NÁBOJ junior

5. ročník

2016/17

Vzorová řešení

výfuk

Trojsten

Milí příznivci matematiky a fyziky,

v rukou držíte brožurku pátého ročníku soutěže Náboj Junior, ve které naleznete zadání a vzorová řešení jeho čtyřiceti dvou úloh. Klání se letos zúčastnilo více než tisíc žáků druhého stupně základních škol a odpovídajících ročníků víceletých gymnázií. Náboj Junior probíhal současně na šestnácti místech České republiky a na dalších dvaceti sedmi místech Slovenské republiky. Veškeré informace o průběhu soutěže, včetně mezinárodních výsledků, jsou k nalezení na stránce `junior.naboj.org`.

Pokud vás tato soutěž zaujala, jistě budete potěšeni zprávou, že další ročník proběhne 24. listopadu 2017. A pokud byste chtěli uspořádat Náboj Junior i ve vašem městě a zvýšit tak přístupnost soutěže v regionu, budeme velice potěšeni a rádi s vámi navážeme spolupráci. V případě zájmu nám napište na kontaktní e-mail.

Spoluvyhlašovateli soutěže jsou Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy České republiky a Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy. Na organizaci soutěže se podíleli organizátoři a přátelé korespondenčního semináře Výfuk, který zastřešuje Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy, ve spolupráci s jednotlivými organizačními místy. Na Slovensku organizaci zabezpečilo občanské sdružení Trojsten.

Přejeme vám příjemné rozjímání nad příklady,

Organizátoři
`info-cz@junior.naboj.org`

Náměty úloh

Alžběta Andrýsková, Petr Doubravský, Lukáš Fusek, Simona Gabrielová, Jaroslav Hofierka, Lukáš Horváth, Dávid Mišiak, David Němec, Kristína Prešinská, Kateřina Rosická, Pavla Rudolfová, Radka Štefaníková, Patrik Švančara, Pavla Trembulaková, Tereza Uhlířová a Julie Weisová

Autoři zadání a řešení úloh

Lukáš Fusek, Simona Gabrielová, Jaroslav Hofierka, Tomáš Kremel, Petr Šimůnek, Karolína Šromeková, Radka Štefaníková, Petra Štefaníková, Patrik Švančara a Tereza Uhlířová

Recenzenti

RNDr. Zdenka Baxová (G Ľudovíta Štúra, Trenčín), doc. RNDr. Zdeněk Drozd, Ph.D. (MFF UK, Praha) a PaedDr. Ľubomír Konrád (G Veľká Okružná, Žilina)

Úloha 1 ... zlomky, zlomky, zlomky...

Andreu by zajímalo jedno číslo. Kolik je 1/2 z 2/3 z 3/4 z 4/5 z 5/6 z 6/7 z 7/8 z 8/9 z 9/10 z čísla 1 000?

Hledáme číslo x, pro které platí

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{10} \cdot 1\,000\,.$$

Všimněme si, že lze pokrátit jmenovatele a čitatele dvou po sobě jdoucích zlomků. Zůstane nám tedy pouze čitatel prvního (1) a jmenovatel posledního (10) zlomku. Hledané číslo je tedy $x = 1\,000/10 = 100$.

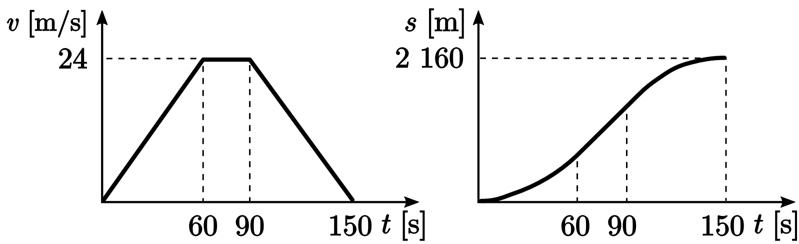
Úloha 2 ... Petr šetří

Petr dostal dvě slevové poukázky do svého oblíbeného obchodu. První poukázka byla na slevu 40 % na libovolný kus oblečení a druhá na zlevnění libovolného kusu oblečení na 99 Kč. V obchodě se Petrovi zalíbila košile za 150 Kč. Se kterou poukázkou ušetří víc a o kolik více ušetří?

S poukázkou 40% slevy tričko stojí o $0{,}40 \cdot 150\,\text{Kč} = 60\,\text{Kč}$ méně, s druhou poukázkou dostaneme slevu $150\,\text{Kč} - 99\,\text{Kč} = 51\,\text{Kč}$. Výhodnější je tedy použít poukázku se slevou 40 %, čímž Petr ušetří o 9 Kč více.

Úloha 3 ... cesta do práce

Patrik jezdí každé ráno do práce autem. V grafech na obrázku můžete vidět závislost jeho rychlosti v a dráhy s na čase t. Určete Patrikovu průměrnou rychlost.



Z druhého grafu vyčteme na svislé ose celkovou dráhu (2 160 m) a na vodorovné celkový čas (150 s). Průměrná rychlost je definována jako podíl celkové dráhy a času, vychází tedy 14,4 m/s.

Úloha 4 ... australský závod

Pes dingo chce ulovit malého klokana. Připlíží se k němu na vzdálenost 26 m a vyběhne. Zatímco pes uběhne 5 m, stihne klokan skočit dvakrát. Průměrná délka skoku je 2 m. Kolik metrů musí dingo běžet, aby klokana ulovil?

Ze zadání rovnou vidíme, že za stejnou dobu uběhne dingo o 1 m více, než doskáče klokan. Aby dingo klokana ulovil, potřebuje doběhnout klokanův náskok (26 m). Dingo tedy musí uběhnout $26 \cdot 5\,\text{m} = 130\,\text{m}$.

Úloha 5 ... zahradnice Bětka

Bětka by chtěla umět předpovídat výšku své květinky. Proto její výšku měřila tři po sobě jdoucí dny a získala tyto hodnoty: 25,5 mm, 29 mm *a* 32,5 mm. *Jak vysoká bude Bětčina květina za 12 dní ode dne posledního měření?*

Podle Bětčina měření každý den květina vyrostla o 3,5 mm. Za dalších 12 dní by tedy měla květina vyrůst o $12 \cdot 3{,}5\,\mathrm{mm} = 42\,\mathrm{mm}$, tedy na výšku $32{,}5\,\mathrm{mm} + 42\,\mathrm{mm} = 74{,}5\,\mathrm{mm}$.

Úloha 6 ... pomalý internet

Petra se chtěla koukat na nejnovější vlog svého oblíbeného youtubera. Její internetové připojení má ale rychlost stahování 0,5 MB/s, *přičemž video trvá* 7 min *a* 20 s *a zabírá* 550 MB. *Za jak dlouho od začátku stahování videa do prohlížeče si může Petra začít video přehrávat, aby se jí přehrálo bez zastavení?*

Celé video se bude stahovat $550\,\mathrm{MB}/(0{,}5\,\mathrm{MB/s}) = 1\,100\,\mathrm{s}$. Jelikož video trvá $7\,\mathrm{min}\ 20\,\mathrm{s} = 440\,\mathrm{s}$, Petře stačí, aby počkala $1\,100\,\mathrm{s} - 440\,\mathrm{s} = 660\,\mathrm{s}$, poněvadž zbytek videa se jí stáhne během přehrávání.

Úloha 7 ... pouťové atrakce

Děti na letním táboře šly na výlet do přilehlé vesnice, kde se konala pouť. 70 *z nich si zašlo na řetízkový kolotoč,* 75 *si šlo zajezdit na autodrom,* 85 *si zvolilo horskou dráhu a* 80 *dětí dovádělo na skákacím hradě. Kolik nejméně dětí vyzkoušelo všechny zmíněné pouťové atrakce, jestliže jich na táboře bylo celkem sto?*

U každé atrakce si dopočítáme, kolik dětí ji nevyzkoušelo: 30 dětí nevyzkoušelo řetízkový kolotoč, 25 autodrom, 15 horskou dráhu a 20 skákací hrad. Hledáme nejmenší počet dětí, které vyzkoušely všechny atrakce, proto uvažujeme, že nějakou z atrakcí vynechalo pokaždé jiné dítě. Všechny atrakce pak muselo navštívit nejméně $100 - (30 + 25 + 20 + 15) = 10$ dětí.

Úloha 8 ... plavání

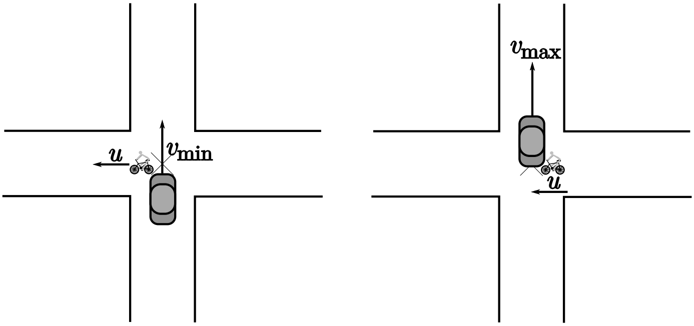
Peťa s Petrem si šli jednou zaplavat. Peťa uplave jednu délku bazénu za 54 s, *pomalejšímu Petrovi trvá uplavání stejné vzdálenosti* 63 s. *Za jak dlouho se setkají na tom samém kraji bazénu, pokud vyrazí společně?*

Aby se plavci potkali, každý z nich musí v tom samém čase uplavat několik přesných délek bazénu. Hledáme tedy nejmenší společný násobek čísel 54 a 63, kterým je 378. Peťa však za 378 s uplave $378\,\mathrm{s}/54\,\mathrm{s} = 7$ délek a Petr 6. To znamená, že v danou chvíli se budou nacházet na opačných koncích bazénu. Na stejném konci se setkají za dvojnásobek tohoto času, tedy za $756\,\mathrm{s} = 12\,\mathrm{min}\ 36\,\mathrm{s}$.

