NÁBOJ junior

5. ročník

2016/17

Vzorové riešenia

výfuk

Trojsten

Ahojte,

práve sa Vám do rúk dostala brožúrka zadaní a riešení úloh súťaže Náboj Junior 2016. Náboj Junior je matematicko-fyzikálna súťaž pre štvorčlenné tímy žiakov druhého stupňa základných škôl a žiakov prímy až kvarty osemročných gymnázií. Súťaž trvá 120 minút, počas ktorých sa tímy snažia vyriešiť čo najviac úloh zameraných nielen na znalosti z matematiky a fyziky, ale aj na schopnosť pristupovať k úlohám inovatívne a s dôvtipom.

Dňa 25. novembra 2016 prebieha 5. ročník Náboja Junior v 27 mestách na Slovensku a v 16 mestách v Českej republike. V týchto slovenských mestách je súťaž organizovaná šikovnými stredoškolákmi, ktorí venujú svoj čas a energiu tomu, aby umožnili mladším žiakom z regióna zasúťažiť si a preveriť svoje vedomosti.

Cieľom Náboja Junior je rozvíjať nadanie detí v oblasti matematiky a fyziky a ukázať širokému spektru žiakov, že tieto prírodné vedy ukrývajú množstvo zaujímavostí, výziev a príležitostí. Ďalším cieľom je rozvíjanie organizačných schopností stredoškolákov, ktorí majú počas prípravy súťaže možnosť na vlastnej koži zažiť zábavné, ale aj náročné aspekty práce v tíme.

Súťaž Náboj Junior vznikla ako spoločný projekt občianskeho združenia Trojsten a korešpondenčného seminára MFF UK Výfuk. Členovia organizácií sú vysokoškolskí študenti Fakulty matematiky, fyziky a informatiky UK v Bratislave alebo Matematicko-fyzikální fakulty UK, ktorí sa snažia o rozvoj nadania študentov a záujmu o prírodné vedy.

Prajeme veľa šťastia pri počítaní,

o. z. Trojsten a seminár MFF UK Výfuk

Námety úloh

Alžběta Andrýsková, Petr Doubravský, Lukáš Fusek, Simona Gabrielová, Jaroslav Hofierka, Lukáš Horváth, Dávid Mišiak, David Němec, Kristína Prešinská, Kateřina Rosická, Pavla Rudolfová, Radka Štefaníková, Patrik Švančara, Pavla Trembulaková, Tereza Uhlířová a Julie Weisová

Autori zadaní a riešení úloh

Lukáš Fusek, Simona Gabrielová, Jaroslav Hofierka, Tomáš Kremel, Petr Šimůnek, Karolína Šromeková, Radka Štefaníková, Petra Štefaníková, Patrik Švančara a Tereza Uhlířová

Recenzenti

RNDr. Zdenka Baxová (G Ľudovíta Štúra, Trenčín), doc. RNDr. Zdeněk Drozd, Ph.D. (MFF UK, Praha) a PaedDr. Ľubomír Konrád (G Veľká Okružná, Žilina)

Úloha 1 ... zlomky, zlomky, zlomky...

Enku by zaujímalo, koľko je 1/2 *z* 2/3 *z* 3/4 *z* 4/5 *z* 5/6 *z* 6/7 *z* 7/8 *z* 8/9 *z* 9/10 *z čísla* 1 000?

Hľadáme číslo x, pre ktoré platí

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{10} \cdot 1\,000\,.$$

Všimnite si, že môžeme vykrátiť menovateľa a čitateľa dvoch po sebe idúcich zlomkov. Ostane nám teda len čitateľ prvého (1) a menovateľ posledného (10) zlomku. Hľadané číslo je teda $x = 1\,000/10 = 100$.

