, Simona Gabrielová, Martin Gažo, Miroslav Hanzelka, Denisa Chytilová, Ondřej Knopp, Lucie Kundratová, Matěj Mezera, David Němec, Jan Preiss, Kateřina Rosická, Jakub Sláma, Kateřina Stodolová, Karolína Šromeková, Patrik Švančara, Tomáš Kremel, Pavla Trembulaková, Tereza Uhlířová a lokálni organizátori z Bratislavy a Námestova

Korektúry

Lukáš Fusek, Miroslav Hanzelka, Tomáš Kremel, Lukáš Ledvina, David Němec, Jakub Sláma, Petr Šimůnek, Karolína Šromeková, Radka Štefaníková, Patrik Švančara a Tereza Uhlířová

Obrázky a sadzba

Michal Červeňák, Tomáš Kremel, Lukáš Ledvina, Petr Šimůnek a Patrik Švančara