Úloha 9 ... křižovatka

Eva se blíží autem ke křižovatce a ve vzdálenosti 135 m *si všimne, že* 24 m *od křižovatky (vzhledem k jejímu středu) jede po druhé silnici směrem ke křižovatce Petr na kole rychlostí* 18 km/h. *Jakými rychlostmi (udejte interval) Eva rozhodně nesmí jet, aby Petra nepřejela? Délka Petrova kola i šířka Evina auta jsou* 2 m, *délka Evina auta je* 3 m. *Oba projíždí křižovatku středem.*

Je jednoduché si představit, že bude existovat jedna minimální a jedna maximální „zakázaná“ rychlost. V případě minimální zakázané rychlosti v_{min} Petr projede křižovatkou těsně před Evou, takže zatímco Eva projede $s_{\mathrm{E}} = 135\,\mathrm{m}$ rychlostí v_{min}, Petr ujede rychlostí $u = 18\,\mathrm{km/h} = 5\,\mathrm{m/s}$ takovou vzdálenost, aby jeho zadní kolo opustilo prostor, kterým bude Eva v autě projíždět. Snadno zjistíme, že tato vzdálenost je součtem Petrovy vzdálenosti od křižovatky, délky Petrova kola a poloviny šířky Evina auta, tzn. $s_{\mathrm{P}} = 24\,\mathrm{m} + 2\,\mathrm{m} + 1\,\mathrm{m} = 27\,\mathrm{m}$.



Jelikož čas pohybu Petra i Evy musí být stejný, platí

$$\frac{s_{\mathrm{E}}}{v_{\mathrm{min}}} = \frac{s_{\mathrm{P}}}{u} \quad \Rightarrow \quad v_{\mathrm{min}} = u\frac{s_{\mathrm{E}}}{s_{\mathrm{P}}} = 25\,\mathrm{m/s} = 90\,\mathrm{km/h}\,.$$

Obdobným způsobem vypočteme i Evinu maximální „zakázanou“ rychlost v_{max}. Tehdy se situace otočí a křižovatkou projede první Eva a těsně za ní Petr. Eva tedy ujede vzdálenost $d_{\mathrm{E}} = 135\,\mathrm{m} + 3\,\mathrm{m} = 138\,\mathrm{m}$ (k vzdálenosti od křižovatky připočteme délku Evina auta) a Petr $d_{\mathrm{P}} = 24\,\mathrm{m} - 1\,\mathrm{m} = 23\,\mathrm{m}$ (musíme odečíst polovinu šířky Evina auta).

Opět z rovnosti časů získáváme

$$\frac{d_{\mathrm{E}}}{v_{\mathrm{max}}} = \frac{d_{\mathrm{P}}}{u} \quad \Rightarrow \quad v_{\mathrm{max}} = u\frac{d_{\mathrm{E}}}{d_{\mathrm{P}}} = 30\,\mathrm{m/s} = 108\,\mathrm{km/h}\,.$$

Aby nedošlo ke srážce, Eva nemůže jet žádnou z rychlostí v intervalu $(90; 108)$ km/h.

Úloha 10 ... palindrom

Najděte nejmenší přirozené číslo k takové, že $k + 25\,973$ je palindrom. Tedy takové číslo, které když zapíšeme pozpátku, jeho hodnota se nezmění.

Nejbližší větší číslo, které je palindromem, je 26 062. Hledané číslo je tedy $k = 26\,062 - 25\,973 = 89$.

Úloha 11 ... mokrá kostka

Petr pozoruje kostku plovoucí na vodní hladině. Svým odborným pohledem určí, že nad hladinu vyčnívá přesně 20 % jejího objemu. Posléze zjistí, že k úplnému ponoření kostky na ni musí působit kolmo svisle silou o velikosti 3 N. Jaký je objem celé kostky?

V případě volně plovoucí kostky je v rovnováze vztlaková síla $\varrho V' g$ (ϱ je hustota vody, $V' = 0{,}8V$ je objem ponořené části a g tíhové zrychlení) a tíhová síla $mg = \varrho_\mathrm{k} V g$ (ϱ_k je hustota kostky). Srovnáním těchto sil dostaneme hustotu kostky:

$$0{,}8\varrho V g = \varrho_\mathrm{k} V g \quad \Rightarrow \quad \varrho_\mathrm{k} = 0{,}8\varrho = 800\,\mathrm{kg/m^3}\,.$$

Působení síly $F = 3\,\mathrm{N}$ ve směru stejném jako je směr tíhové síly vyvolá ponoření kostky, tedy i změnu ponořeného objemu na V. Rovnost sil se tedy změní na

$$mg + F = \varrho_\mathrm{k} V g + F = \varrho V g\,.$$

Úpravou rovnice dostaneme

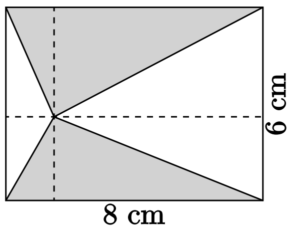
$$F = (\varrho - \varrho_\mathrm{k})\,Vg \quad \Rightarrow \quad V = \frac{F}{(\varrho - \varrho_\mathrm{k})\,g} = 0{,}0015\,\mathrm{m^3} = 1{,}5\,\ell\,.$$

Objem kostky je $1{,}5\,\ell$.

Úloha 12 ... kreslíme do obdélníku

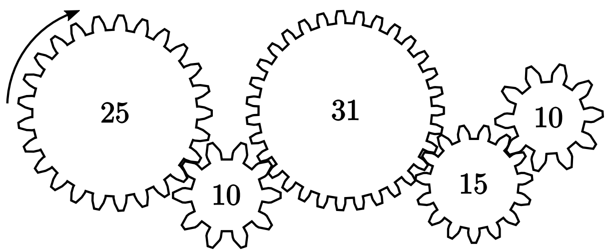
Terka si na papír nakreslila obdélník s délkami stran 8 cm *a* 6 cm. *Podél jeho delší strany vkreslila dovnitř obdélníku trojúhelník o stranách* 3 cm *a* 7 cm. *Vrchol tohoto trojúhelníku spojila se zbylými dvěma vrcholy obdélníku (viz obrázek). Jaký je obsah vyznačené šedé oblasti?*

Celý obdélník si můžeme rozdělit na čtyři menší obdélníky tak, že každý je z poloviny tvořen šedou oblastí (viz obrázek). Odtud vidíme, že obsah šedé oblasti je roven polovině obsahu celého obdélníku, tedy $(6\,\mathrm{cm} \cdot 8\,\mathrm{cm})/2 = 24\,\mathrm{cm}^2$.



Úloha 13 ... kolečka

Patrik si zapojil několik ozubených koleček jako na obrázku (čísla v kolečkách označují počet zubů) a levé kolečko roztočil na rychlost 10 ot/min. *Jakou rychlostí se bude otáčet pravé kolečko?*

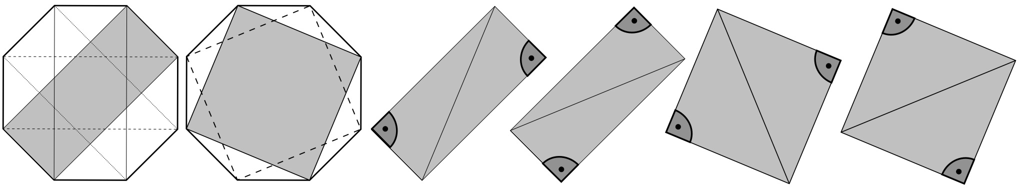


Stačí si uvědomit, že za stejný čas se na každém ozubeném kolečku musí otočit stejný počet zubů. Počty zubů koleček uprostřed tedy nemají vliv na rychlost posledního kolečka a zajímá nás jen poměr zubů prvního a posledního kolečka. Tento poměr je $25/10 = 2{,}5$. Poslední kolečko se tedy otáčí 2,5krát rychleji, tedy rychlostí 25 ot/min.

Úloha 14 ... osmiúhelník

Terku by zajímalo, kolik pravoúhlých trojúhelníků může vytvořit tak, že vrcholy těchto trojúhelníků se budou nacházet ve vrcholech pravidelného osmiúhelníku. Kolik takových trojúhelníků lze vytvořit?

V osmiúhelníku můžeme najít 4 obdélníky, jejichž dvě protilehlé strany se shodují s protilehlými stranami osmiúhelníku, a 2 čtverce, jejichž vrcholy jsou totožné s vrcholy osmiúhelníku (viz obrázek).

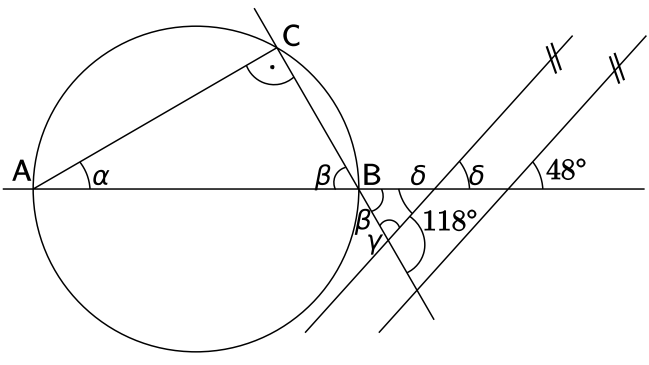


Každý z těchto čtyřúhelníků můžeme rozříznout podél dvou úhlopříček, tedy z jednoho čtyřúhelníku vzniknou 4 pravoúhlé trojúhelníky. Celkem máme tedy $(4 + 2)\cdot 4 = 24$ pravoúhlých trojúhelníků.

Úloha 15 ... úhly

Vypočítejte velikost úhlu α v nákresu na obrázku. Střed kružnice leží *na naznačené přímce.*

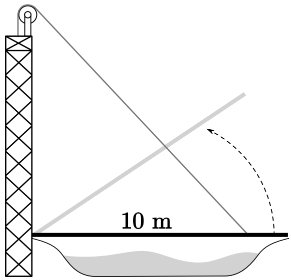
V obrázku si vyznačíme úhly β, γ a δ.



Z vedlejších úhlů získáme $\gamma = 180° - 118° = 62°$. Pomocí souhlasných a středových úhlů máme $\delta = 48°$. Ze součtu vnitřních úhlů trojúhelníku (součet je vždy roven $180°$) zjistíme $\beta = 180° - (62° + 48°) = 70°$. Dále si všimneme Thaletovy kružnice, z jejíž vlastností vyplývá, že trojúhelník ABC je pravoúhlý. Odtud nám vychází $\alpha = 180° - (90° + \beta) = 20°$.