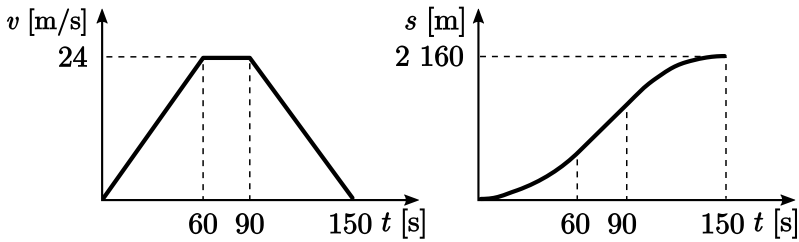
Úloha 2 ... Adam šetrí

Adam dostal dve zľavové poukážky do svojho obľúbeného obchodu. Prvá poukážka bola na zľavu 40 % *z ľubovoľného kusu oblečenia a druhá na zľavnenie ľubovoľného kusu oblečenia na cenu* 9,9 €*. V obchode sa Adamovi zapáčila košeľa za* 15 €*. Ktorú poukážku má použiť, aby ušetril viac a o koľko viac ušetrí?*

S poukážkou 40% zľavy košeľa stojí o $0{,}40 \cdot 15\,€ = 6\,€$ menej, s druhou poukážkou by dostal zľavu $15\,€ - 9{,}9\,€ = 5{,}1\,€$. Výhodnejšie je teda použiť poukážku so sľavou 40 %, čím Adam ušetrí o 0,9 € viac.

Úloha 3 ... cesta do práce

Paťo chodí každé ráno do práce autom. V nasledujúcich grafoch vidíte závislosť jeho rýchlosti v a dráhy s od času t. Určte Paťovu priemernú rýchlosť.



Z druhého grafu, vyčítame na zvislej osi celkovú dráhu (2 160 m) a na vodorovnej celkový čas (150 s). Priemerná rýchlosť je definovaná ako podiel celkovej prejdenej dráhy a času za ktorý bola prejdená, teda Paťova priemerná rýchlosť je 14,4 m/s.

Úloha 4 ... austrálske preteky

Pes Dingo chce uloviť malého klokana. Priplíži sa k nemu na vzdialenosť 26 m *a vybehne. Kým Dingo prebehne* 5 m*, klokan stihne skočiť dvakrát. Priemerná dĺžka skoku je* 2 m*. Koľko metrov musí Dingo prebehnúť, aby klokana chytil?*

Zo zadania rovno vidíme, že za rovnakú dobu prebehne Dingo o 1 m viac ako doskáče klokan. Aby Dingo klokana ulovil, potrebuje dobehnúť klokanov náskok (26 m). Dingo teda musí prebehnúť $26 \cdot 5\,\mathrm{m} = 130\,\mathrm{m}$.

Úloha 5 ... záhradkarka Katka

Katka by chcela vedieť predvídať výšku svojho balkónového kvietku. Preto merala jeho výšku tri dni po sebe a získala tieto hodnoty: 25,5 mm, 29 mm *a* 32,5 mm. *Aký vysoký bude Katkin kvietok za 12 dní od posledného merania?*

Podľa Katkinho merania kvietok vyrástol každý deň o 3,5 mm. Za ďalších 12 dní by teda kvietok mal vyrásť o $12 \cdot 3{,}5\,\mathrm{mm} = 42\,\mathrm{mm}$ a teda bude vysoký $32{,}5\,\mathrm{mm} + 42\,\mathrm{mm} = 74{,}5\,\mathrm{mm}$.

Úloha 6 ... pomalý internet

Vladko si chcel pozrieť najnovšie príspevky svojho obľúbeného youtubera. Jeho internetové pripojenie má ale rýchlosť sťahovania len 0,5 MB/s. *Video trvá* 7 min *a* 20 s *a zaberá* 550 MB. *Za aký dlhý čas od začiatku nahrávania videa do prehliadača si môže Vladko začať video prehrávať, ak chce aby sa mu prehralo bez zastavenia?*

Celé video sa bude sťahovať $550\,\mathrm{MB}/(0{,}5\,\mathrm{MB/s}) = 1\,100\,\mathrm{s}$. Keďže video trvá $7\,\mathrm{min}\ 20\,\mathrm{s} = 440\,\mathrm{s}$, Vladkovi stačí, aby počkal $1\,100\,\mathrm{s} - 440\,\mathrm{s} = 660\,\mathrm{s}$, pretože zvyšok videa sa mu stiahne počas prehrávania.