Úloha 16 ... Kolínský most

Nový zvedací most v Kolíně váží rovných 150 t *a jeho délka je* 10 m *(viz obrázek). Zvednutí mostu z vodorovné do svislé polohy trvá* 8 min 20 s*. Lukáš během této doby hravě spočítal průměrný výkon zdvihacího zařízení za předpokladu, že most je homogenní. Spočítejte ho také.*



První zjevná komplikace spočívá v tom, že síla, kterou je potřeba zvedat most, se v čase mění. Místo sil tedy použijeme energie, neboť víme, že při zvedání se změní potenciální energie mostu o mgh, kde m je hmotnost mostu, g tíhové zrychlení a h je změna výšky *těžiště* mostu. Tato energie se musí rovnat práci zdvihacího zařízení, kterou vyjádříme jako součin jeho výkonu P a času zvedání $t = 8\,\mathrm{min}\,20\,\mathrm{s} = 500\,\mathrm{s}$. Platí tedy

$$Pt = mgh \quad \Rightarrow \quad P = \frac{mgh}{t}\,.$$

Jelikož se těžiště nachází v polovině délky mostu, při zdvihání se změní jeho výška o $h = 5\,\mathrm{m}$. Po dosazení zbylých údajů již snadno dostaneme, že výkon zdvihacího zařízení je $P = 15\,000\,\mathrm{W} = 15\,\mathrm{kW}$.

Úloha 17 ... zapomenutý PIN

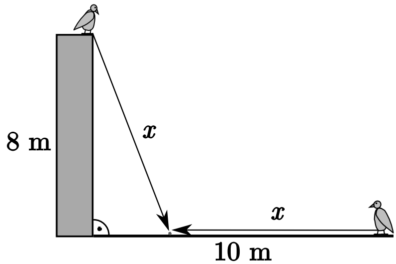
David opět něco zapomněl, tentokrát svůj PIN ke kreditní kartě. Pamatuje si však, že PIN je čtyřmístný, na druhém místě je číslice 8 *a na posledním číslice* 9*. Také ví, že celé číslo je dělitelné devíti a číslice se neopakují. Kolik za těchto podmínek existuje různých možností pro jeho PIN?*

Aby číslo bylo dělitelné devíti, musí být jeho ciferný součet dělitelný devíti. V PINu čísla 8 a 9 dávají součet 17, součet zbylých dvou čísel tedy musí být 1 (ciferný součet tak bude 18), nebo 10 (ciferný součet bude 27). Tomu vyhovují pouze tři dvojice čísel: $\{1; 0\}$, $\{3; 7\}$ a $\{4; 6\}$. Každou z dvojic můžeme zadat do kódu dvěma možnými způsoby, proto existuje celkem šest možností Davidova PINu.

Úloha 18 ... drobek

Na ulici široké 10 m *stojí budova vysoká* 8 m. *Na okraji střechy této budovy stojí holub a mlsně pozoruje drobek rohlíku, který leží někde mezi ním a opačným koncem ulice. Na druhé straně ulice, přesně naproti holubovi, stojí na zemi hrdlička s úmyslem sníst tentýž drobek. Ve stejnou chvíli vyrazí holub i hrdlička k drobku tou nejkratší možnou cestou. Pohybují se stejnou rychlostí a oba dva se u drobku střetnou v tentýž čas. Vypočtěte, jakou vzdálenost holub uletěl během cesty za drobkem.*

Hrdlička i holub letěli k drobku stejně dlouho toutéž rychlostí, tedy jejich vzdálenosti od drobku se musejí rovnat – označíme je x. Drobek, budova a holub tvoří pravoúhlý trojúhelník, pro který platí Pythagorova věta ve tvaru $8^2 + (10 - x)^2 = x^2$ (všechny vzdálenosti jsou v metrech). Roznásobením závorky a odečtením členů v druhé mocnině upravíme nakonec na rovnici $20x = 164$. Řešení této rovnice je $x = 8{,}2$, tedy holub uletěl za drobkem vzdálenost 8,2 m.



Úloha 19 ... hodina chemie

Hanka měla při hodině chemie před sebou dvě kádinky. V první z nich bylo 15 ml *třicetiprocentního lihu a ve druhé* 35 ml *padesátiprocentního roztoku stejné látky. Kolikaprocentní roztok lihu získá, když celý obsah obou kádinek smíchá? Kontrakci objemu neuvažujte.*

Čistého lihu je $0{,}3 \cdot 15\,\mathrm{ml} = 4{,}5\,\mathrm{ml}$ v první kádince a $0{,}5 \cdot 35\,\mathrm{ml} = 17{,}5\,\mathrm{ml}$ v druhé. Po smíšení obou kádinek získáme $4{,}5\,\mathrm{ml} + 17{,}5\,\mathrm{ml} = 22\,\mathrm{ml}$ lihu v $15\,\mathrm{ml} + 35\,\mathrm{ml} = 50\,\mathrm{ml}$ roztoku. Koncentrace roztoku je tedy $22\,\mathrm{ml}/50\,\mathrm{ml} \cdot 100\,\% = 44\,\%$. Hanka smícháním získá 44% roztok lihu.

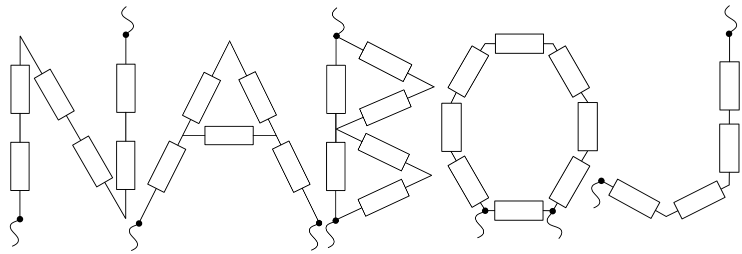
Úloha 20 ... řada čísel

Lukáš napsal za sebou osm (ne nutně různých) čísel, přičemž součet každých třech po sobě jdoucích je 42. *Třetí číslo zleva je* 15 *a osmé zleva* 19. *Jaké číslo je úplně vlevo?*

Hledané číslo si označíme x. Z podmínky součtu tří po sobě jdoucích čísel získáme, že na druhém místě musí být číslo $42 - (15 + x) = 27 - x$. Podobně pro další čísla nám vyjde x (čtvrté), $27 - x$ (páté), 15 (šesté). Pro sedmé zleva pak máme opět x, kde konečně ze součtu poslední trojice $19 + 15 + x = 42$ dopočítáme $x = 8$.

Úloha 21 ... odporný Náboj

Radka se nudila při hodině fyziky, a tak si z rezistorů, každý s odporem $10\,\Omega$, *sestavila nápis „NABOJ“, jak je znázorněno na obrázku. Poté mezi zvýrazněnými body změřila odpor a sestavila písmenka vedle sebe od nejmenší naměřené hodnoty po největší. Jaké „slovo“ získala?*



V řešení využijeme vztahy pro odpor sériového a paralelního zapojení. Počítejme postupně. V písmenu N je sériově zapojených 6 rezistorů, takže jeho odpor je $R_{\mathrm{N}} = 10\,\Omega + 10\,\Omega + \cdots + 10\,\Omega = 60\,\Omega$. Ve středu písmena A je paralelní zapojení dvou a jednoho rezistoru. Odpor této trojice R_3 vypočítáme ze vztahu pro paralelní zapojení

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{10\,\Omega} + \frac{1}{20\,\Omega} = \frac{3}{20\,\Omega} \qquad \Rightarrow \qquad R_3 = \frac{20}{3}\,\Omega\,.$$

Celkový odpor písmene A je pouhé sériové zapojení dvou rezistorů a části s odporem R_3, tedy

$$R_{\mathrm{A}} = 10\,\Omega + \frac{20}{3}\,\Omega + 10\,\Omega = \frac{80}{3}\,\Omega\,.$$

V písmenu B jsou sériově zapojené dvě části s odporem R_3, tedy

$$R_{\mathrm{B}} = \frac{20}{3}\,\Omega + \frac{20}{3}\,\Omega = \frac{40}{3}\,\Omega\,.$$

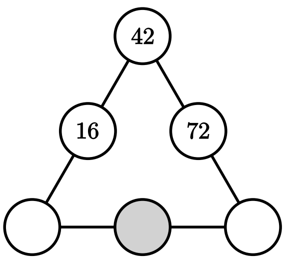
V písmenu O jsou dvě paralelní větve, jedna s odporem $10\,\Omega$ a druhá, delší, s odporem $70\,\Omega$. Platí tedy

$$\frac{1}{R_{\mathrm{O}}} = \frac{1}{10\,\Omega} + \frac{1}{70\,\Omega} = \frac{8}{70\,\Omega} \qquad \Rightarrow \qquad R_{\mathrm{O}} = \frac{70}{8}\,\Omega\,.$$

Konečně v písmenu J jsou sériově zapojené 4 rezistory s celkovým odporem $R_{\mathrm{J}} = 40\,\Omega$. Seřazením odporů podle velikosti dostáváme $R_{\mathrm{O}} < R_{\mathrm{B}} < R_{\mathrm{A}} < R_{\mathrm{J}} < R_{\mathrm{N}}$. Hledané „slovo“ je tedy OBAJN.

Úloha 22 ... číselný trojúhelník

Do trojúhelníku na obrázku jsou doplňována přirozená čísla tak, aby součin tří čísel na každé jeho straně byl stejný. Jaké nejmenší číslo může patřit do šedého kolečka?



Čísla v kolečkách si rozložíme na prvočinitele. Zjistíme, že dosavadní součin čísel vlevo je $2^5 \cdot 3 \cdot 7$ a součin čísel vpravo $2^4 \cdot 3^3 \cdot 7$. Tento nepoměr budeme vyrovnávat postupným doplňováním prvočinitelů na volné pozice (ozn. vlevo, uprostřed a vpravo).

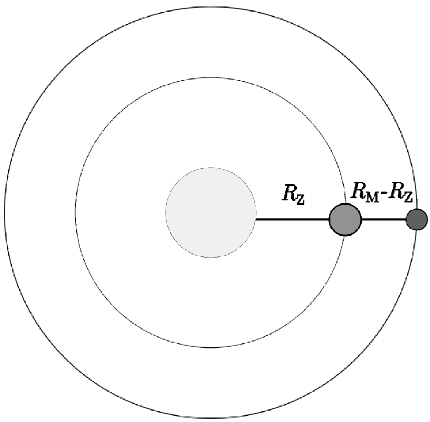
Jelikož požadujeme, aby číslo v šedém kolečku, tzn. uprostřed, bylo co nejmenší, začněme doplňovat čísla na krajní pozice. Dvojek je zatím vlevo pět a vpravo jsou čtyři. Umístíme-li tedy na volnou pozici vlevo další čtyři dvojky a na pozici vpravo pět dvojek, bude na každé straně (levé, pravé i spodní) devět dvojek. Stejně můžeme postupovat i s trojkami: na levou volnou pozici přidáme tři trojky a na pravou pozici přidáme jednu. Na každé straně tak bude stejný počet trojek, čtyři. Poslední nevyvážený prvočinitel je sedmička, která se nachází v rozkladu čísla 42, které sdílí pravá i levá strana a na spodní straně chybí. Nabízelo by se ji napsat do šedého kolečka, ale v zájmu minimalizace jeho hodnoty můžeme přidat po sedmičce na obě okrajové pozice. Tím budou na každé straně trojúhelníka shodně dvě sedmičky.

Napíšeme-li tedy do levé volné pozice číslo $2^4 \cdot 3^3 \cdot 7 = 3\,024$ a do pravé volné pozice číslo $2^5 \cdot 3 \cdot 7 = 672$, součiny na všech stranách budou vyrovnány. Aby se tato rovnováha nezměnila, do šedého kolečka musíme napsat jedničku, což je zároveň nejmenší přirozené číslo, takže „lepší“ řešení neexistuje.

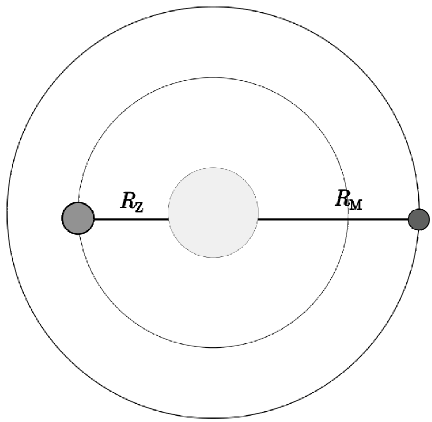
Úloha 23 ... prodlení signálu

Signál, který vysílají sondy zkoumající povrch Marsu, přichází na Zem s jistým zpožděním, protože se signál šíří pouze konečnou rychlostí $300\,000\,\mathrm{km/s}$ *(rychlost světla ve vakuu). V průběhu roku se však doba zpoždění mění v rozmezí* $250\,\mathrm{s}$ *až* $1\,250\,\mathrm{s}$*. V jaké vzdálenosti od Slunce obíhá Mars? Předpokládejte, že obě planety obíhají kolem Slunce po kruhových drahách.*

Nakreslíme-li si obrázek, snadno zjistíme, že vzájemná vzdálenost Země a Marsu se v čase mění. Nejblíže jsou planety k sobě v tzv. opozici (viz obrázek), kdy je jejich vzájemná vzdálenost $r = R_\mathrm{M} - R_\mathrm{Z}$, kde R_M a R_Z jsou poloměry drah Marsu a Země. Naopak největší vzdálenost planet je $R = R_\mathrm{M} + R_\mathrm{Z}$ (konjunkce).



opozice



konjunkce

Jelikož se signál ze sondy šíří pořád stejnou rychlostí, nejmenší době zpoždění t odpovídá dráha, jež musí signál procestovat, rovna r a největšímu zpoždění T dráha rovna R:

$$r = ct\,, \qquad R = cT\,,$$

kde $c = 300\,000\,\mathrm{km/s}$ je rychlost šíření signálu. Do první rovnice dosaďme za r a vyjádříme si R_Z:

$$R_\mathrm{M} - R_\mathrm{Z} = ct \quad \Rightarrow \quad R_\mathrm{Z} = R_\mathrm{M} - ct\,.$$

Stejně tak rozepíšeme vzdálenost R v druhé rovnici a za R_Z dosadíme výše odvozený výraz:

$$R_\mathrm{M} + R_\mathrm{Z} = 2R_\mathrm{M} - ct = cT\,.$$

Z této rovnice vyjádříme R_M a dosadíme známé veličiny c, t a T:

$$R_\mathrm{M} = \frac{c\,(t+T)}{2} = 225\,000\,000\,\mathrm{km}\,.$$

Mars obíhá ve vzdálenosti 225 miliónů kilometrů od Slunce.

Úloha 24 ... pastelky

Kolika způsoby může Borek uspořádat šest pastelek ve svém penále (červenou, oranžovou, žlutou, zelenou, modrou, fialovou), aby žlutá a zelená nebyly vedle sebe?

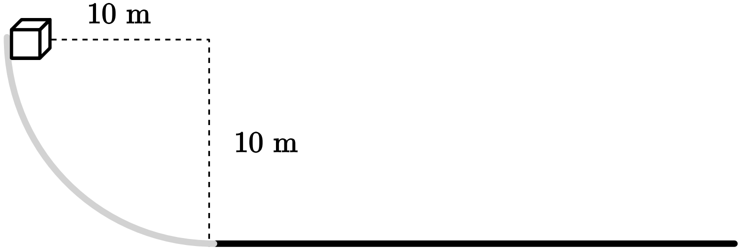
Kdyby Borek neměl omezení na sousedství žluté a zelené pastelky, počet možných uložení lze vypočíst jako součin možností uložení jednotlivých pastelek: první pastelku lze uložit do penálu na šest míst, druhou na zbylých pět, třetí na čtyři atd., čímž dostaneme $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ možností.

Pokusme se teď zjistit počet nevyhovujících případů, tzn. kolik uspořádání má zelenou a žlutou pastelku vedle sebe. Dvojici pastelek lze umístit do penálu na celkem 5 pozic, tzn. 10 různými způsoby (zelenou a žlutou můžeme na každé z pozic prohodit). Zbylé čtyři pastelky pak lze umístit $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ způsoby na zbylé volné pozice v penálu. Nevyhovujících možností je tedy $10 \cdot 24 = 240$ a vyhovujících $720 - 240 = 480$.

Borek tedy může umístit do penálu pastelky 480 různými způsoby.

Úloha 25 ... megaskluzavka

Fyzici mají někdy zvláštní nápady. Onehdy vymysleli megaskluzavku, ze které pouští krychli s rozměry $2\,\mathrm{m} \times 2\,\mathrm{m} \times 2\,\mathrm{m}$ *z výšky* $10\,\mathrm{m}$ *vzhledem k jejímu středu po čtvrtkružnici na vodorovnou rovinu (viz obrázek). Po namydlené skluzavce se krychle pohybuje bez tření, ale na vodorovné rovině je součinitel smykového tření* 0,2*. Jakou vzdálenost po vodorovné dráze krychle ujede, než se zastaví?*



Úlohu vyřešíme pomocí zákona zachování energie. Počáteční potenciální energie krychle se nejprve přemění na kinetickou energii na úpatí skluzavky a nakonec se tato energie uvolní ve formě tepla jako práce třecích sil.

Postačuje nám tedy uvážit rovnost celkové energie na začátku a na konci pohybu. Potenciální energii vypočítáme jako součin hmotnosti krychle m, tíhového zrychlení g a rozdílu výšky těžiště krychle v původní poloze na skluzavce a konečnou polohou na vodorovné dráze $h = 9\,\mathrm{m}$. Práce třecích sil je jednoduše součin třecí síly F_t a ujeté dráhy s:

$$mgh = F_\mathrm{t}s = mgfs\,,$$

kde f je součinitel smykového tření. Využili jsme vzorce pro velikost třecí síly $F_\mathrm{t} = F_\mathrm{n}f$, kde normálová síla (síla, kterou krychle tlačí na podložku) F_n je rovna tíhové síle mg.

Po vyjádření dráhy s z rovnice výše a dosazení dostaneme $s = h/f = 45\,\mathrm{m}$. Krychle se tedy zastaví po $45\,\mathrm{m}$ klouzání na vodorovné dráze.

Úloha 26 ... úhlopříčky

Zjistěte, který pravidelný mnohoúhelník má 54 úhlopříček.

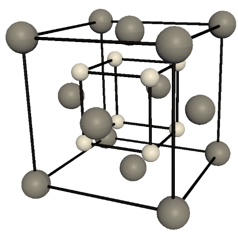
Postupujme od nejjednodušších útvarů. Po nakreslení zjistíme, že trojúhelník nemá úhlopříčku, čtverec je má dvě, pětiúhelník pět, šestiúhelník devět... Takto můžeme pokračovat i dále, lze si ale všimnout, že rozdíl v počtu úhlopříček vzroste mezi dvěma následujícími mnohoúhelníky vždy o jedna.

Bez dalšího kreslení tak můžeme určit, že sedmiúhelník má 14 úhlopříček, osmiúhelník 20, devítiúhelník 27, desetiúhelník 35, jedenáctiúhelník 44 a dvanáctiúhelník 54 úhlopříček.

Úloha 27 ... blyštivá

Julie před nedávnem našla krystalek fluoridu vápenatého (CaF_2) o objemu $1\,\mathrm{cm}^3$. Ví, že krystal má kubickou strukturu – molekuly CaF_2 jsou uspořádány do krychlové sítě (viz obrázek) tak, že atomy vápníku ( ) se nacházejí v rozích krychle a ve středech stěn, atomy fluoru ( ) tvoří krychli o poloviční délce hrany umístěné uprostřed té velké.

Délka strany vápníkové krychle je $5 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$. V tabulkách si našla, že jeden atom vápníku má hmotnost $65 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ a fluoru $30 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$. Jakou hmotnost má Juliin krystal?



Z tvaru krystalové struktury nejdříve zjistíme, kolik atomů „patří“ jedné krystalové buňce. Každý z osmi atomů vápníku v rozích krychle přispívá osminou[1] a každý ze šesti vápníků ve středech stran přispívá polovinou. Dohromady tedy buňce připadá N_{Ca} atomů Ca:

$$N_{\mathrm{Ca}} = 8 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 4\,.$$

A jelikož všechny atomu fluoru se nacházejí uvnitř buňky v rozích menší krychle, všech $N_{\mathrm{F}} = 8$ připadá této buňce.