Úloha 7 ... kolotoče

Deti išli na školský výlet, mali šťastie a natrafili na kolotoče. 70 *z nich išlo na reťazovku,* 75 *si zajazdilo na autodrome,* 85 *si zvolilo horskú dráhu a* 80 *detí sa vybláznilo na skákacom hrade. Koľko najmenej detí vyskúšalo všetky spomínané atrakcie, ak ich na výlet išlo spolu sto?*

Pri každej atrakcii si spočítame, koľko detí ju nevyskúšalo: 30 detí nevyskúšalo reťazovku, 25 autodrom, 15 horskú dráhu a 20 skákací hrad. Hľadáme najmenší počet detí, ktoré vyskúšali všetky atrakcie, preto uvažujeme, že niektorú z atrakcií vynechalo vždy iné dieťa. Všetky atrakcie tak muselo navštíviť aspoň $100 - (30 + 25 + 20 + 15) = 10$ detí.

Úloha 8 ... plávanie

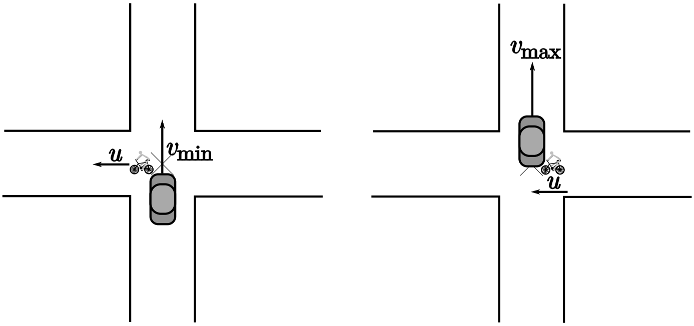
Tinka s Maťom si radi chodia zaplávať. Tinka prepláva jednu dĺžku bazéna za 54 s, *pomalšiemu Maťovi trvá preplávanie rovnakej vzdialenosti* 63 s. *Za aký dlhý čas sa stretnú na rovnakom kraji bazéna, ak vyrazia spoločne?*

Aby sa Tinka s Maťom stretli, každý z nich musí za rovnaký čas preplávať niekoľko celých dĺžok bazéna. Hľadáme teda najmenší spoločný násobok čísel 54 a 63, ktorý je 378. Tinka však za 378 s prepláva $378\,\mathrm{s}/54\,\mathrm{s} = 7$ dĺžok a Maťo 6. To znamená, že sa vtedy budú nachádzať na opačných koncoch bazéna. Na rovnakom konci sa stretnú za dvojnásobok tohto času, teda za $756\,\mathrm{s} = 12\,\mathrm{min}\ 36\,\mathrm{s}$.

Úloha 9 ... križovatka

Eva sa blíži autom ku križovatke a vo vzdialenosti 135 m *si všimne, že* 24 m *od križovatky (vzhľadom k jej stredu) ide po ceste smerom ku križovatke Vladko na bicykli rýchlosťou* 18 km/h. *Akými rýchlosťami (chceme interval) Eva rozhodne nesmie ísť, aby Vladka nezrazila? Dĺžka Vladkovho bicykla aj šírka Evinho auta je* 2 m, *dĺžka auta je* 3 m. *Obaja prechádzajú cez stred križovatky.*