Hmotnost jedné buňky je tedy součtem hmotností jednotlivých atomů o hmotnostech $m_{\mathrm{Ca}} = 65 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ a $m_{\mathrm{F}} = 30 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$:

$$m = m_{\mathrm{Ca}} N_{\mathrm{Ca}} + m_{\mathrm{F}} N_{\mathrm{F}} = 500 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}\,.$$

Objem této krychličky je $v = \left(5 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}\right)^3 = 125 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{m}^3$. Poměr m/v nám nakonec dá hustotu $\mathrm{CaF_2}$ ϱ:

$$\varrho = \frac{m}{v} = \frac{500 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}}{125 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{m}^3} = 4 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m^3} = 4\,\mathrm{g/cm^3}\,.$$

Snadno tak určíme, že hmotnost Juliina krystalku o jednotkovém objemu je 4 g.

Úloha 28 ... zrádné síly

Homogenní deska dlouhá 5 m *a vážící* 20 kg *je podepřena dvěma podpěrami, a to na levém konci, a ve vzdálenosti* 3 m *od levého konce. Na pravý konec desky umístíme závaží o hmotnosti* 5 kg. *Jak velkou silou působí deska na levou podpěru?*

Pakliže deska není v pohybu, je výslednice všech sil na ni působících rovna nule. Tedy tíhová síla (působící v těžišti desky) a síla, kterou závaží tlačí na desku směrem kolmo dolů, se vyrovnávají (co do velikosti) silám, kterými působí podpěry na desku směrem kolmo vzhůru. Rovnost těchto sil nám ale neodhalí, jakými silami působí jednotlivé podpěry.

Pakliže se deska neotáčí, je i výslednice momentů sil na ni působících *vzhledem k libovolné ose otáčení* rovna nule. Umístíme-li osu otáčení do vrcholu pravé podpěry, pomůžeme si tím, že vzhledem k této ose otáčení je moment síly pravé podpěry nulový.[2] Moment síly, kterou působí závaží, má velikost $M_{\mathrm{z}} = 5\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} \cdot 2\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{N{\cdot}m}$. Moment tíhové síly desky má opačný směr a velikost $M_{\mathrm{d}} = 20\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} \cdot 0{,}5\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{N{\cdot}m}$, protože působiště tíhové síly se nachází v těžišti desky.

Na první pohled vidíme, že $M_{\mathrm{d}} = M_{\mathrm{z}}$. Jinými slovy, momenty se akorát vyruší a pro levou podpěru nezbývá, než nepůsobit na desku jiným než nulovým momentem. Protože vzdálenost levé podpěry od osy otáčení je nenulová, nule se musí rovnat působící síla. Levá podpěra tedy nepůsobí na desku žádnou (nulovou) silou.

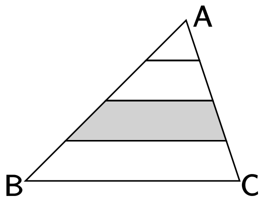
Úloha 29 ... pyramida

Trojúhelník ABC *je rozdělený třemi úsečkami na čtyři části, přičemž přímky jsou rovnoběžné a navzájem od sebe, a od strany* BC *a vrcholu* A *rovnoměrně rozmístěné. Tom ví, že obsah*

[1] Toto tvrzení je analogické s tím, jako tvrdit, že každý z vápníků v rozích krychle je sdílen s dalšími sedmi sousedními krychlemi.

[2] Působiště síly se nachází v ose otáčení, tudíž rameno této síly je nulové.

druhé části zdola (šedě na obrázku) je $35\,\mathrm{cm}^2$*, a tak si hned spočítal obsah celého trojúhelníku. Kolik mu to vyšlo?*



Jelikož úsečky, které dělí trojúhelník ABC, jsou rovnoběžné s BC, vzniklé menší trojúhelníky se společným bodem A mají stejné vnitřní úhly jako ABC a jsou si tedy podobné.

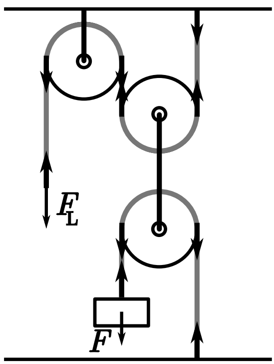
Z rovnoměrného rozmístění dělicích úseček vyplývá, že výšky zmíněných trojúhelníků procházejících bodem A jsou v poměru $1:2:3:4$. Z podobnosti pak plyne, že ve stejném poměru musí být i délky dělicích úseček a strana BC. Jelikož dělicí úsečky odpovídají základnám trojúhelníků a obsah trojúhelníků závisí na součinu délek základen a výšek, plochy menších trojúhelníků a trojúhelníku ABC musí být v poměru $1^2 : 2^2 : 3^2 : 4^2 = 1 : 4 : 9 : 16$.

Označíme-li plochu nejmenšího trojúhelníku jako jeden dílek, správný poměr ploch zbylých trojúhelníků dostaneme tehdy, když plochy jednotlivých pásů budou mít postupně 1, 3, 5 a 7 dílků. Ze známé plochy šedého dílku pak určíme, že $1\,\text{dílek} = 35\,\mathrm{cm}^2/5 = 7\,\mathrm{cm}^2$. Plocha trojúhelníku ABC odpovídá 16 dílkům, tedy ploše $16 \cdot 7\,\mathrm{cm}^2 = 112\,\mathrm{cm}^2$.

Úloha 30 ... kladkostroj

Luboš si v supermarketu pořídil nejnovější model kladkostroje (viz obrázek). Jakou nejmenší silou musí Luboš držet volný konec provazu, aby se závaží s hmotností $2\,\mathrm{kg}$ *nepohybovalo? Hmotnost kladek zanedbejte.*

Závaží působí na spodní lano tahovou silou $F = 2\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s}^2 = 20\,\mathrm{N}$. Působení této síly si můžeme představovat tak, jakoby se tato síla snažila lano „natáhnout“. Ze zákona akce a reakce pak lano působí na závaží silou stejné velikosti, ale opačného směru, tzn. jakoby se chtělo lano „smrsknout“. Jelikož lano přenáší tahovou sílu podél celé jeho délky, „smrskávací“ síla působí na obou stranách spodní kladky a na bod uchycení lana (viz obrázek). Spodní kladka je tedy tažená směrem dolů silou $2F$.



Luboš působí na horní lano jinou tahovou silou F_L, ale jinak je postup stejný. Nakreslíme-li si do obrázku síly, kterými působí lano na vrchní kladky, zjistíme, že pravá horní kladka je tahaná silou $2F_\mathrm{L}$ směrem nahoru. Aby se soustava kladek a závaží nepohybovala, musí mít síly F a F_L stejnou velikost, tzn.

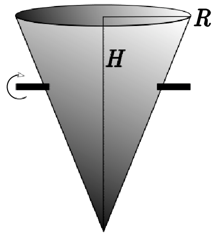
$$2F_\mathrm{L} = 2F \quad \Rightarrow \quad F_\mathrm{L} = F = 20\,\mathrm{N}\,.$$

Luboš musí volný konec lana držet silou 20 N.

Úloha 31 ... vodní kornout

Oblíbenou atrakcí na koupalištích je tzv. vodní kornout. Jedná se o lehkou nádobu ve tvaru dutého kužele (poloměr R, výška H), který je ve 2/3 výšky upevněn na otočnou osu (viz obrázek). Do kornoutu pak seshora přitéká voda, která plní kornout až do momentu, kdy se ze stabilní rovnováhy stane labilní, kornout se převrátí a všechnu vodu vylije.

Zjistěte, jaká část celkového objemu kornoutu je naplněna vodou těsně před jeho převrácením. Hodit se vám bude údaj, že těžiště kužele se nachází na jeho ose v 1/4 výšky nad základnou.



Vodní kornout se převrhne tehdy, když bude jeho těžiště těsně nad osou otáčení (dostane se tak do *labilní polohy*[3]). Musíme tedy zjistit, kolik musí být v kornoutu vody, aby bylo jeho těžiště ve stejné výšce jako osa otáčení.

Ttěžiště kužele se nachází v jedné čtvrtině výšky, když výšku měříme od základny, tedy ve třech čtvrtinách od jeho vrcholu. Označíme-li výšku vody h_v, musí tedy platit rovnost

$$\frac{2}{3}H = \frac{3}{4}h_\mathrm{v} \quad \Rightarrow \quad h_\mathrm{v} = \frac{8}{9}H\,.$$

Výška vody bude v momentě těsně před převrácením dosahovat 8/9 výšky kornoutu. Poloměr základny tohoto kužele bude rovněž 8/9 poloměru kornoutu. Objem vody tedy bude

$$V_\mathrm{v} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{8}{9}R\right)^2 \cdot \frac{8}{9}H = \left(\frac{8}{9}\right)^3 \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{512}{729}V\,.$$

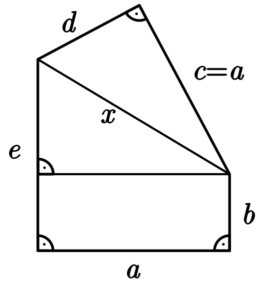
Těsně před převrácením bude kornout naplněn vodou do $512/729 \doteq 0{,}7$ násobku svého objemu.

[3]Situace tak bude stejná, jako kdybychom měli houpačku balancující v nejvyšší možné poloze. Takovéto houpačce stačí jen malý impuls, aby z této polohy spadla.

Úloha 32 ... nepravidelný pětiúhelník

Terka dostala od Radky hádanku: jaký je obsah nakresleného pětiúhelníku? Zadané jsou jeho čtyři strany a, b, c a e, přičemž $a = c$, a tři pravé úhly (viz obrázek).

Útvar si rozdělíme na obdélník a dva trojúhelníky, jejichž obsahy postupně spočteme (viz obrázek). Obsah obdélníku je $S_1 = ab$. Obsah pravoúhlého trojúhelníku nad obdélníkem je $S_2 = a(e - b)/2$.



Pro výpočet obsahu posledního trojúhelníku potřebujeme zjistit délku strany d, k čemuž dospějeme pomocí dvou Pythagorových vět (přeponu značíme x):

$$a^2 + (e - b)^2 = x^2 \,,$$
$$d^2 + c^2 = x^2 \,.$$

Porovnáním levých stran rovnic dostaneme

$$d = \sqrt{a^2 + (e - b)^2 - c^2} = \sqrt{a^2 + (e - b)^2 - a^2} = e - b \,.$$

Obsah trojúhelníka tedy vychází $S_3 = a(e-b)/2$. Celkový obsah získáme součtem obsahů dílčích útvarů:

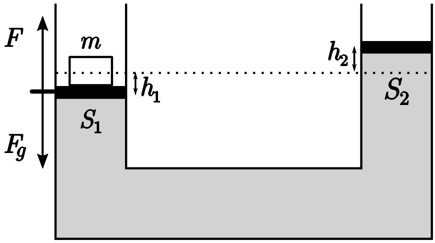
$$S = ab + \frac{a\,(e - b)}{2} + \frac{a\,(e - b)}{2} = ab + a\,(e - b) = ab + ae - ab = ae \,.$$

Obsah Terčina pětiúhelníku je ae.

Úloha 33 ... zvedák

Terka si domů pořídila nový hydraulický zvedák s písty o zanedbatelné hmotnosti a plochách $3\,\mathrm{dm}^2$ *a* $2\,\mathrm{dm}^2$. *Rozhodne se jej hned vyzkoušet a na první píst položí* $6\,\mathrm{kg}$ *závaží. O kolik centimetrů výš bude po ustálení druhý píst vůči jeho počáteční poloze? Hustota oleje v hydraulickém pístu je* $800\,\mathrm{kg/m}^3$.

Hydraulický zvedák funguje jako soustava dvou spojených nádob. Z rovnosti hydrostatických tlaků tedy ihned vyplyne, že na začátku, tzn. před tím, než Terka zatížila jeden z pístů, bude hladina oleje (a tedy i písty) v obou částech zvedáku ve stejné výšce.



Pak Terka položí na první z pístů závaží. To bude na píst působit směrem dolů tíhovou silou $F_g = mg$, kde $m = 6\,\mathrm{kg}$ je hmotnost závaží a g je tíhové zrychlení. V důsledku této síly píst poklesne o h_1 a druhý píst stoupne o h_2. Hladina oleje v druhém pístu tak bude o $h_1 + h_2$ výš než v prvním pístu. Na první píst bude tedy kromě tíhové síly působit v opačném směru dodatečná síla od hydrostatického tlaku $F = S_1 \varrho g\,(h_1 + h_2)$, kde $S_1 = 3\,\mathrm{dm}^2$ je plocha prvního pístu a $\varrho = 800\,\mathrm{kg/m}^3$ je hustota oleje.

Po ustálení pístů musí být tyto dvě síly v rovnováze, tedy $F_g = F$. Než ale tuto rovnost rozepíšeme, musíme si uvědomit, že objem oleje v pístech je pořád konstantní (olej jako každá jiná kapalina není stlačitelný). Pokles prvního pístu „vytlačí“ objem oleje $S_1 h_1$. Stejný objem oleje pak musí odpovídat i stoupnutí druhého pístu, takže bude platit

$$S_1 h_1 = S_2 h_2\,,$$

kde $S_2 = 2\,\mathrm{dm}^2$ je plocha druhého pístu.

S tímto poznatkem pak můžeme rozepsat rovnost sil:

$$mg = S_1 \varrho g\,(h_1 + h_2) = \varrho g\,(S_1 h_1 + S_1 h_2)\;.$$

Za člen $S_1 h_1$ dosadíme z rovnice pro konstantní objem oleje, vykrátíme g a dostáváme výslední vztah pro h_2

$$m = \varrho\,(S_2 h_2 + S_1 h_2) \quad\Rightarrow\quad h_2 = \frac{m}{\varrho\,(S_1 + S_2)} = 15\,\mathrm{cm}\,.$$

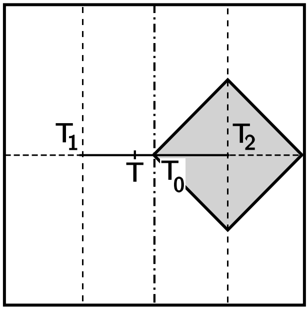
Druhý píst zvedáku stoupl o $15\,\mathrm{cm}$ oproti jeho počáteční poloze.

Úloha 34 ... děravý čtverec

Andrea si vystřihla čtverec se stranou o délce $14\,\mathrm{cm}$. *Protože jí ale přišel příliš nudný, vyřezala z něj menší čtverec (viz obrázek). O kolik se tím posunulo těžiště výsledného útvaru?*

Úloha se podstatně zjednoduší, když si všimneme spousty symetrií. Původní čtverec je symetrický podle obou os (úsečky spojující protilehlé středy stran). Jeho těžiště T_0 se tedy musí nacházet v jejich průsečíku.

Dále, rozdělíme-li nově vzniklý útvar podél svislé osy, vlevo dostaneme obdélník s rozměry $\frac{a}{2}$ a a (kde $a = 14\,\mathrm{cm}$ je délka strany čtverce). Tento obdélník je opět symetrický podle obou jeho os, takže jeho těžiště T_1 se bude nacházet v jejich průsečíku, který je od bodu T_0 vzdálen o $a/4$.



Stejnou symetrii vykazuje i útvar vpravo, takže i jeho těžiště T_2 se bude nacházet opět ve vzdálenosti $a/4$ od původního těžiště T_0. Vzdálenost bodů T_1 a T_2 je tedy $2 \cdot a/4 = a/2 = 7\,\mathrm{cm}$.

Na to, abychom mohli tato částečná těžiště zkombinovat do jednoho, potřebujeme znát hmotnost (resp. zde obsah) jednotlivých částí. Obdélník má obsah $S_1 = a \cdot a/2 = a^2/2$. Obsah útvaru napravo zjistíme snadno – stačí si uvědomit, že strana vystřiženého čtverce je rovna čtvrtině úhlopříčky. Z Pythagorovy věty snadno zjistíme, že úhlopříčka je $\sqrt{2}$krát delší než strana čtverce. Délka strany vystřiženého čtverce je tedy $\sqrt{2} \cdot a/4$ a jeho obsah

$$S' = \left(\frac{\sqrt{2} \cdot a}{4}\right)^2 = \frac{2a^2}{16} = \frac{a^2}{8}\,.$$

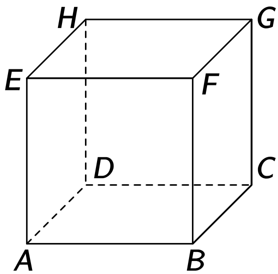
Obsah útvaru napravo je tedy

$$S_2 = S_1 - S' = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{8} = \frac{3a^2}{8}\,.$$

Poměr velikostí ploch $S_1 : S_2$ je $4 : 3$. Těžiště výsledného útvaru T bude tedy dělit úsečku $\mathsf{T}_1\mathsf{T}_2$ v obráceném poměru $3 : 4$.[4] Poněvadž je délka této úsečky 7 cm, bod T bude ležet ve vzdálenosti 3 cm od bodu T_1 a 4 cm od bodu T_2, a tedy ve vzdálenosti 0,5 cm od původního těžiště.

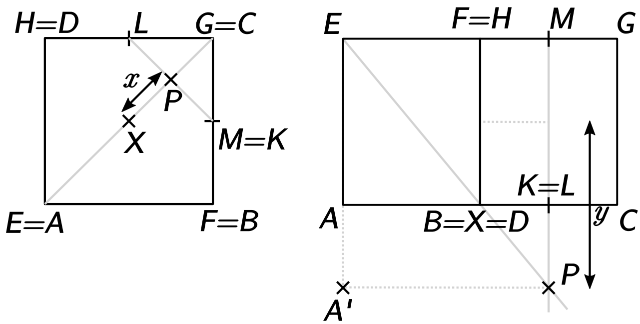
Úloha 35 ... krychle

Mějme krychli ABCDEFGH, *přičemž bod* X *je střed stěny* ABCD, *bod* K *je střed strany* BC, *bod* L *je střed strany* CD *a bod* M *je střed strany* FG. *Dále označme průsečík přímky* EX *a roviny* KLM *jako bod* P. *Jaká je vzdálenost bodu* P *od těžiště krychle, jestliže délka její strany je a?*



[4] Těžiště je vždy blíže těžšímu z útvarů.

Podíváme-li se na situaci seshora (viz obrázek), situace se zjednoduší. Seshora vidíme pouze posunutí ve vodorovném směru. Ihned si můžeme všimnout, že vodorovná vzdálenost průsečíku EX a roviny KLM, tzn. bodu P od středu krychle, je rovna jedné čtvrtině úhlopříčky. Délka úhlopříčky je z Pythagorovy věty $u = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$, takže její čtvrtina je $x = u/4 = a\sqrt{2}/4$.



Podíváme-li se na situaci zboku, můžeme si všimnout, že trojúhelníky ABE a A′PE mají všechny úhly shodné, takže jsou si podobné a poměr jejich stran je rovný 1 : 2. Odtud určíme, že svislá vzdálenost bodu P od úsečky AC je $a/2$, a tedy svislá vzdálenost tohoto bodu od středu krychle (jejího těžiště) je $y = a/2 + a/2 = a$.

Přímou vzdálenost bodu P od středu krychle určíme z Pythagorovy věty, protože již známe jeho vodorovnou (x) a svislou vzdálenost (y):

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + a^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{16} + \frac{16a^2}{16}} = \sqrt{\frac{18a^2}{16}} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}.$$

Bod P je vzdálen od těžiště krychle o vzdálenost $3a\sqrt{2}/4$.

Úloha 36 . . . kde je nula

Ondra viděl v metru napsaný mnohočlen $x^5 - 7x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 16x - 17$. Kamarád Vojta mu prozradil, že tento mnohočlen má právě jeden kořen (tj. x, pro které je hodnota mnohočlenu rovna nule) na intervalu $\langle 0; 10\rangle$. Zjistěte hodnotu tohoto kořene s přesností $\pm 0{,}5$.

Označme si hledaný kořen jako x_0. Označíme-li si mnohočlen jako $\mathcal{M}(x)$, platí tedy $\mathcal{M}(x_0) = 0$. Dále si zaveďme čísla x_- a x_+ jako čísla, která jsou jen o něco menší a větší než x_0.