Je ľahké predstaviť si, že bude existovať jedna minimálna a jedna maximálna „zakázaná“ rýchlosť. V prípade minimálnej zakázanej rýchlosti v_{min} Vladko prejde cez križovatku tesne pred Evou, takže kým Eva prejde $s_{\mathrm{E}} = 135\,\mathrm{m}$ rýchlosťou v_{min}, Vladko prejde rýchlosťou $u = 18\,\mathrm{km/h} = 5\,\mathrm{m/s}$ takú vzdialenosť, aby jeho zadné koleso opustilo priestor, ktorým bude Eva v aute prechádzať. Ľahko zistíme, že táto vzdialenosť je súčtom Vladkovej vzdialenosti od križovatky, dĺžky bicykla a polovice šírky auta, teda $s_{\mathrm{V}} = 24\,\mathrm{m} + 2\,\mathrm{m} + 1\,\mathrm{m} = 27\,\mathrm{m}$.



Keďže čas pohybu Vladka aj Evy musí byť rovnaký, platí

$$\frac{s_{\mathrm{E}}}{v_{\mathrm{min}}} = \frac{s_{\mathrm{V}}}{u} \quad \Rightarrow \quad v_{\mathrm{min}} = u\frac{s_{\mathrm{E}}}{s_{\mathrm{V}}} = 25\,\mathrm{m/s} = 90\,\mathrm{km/h}\,.$$

Podobne vypočítame aj Evinu maximálnu „zakázanú“ rýchlosť v_{max}. Vtedy sa situácia otočí a križovatkou prejde pravá Eva a tesne za ňou Vladko. Eva teda prejde vzdialenosť $d_{\mathrm{E}} = 135\,\mathrm{m} + 3\,\mathrm{m} = 138\,\mathrm{m}$ (k vzdialenosti od križovatky pripočítame dĺžku auta) a Vladko $d_{\mathrm{V}} = 24\,\mathrm{m} - 1\,\mathrm{m} = 23\,\mathrm{m}$ (musíme odrátať polovicu šírky auta). Opäť z rovnosti času dostaneme

$$\frac{d_{\mathrm{E}}}{v_{\mathrm{max}}} = \frac{d_{\mathrm{V}}}{u} \quad \Rightarrow \quad v_{\mathrm{max}} = u\frac{d_{\mathrm{E}}}{d_{\mathrm{V}}} = 30\,\mathrm{m/s} = 108\,\mathrm{km/h}\,.$$

Aby nedošlo k zrážke, Eva nemôže ísť žiadnou z rýchlosti v intervale $(90; 108)\,\mathrm{km/h}$.

Úloha 10 ... palindróm

Samko má rád palindrómy, teda čísla, ktoré keď napíšeme odzadu, budú mať rovnakú hodnotu. Pomôžte mu nájsť najmenšie prirodzené číslo k také, že $k + 25\,973$ je palindróm.

Najbližšie väčšie číslo, ktoré je palindróm, je 26 062. Hľadané číslo teda je $k = 26\,062 - 25\,973 = 89$.

Úloha 11 ... mokrá kocka

Kubo pozoruje kocku plávajúcu na vodnej hladine. Svojim okom odborníka určí, že nad hladinou trčí presne $20\,\%$ jej objemu. Začne sa s kockou hrať a zistí, že na kocku musí pôsobiť kolmo zvisle nadol silou o veľkosti $3\,\mathrm{N}$, aby sa úplne ponorila. Aký je objem kocky?

Keď kocka voľne pláva, je v rovnováhe vztlaková sila $\varrho V' g$ (ϱ je hustota vody, $V' = 0{,}8V$ je objem ponorenej časti a g tiažové zrýchlenie) a tiažová sila $mg = \varrho_{\mathrm{k}} V g$ (ϱ_{k} je hustota kocky). Porovnaním týchto dvoch síl dostaneme hustotu kocky:

$$0{,}8\varrho V g = \varrho_{\mathrm{k}} V g \quad \Rightarrow \quad \varrho_{\mathrm{k}} = 0{,}8\varrho = 800\,\mathrm{kg/m^3}\,.$$