Jelikož $\mathcal{M}(x)$ prochází v x_0 nulou, hodnoty $\mathcal{M}(x_-)$ a $\mathcal{M}(x_+)$ se *musí* lišit ve znaménku, jinak by mezi těmito hodnotami mnohočlen nemohl být nulový.

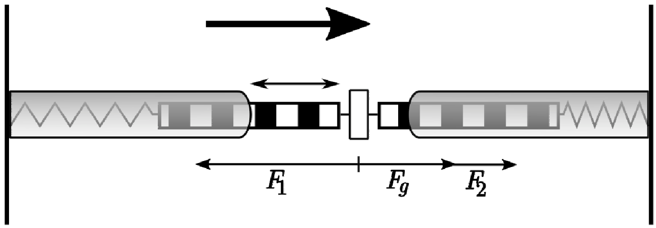
Zkontrolujme, zda-li toto pravidlo platí pro okraje zadaného intervalu. Pro $x = 0$ nemusíme počítat a snadno zjistíme, že $\mathcal{M}(0) = -17 < 0$. Pro $x = 10$ také nemusíme nic počítat. Stačí si uvědomit, že první člen bude $10^5 = 100\,000$, což je číslo převyšující všechny ostatní členy (druhý člen bude „jen“ $-7 \cdot 10^4 = -70\,000$). Rozhodně tedy platí $\mathcal{M}(10) > 0$.

Pro střed intervalu, tzn. pro $x = 5$, jsou první dva členy $5^5 - 7 \cdot 5^4 = 5^4 \cdot (5 - 7) = -2 \cdot 5^4 < 0$, zbylé členy jsou opět zanedbatelně malé, takže $\mathcal{M}(5) < 0$. Z podmínky pro opačnost znamének tak můžeme usoudit, že hledaný kořen se bude nacházet v intervalu $(5; 10)$. Stejně rychle s použitím prvních dvou členů můžeme spočítat, že $\mathcal{M}(6) < 0$, a s použitím i třetího členu $\mathcal{M}(7) > 0$. Uhodneme-li přibližnou hodnotu mnohočlenu jako $x_0 \doteq 6{,}5$, v rámci tolerance hledanou hodnotu určíme s absolutní jistotou.

Úloha 37 ... siloměry

Katka našla ve školní laboratoři dva siloměry. Oba měly v nenataženém stavu délku 15 cm, *ale první měl dílky odpovídající síle* 1 N *dlouhé* 1 cm, *zatímco druhý měl dílky dlouhé* 3 cm. *Katka pak mezi siloměry připevnila závaží o hmotnosti* 700 g *a tloušťce* 5 cm *a napjala je mezi dvě vodorovné desky vzdálené* 50 cm *(viz obrázek). Jakou sílu ukazoval první siloměr, pověšený seshora?* Pozor, obrázek je otočený naležato! Šipka vyznačuje směr tíhové síly.

Na pověšené závaží působí tři síly: tíhová síla $F_g = mg$ (m značí hmotnost závaží a g tíhové zrychlení) a síly od siloměrů F_1 a F_2 (viz obrázek). Z rovnosti těchto tří sil platí $F_1 = F_2 + F_g$.



Síly F_1 a F_2 jsou závislé na tom, jak jsou nataženy pružiny v siloměrech. Aby mohly siloměry ukazovat působící sílu na svých stupnicích, musí platit, že jejich natažení je přímo úměrné působící síle. Jinak řečeno, musí platit $F_1 = k_1 x_1$, kde x_1 je natažení siloměru a $k_1 = 1\,\mathrm{N/cm}$ je konstanta odpovídající stupnici siloměru. Stejně tak platí, že $F_2 = k_2 x_2$, kde konstanta

$$k_2 = \frac{1\,\mathrm{N}}{3\,\mathrm{cm}} = \frac{1}{3}\,\mathrm{N/cm}\,.$$

Aby mohly být siloměry napjaté mezi deskami (ozn. vzdálenost desek $D = 50\,\mathrm{cm}$), musí se mezi ně vejít oba siloměry i závaží. Tzn. musí platit $D = 2d_0 + h + x_1 + x_2$, kde $d_0 = 15\,\mathrm{cm}$ je délka nenapjatých siloměrů a $h = 5\,\mathrm{cm}$ je tloušťka závaží. Upravíme-li rovnost tak, aby na pravé straně zůstaly jen neznámé členy, dostaneme

$$x_1 + x_2 = D - 2d_0 - h = 15\,\mathrm{cm} = x\,.$$

Z poslední rovnice tedy platí $x_2 = x - x_1$.

Napišme si teď rovnost sil ze začátku řešení s nově nabytými poznatky:

$$F_1 = F_2 + F_g\,,$$
$$k_1 x_1 = k_2\,(x - x_1) + mg\,.$$

Poslední rovnice obsahuje jen známé veličiny a neznámou x_1. Úpravou rovnice tak lze dojít k hledanému řešení

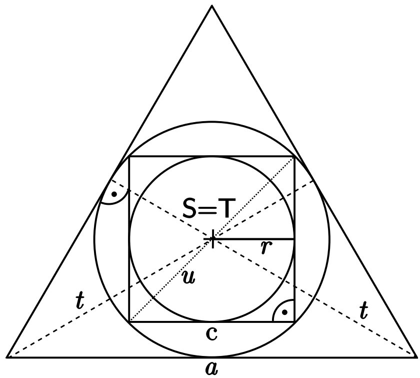
$$x_1 = \frac{k_2 x + mg}{k_1 + k_2} = 9\,\mathrm{cm}\,.$$

Siloměr natažený o $x_1 = 9\,\mathrm{cm}$ ukazoval sílu 9 N.

Úloha 38 ... vepsané útvary

Jindřich hledal náměty na nové logo svojí firmy, až se mu podařil nakreslit rovnostranný trojúhelník, do kterého byla vepsána kružnice, do které byl vepsán čtverec, do kterého byla vepsána další kružnice. Jaký poloměr měla tato kružnice, pokud strana trojúhelníka měla délku a?

Kružnice vepsaná má střed S v průsečíku os úhlů, které v rovnostranném trojúhelníku splývají s výškami. Střed kružnice vepsané je zde tedy zároveň i těžiště trojúhelníku T, a tedy poloměr vepsané kružnice je rovný třetině délky těžnice.



Délku těžnice t zjistíme jednoduše z Pythagorovy věty, neboť libovolná výška tvoří pravoúhlý trojúhelník s přeponou a a další odvěsnou $a/2$. Platí tedy

$$a^2 = t^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}\,.$$

Poloměr vepsané kružnice je tedy $a\sqrt{3}/6$ a průměr $a\sqrt{3}/3$. Právě průměru kružnice se bude rovnat úhlopříčka u vepsaného čtverce. Tato úhlopříčka zase tvoří se dvěma stranami čtverce (o délce c) pravoúhlý trojúhelník, pro který platí také Pythagorova věta:

$$u^2 = c^2 + c^2 \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{\frac{u^2}{2}} = \sqrt{\frac{3a^2}{9 \cdot 2}} = \frac{a}{3} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}\,.$$

Průměr nejmenší vnitřní vepsané kružnice je rovný straně c, takže hledaný poloměr je

$$r = \frac{c}{2} = \frac{a}{6} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = a\frac{\sqrt{6}}{12} \doteq 0{,}2a\,.$$

Kružnice v Jindrově logu má poloměr asi $0{,}2a$.

Úloha 39 ... ciferný součin

Lukáše by zajímalo, kolik existuje šesticiferných čísel, jejichž ciferný součin (součin všech cifer, ze kterých se číslo skládá) je roven 750. Kolik jich je?

Prvočíselný rozklad čísla 750 je $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$. Naše šesticiferné číslo má tedy cifry z množiny $\{1; 2; 3; 5; 5; 5\}$ anebo $\{1; 1; 6; 5; 5; 5\}$ a my jen musíme určit počet všech možností, jak tyto cifry uložit na jednotlivé pozice.

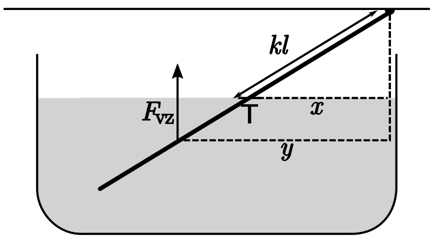
První tři cifry z první množiny lze uložit na pozice ve výsledném číslu $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ způsoby. Zbylé pozice pak musíme obsadit pětkami, tzn. pouze jedním způsobem. Stejně můžeme postupovat i v druhé množině. Nejdříve si v ní ale „obarvíme“ jedničky různou barvou a dostaneme tak rovněž 120 různých čísel. V nich ale vždy nalezneme dvojice, jež mají jedničky na stejných pozicích, ale s přehozenými barvami. Po myšlenkovém „odbarvení“ jedniček nám tak zůstane pouze 60 různých čísel. Ve finále tak dostaneme, že možných šesticiferných čísel je $120 + 60 = 180$.

Úloha 40 ... mokrá tyč

Jaroslav našel doma na půdě tenkou homogenní tyč dlouhou $1\,\mathrm{m}$ *vyrobenou ze dřeva o hustotě* $750\,\mathrm{kg/m^3}$*. Na jednom konci tyč uchytil přes otočný kloub ke stropu, pod ni dal nádobu s vodou (viz obrázek) a vyčkal, až se ustanoví rovnováha. Jak dlouhý kus tyče je pod vodou?*

Počítání rovnováhy působících sil nám na první pohled nepomůže ke zdárnému řešení, neboť kromě vztlakové a tíhové síly na tyč působí nějakou silou i kloub. Velikost a ani směr této síly neznáme.

Jelikož se tyč neotáčí, můžeme analyzovat momenty sil. Pokud se tyč neotáčí (což je náš případ ustálené rovnováhy), celkový moment sil působících na tyč musí být nulový pro libovolnou osu otáčení. Poučeni z předchozích úloh již víme, že výhodné bude zvolit osu otáčení do kloubu. Tím zabezpečíme, že moment neznámé síly působící v kloubu má nulovou velikost.