Pôsobením sily $F = 3\,\mathrm{N}$ v smere tiažovej sily, Kubo vyvolá ponorenie kocky, a teda aj zmenu ponoreného objemu na V. Rovnosť síl sa teda zmení na

$$mg + F = \varrho_{\mathrm{k}} Vg + F = \varrho Vg\,.$$

A úpravou rovnice dostaneme

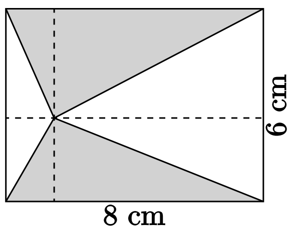
$$F = (\varrho - \varrho_{\mathrm{k}})\,Vg \quad \Rightarrow \quad V = \frac{F}{(\varrho - \varrho_{\mathrm{k}})\,g} = 0{,}0015\,\mathrm{m}^3 = 1{,}5\,\ell\,.$$

Objem kocky teda je $1{,}5\,\ell$.

Úloha 12 ... kreslenie do obdĺžnika

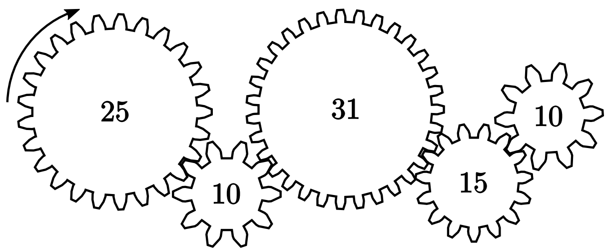
Terka si nakreslila obdĺžnik s dĺžkami strán $8\,\mathrm{cm}$ a $6\,\mathrm{cm}$. Pozdĺž jeho dlhšej strany vkreslila do vnútra obdĺžnika trojuholník so stranami $3\,\mathrm{cm}$ a $7\,\mathrm{cm}$. Vrchol tohto trojuholníka spojila so zvyšnými dvoma vrcholmi obdĺžnika (pozri obrázok). Aký je obsah vyznačenej sivej oblasti?

Celý obdĺžnik si môžeme rozdeliť na 4 menšie obdĺžniky tak, že každý je z polovice tvorený sivou oblasťou (pozri obrázok). Odtiaľ vidíme, že obsah sivej časti je rovný polovici obsahu celého obdĺžnika, teda $(6\,\mathrm{cm} \cdot 8\,\mathrm{cm})\,/2 = 24\,\mathrm{cm}^2$.



Úloha 13 ... kolieska

Duško si zapojil niekoľko ozubených koliesok tak, ako je na obrázku (čísla v nich označujú počet zubov). Ľavé koliesko roztočil na rýchlosť $10\,\mathrm{ot/min}$. Akou rýchlosťou sa bude otáčať pravé koliesko?

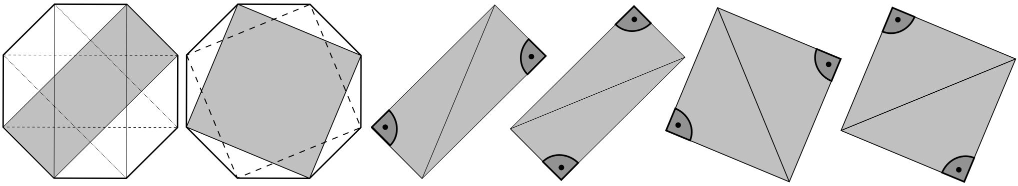


Stačí si uvedomiť, že za rovnaký čas sa na každom ozubenom koliesku musí otočiť rovnaký počet zubov. Počty zubov koliesok uprostred teda nemajú vplyv na rýchlosť posledného kolieska a zaujíma nás len pomer zubov prvého a posledného kolieska. Tento pomer je $25/10 = 2{,}5$. Posledné koliesko sa teda otáča 2,5krát rýchlejšie, teda rýchlosťou $25\,\mathrm{ot/min}$.