Moment tíhové síly bude roven $M_\mathrm{t} = mgx$, kde m je hmotnost tyče, g tíhové zrychlení a x vodorovná vzdálenost těžiště, které se nachází ve středu tyče a osy otáčení (viz obrázek). Hmotnost tyče lze navíc vyjádřit pomocí hustoty a objemu tyče jako $m = \varrho_\mathrm{t} S l$, kde $\varrho_\mathrm{t} = 750\,\mathrm{kg/m^3}$ je hustota tyče, S a l jsou její průřez a délka.

Dále označme písmenem k tu část délky tyče, která je nad hladinou vody. Tedy pod hladinou je $(1-k)\,l$ metrů tyče a na tuto část tyče působí v jejím středu vztlaková síla $\varrho V' g$, kde ϱ je hustota vody a $V' = (1-k)\,Sl$ je objem ponořené části tyče. Moment této síly je tedy $M_\mathrm{v} = \varrho\,(1-k)\,Sly$, kde y je vodorovná vzdálenost působiště vztlakové síly a osy otáčení.

Uvědomíme-li si, že trojúhelníky naznačené čárkovanými čarami a tyčí jsou si podobné,[5] poměr jejich odvěsen y/x musí být stejný jako poměr jejich přepon, tzn. platí

$$\frac{y}{x} = \frac{kl + \frac{1}{2}(1-k)\,l}{\frac{1}{2}kl} = 1 + k\,.$$

Teď nám nic nebrání napsat si rovnost momentů M_t a M_v, jelikož jiné momenty sil na tyč nepůsobí:

$$M_\mathrm{t} = M_\mathrm{v} \quad \Rightarrow \quad \varrho_\mathrm{t} Slgx = \varrho\,(1-k)\,Slgy\,.$$

V rovnici se vykrátí členy Slg. „Přehodíme-li“ členy ϱ a x na opačné strany rovnice, členy se přesunou do jmenovatele a dostáváme

$$\frac{\varrho_\mathrm{t}}{\varrho} = (1-k)\cdot\frac{y}{x}\,.$$

Do rovnice dosadíme již odvozenou rovnost $y/x = 1 + k$ a dostáváme

$$\frac{\varrho_\mathrm{t}}{\varrho} = (1-k)\cdot(1+k) = 1 - k^2\,,$$

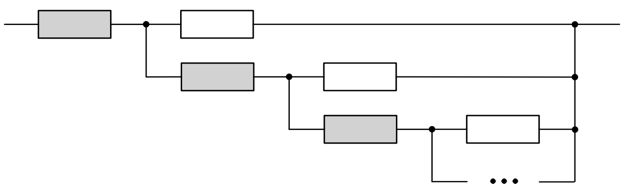
kde jsme využili známý vzorec $(1-A)\cdot(1+A) = 1 - A^2$. V rovnici osamostatníme k^2 a celou rovnici odmocníme:

$$k^2 = 1 - \frac{\varrho_\mathrm{t}}{\varrho} \quad \Rightarrow \quad k = \sqrt{1 - \frac{\varrho_\mathrm{t}}{\varrho}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\,.$$

Výsledek nám říká, že polovina tyče, tzn. 50 cm se nachází nad vodou a stejná část tyče pod vodou. Největšímu úskalí – kvadratické rovnici a jejímu řešení – jsme se vyhnuli vhodným označením neznámé ponořené části.

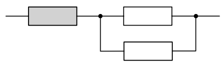
Úloha 41 ... nekonečné zapojení

Nejlepší, co se dá s nekonečnou zásobou rezistorů o odporech 1 Ω (bílý rezistor) a 2 Ω (šedý rezistor) udělat, je zapojit je podle obrázku do nekonečného obvodu. Vypočítejte celkový odpor tohoto zapojení! Výsledek udejte s přesností na dvě desetinná místa.



Uvažovaná síť rezistorů je nekonečná, proto přidáme-li k této síti ještě jeden „kousek“, bude zapojeno stále nekonečně mnoho rezistorů a celkový odpor zapojení se tím pádem nemůže změnit. To nám umožní celé zapojení překreslit do jednoduchého náhradního zapojení, jehož odpor R_c musí být roven celkovému odporu původní nekonečné sítě (viz obrázek).

[5] Trojúhelníky mají zjevně všechny úhly shodné a musí si být tedy podobné.



$\mathbf{R_C}$

Stačí si vzpomenout na pravidla pro počítaní odporů sériového a paralelního zapojení rezistorů a při označení menšího z rezistorů ($1\,\Omega$) R a většího $2R$ píšeme rovnost:

$$R_\mathrm{c} = 2R + \left(\frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_\mathrm{c}}}\right) = 2R + \left(\frac{R_\mathrm{c}R}{R_\mathrm{c} + R}\right) .$$

Nyní rovnici vynásobme členem $(R_\mathrm{c} + R)$. Dostáváme

$$R_\mathrm{c}^2 + R_\mathrm{c}R = 2R^2 + 2R_\mathrm{c}R + R_\mathrm{c}R ,$$

což lze upravit do tvaru

$$0 = R_\mathrm{c}^2 - 2R_\mathrm{c}R - 2R^2 = (R_\mathrm{c} - R)^2 - 3R^2 .$$

Dostáváme tak rovnost $3R^2 = (R_\mathrm{c} - R)^2$, kterou lze odmocnit (fyzikální význam mají pouze kladné členy), čímž dostaneme výsledný odpor

$$R_\mathrm{c} - R = \sqrt{3}R \quad \Rightarrow \quad R_\mathrm{c} = R + \sqrt{3}R = \left(1 + \sqrt{3}\right) R \doteq 2{,}73\,\Omega .$$

Výsledek s požadovanou přesností je možné určit i postupným přidáváním „kousků“. Postupně pro 1, 2, 3 a 4 „kousky“ dostaneme odpory $3\,\Omega$, $11/4\,\Omega = 2{,}75\,\Omega$, $41/15\,\Omega \doteq 2{,}73\,\Omega$ a $153/56\,\Omega \doteq 2{,}73\,\Omega$.

Úloha 42 ... zlomky, zlomky, zlomky...

Andreu by zajímalo ještě jedno číslo. Jedná se o jistý zlomek z. Zvýšíme-li čitatel i jmenovatel zlomku z o 1, dostaneme zlomek o $1/20$ větší. Provedeme-li stejnou operaci ještě jednou, dostaneme zlomek o $1/12$ větší než z. Jaký byl onen původní zlomek?

Úloha je přebrána ze školního kola kategorie C 59. ročníku matematické olympiády.

Označme si původní zlomek jako $z = a/b$. Ze zadání pak plynou rovnice

$$\frac{a+1}{b+1} - \frac{a}{b} = \frac{1}{20} , \qquad \frac{a+2}{b+2} - \frac{a}{b} = \frac{1}{12} ,$$

které lze upravit tak, aby neobsahovaly zlomky (první rovnici vynásobíme členem $20b\,(b+1)$, druhou členem $12b\,(b+2)$):

$$20b\,(a+1) - 20a\,(b+1) = b\,(b+1) , \quad \Rightarrow \quad 19b - 20a = b^2 ,$$
$$12b\,(a+2) - 12a\,(b+2) = b\,(b+2) , \quad \Rightarrow \quad 22b - 24a = b^2 .$$

Srovnáním pravých stran rovnic dostaneme $4a = 3b$, což lze pak dosadit například do druhé z rovnic. Tím dosteneme rovnici

$$22b - 24 \cdot \frac{3}{4}b = 22b - 18b = 4b = b^2 .$$

Tato rovnice má dvě řešení. První z nich, $b = 0$ však nemá smysl, neboť v původním zlomku bychom museli dělit nulou. Pro nás správné je tedy druhé řešení $b = 4$. Snadno dopočteme $a = 3$, takže hledaný zlomek je $z = 3/4$.

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA
Univerzita Karlova

Organizační místa Náboje Junior 2016

V České republice soutež koordinovali organizátoři fyzikálního korespondenčního semináře pro základní školy *Výfuk*, součást *Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy*. Na Slovensku organizaci zajišťovalo občanské sdružení *Trojsten*.

Brno – *Fakulta stroj. inženýrství VUT*
České Budějovice – *Gymnázium Jírovcova*
Česká Lípa – *Gymnázium Žitavská*
Frýdlant nad Ostravicí – *Gymnázium Frýdlant*
Hradec Králové – *Univerzita Hradec Králové*
Karlovy Vary – *První české gymnázium v Karlových Varech*
Olomouc – *Gymnázium Olomouc-Hejčín*
Ostrava – *Gymnázium O. Havlové*
Písek – *SPŠ a VOŠ Písek*
Plzeň – *Gymnázium Mikulášské náměstí*
Praha – *Gymnázum Ch. Dopplera*
Praha – *Gymnázium Voděradská*
Sokolov – *Gymnázium a KVC Sokolov*
Třebíč – *Katolické gymnázium*
Ústí nad Labem – *Fakulta sociálně ekonomická UJEP*
Zlín – *Gymnázium Zlín-Lesní čtvrť*

Bánovce n. Bebr. – *Gymnázium J. Jesenského*
Banská Bystrica – *Gymnázium A. Sládkoviča*
Bratislava – *Univerzitné pastor. centrum UK*
Brezno – *Gymnázium J. Chalupku*
Dubnica nad Váhom – *Gymnázium Školská*
Hlohovec – *Gymnázium I. Kupca*
Košice – *Gymnázium Alejová*
Levice – *Gymnázium A. Vrábla*
Lipt. Mikuláš – *Gymnázium M. M. Hodžu*
Lučenec – *CVČ Magnet*
Michalovce – *Gymnázium P. Horova*
Námestovo – *Gymnázium A. Bernoláka*
Nitra – *Gymnázium Párovská*
Partizánske – *Gymnázium Komenského*
Piešťany – *Gymnázium P. de Coubertina*
Poprad – *Gymnázium Kukučínova*
Prešov – *Gymnázium J. A. Raymana*
Prievidza – *Gymnázium V. B. Nedožerského*
Púchov – *Gymnázium Púchov*
Spišská Nová Ves – *Gymnázium Javorová*
Sučany – *Bilingválne gymnázium M. Hodžu*
Šahy – *Gymnázium Mládežnícka*
Šurany – *Gymnázium Bernolákova*
Trenčín – *Gymnázium Ľ. Štúra*
Trstená – *Gymnázium M. Hattalu*
Zvolen – *Gymnázium Ľ. Štúra*
Žilina – *Gymnázium Varšavská*