Úloha 14 ... osemuholník

Zuzku by zaujímalo, koľko pravouhlých trojuholníkov môže vytvoriť tak, že vrcholy týchto trojuholníkov sa budú nachádzať vo vrcholoch pravidelného osemuholníka. Koľko takýchto trojuholníkov je možné vytvoriť?

V osemuholníku môžeme nájsť 4 obdĺžniky, ktorých dve protiľahlé strany sú zhodné s protiľahlými stranami osemuholníka, a 2 štvorce, ktorých vrcholy sú totožné s vrcholmi osemuholníka (pozri obrázok).

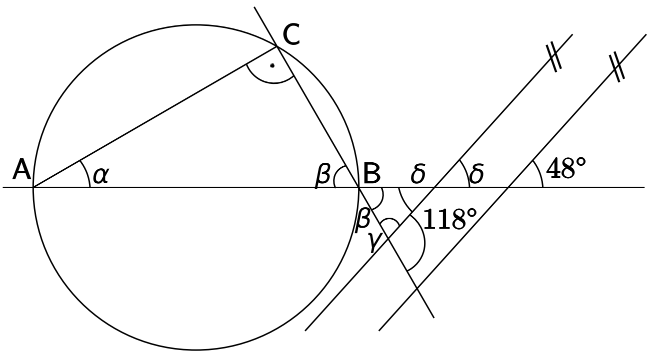


Každý z týchto štvoruholníkov môžeme rozrezať pozdĺž dvoch uhlopriečiek, teda z jedného štvoruholníka vzniknú 4 pravouhlé trojuholníky. Dokopy teda máme $(4 + 2) \cdot 4 = 24$ pravouhlých trojuholníkov.

Úloha 15 ... uhly

Vypočítajte veľkosť uhla α na obrázku. Stred kružnice leží *na naznačenej priamke.*

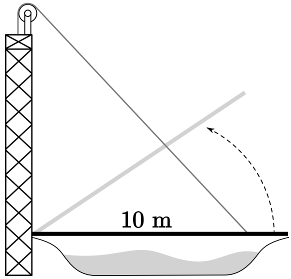
Na obrázku si vyznačíme uhly β, γ a δ.



Zo susedných uhlov získame $\gamma = 180° - 118° = 62°$. Pomocou súhlasných a stredových uhlov máme $\delta = 48°$. Zo súčtu vnútorných uhlov trojuholníka (súčet je vždy rovný $180°$) zistíme $\beta = 180° - (62° + 48°) = 70°$. Ďalej si všimneme Tálesovu kružnicu, z ktorej vyplýva, že trojuholník ABC je pravouhlý. Odtiaľ nám vychádza $\alpha = 180° - (90° + \beta) = 20°$.

Úloha 16 ... nový most

V Martinovom obľúbenom meste postavili nový dvíhací most, ktorý váži presne 150 t *a meria* 10 m *(pozri obrázok). Zdvihnutie mostu z vodorovnej do zvislej polohy trvá* 8 min 20 s*. Martin si za tento čas hravo spočítal priemerný výkon zdvíhacieho zariadenia, za predpokladu, že most je homogénny. Spočítajte ho tiež.*



Prvá zjavná komplikácia je, že sila, ktorou je potrebné zdvíhať most sa v čase mení. Namiesto síl teda použijeme energiu, pretože vieme, že pri zdvihnutí sa zmení potenciálna energia mostu o mgh, kde m je hmotnosť mostu, g tiažové zrýchlenie a h je zmena výšky *ťažiska* mostu. Táto energia sa musí rovnať práci zdvíhacieho zariadenia, ktorú vyjadríme ako súčin jeho výkonu P a času zdvíhania $t = 8\,\mathrm{min}\,20\,\mathrm{s} = 500\,\mathrm{s}$. Platí teda

$$Pt = mgh \quad \Rightarrow \quad P = \frac{mgh}{t}\,.$$

Keďže sa ťažisko nachádza v polovici dĺžky mostu, pri zdvíhaní sa jeho výška zmení o $h = 5\,\mathrm{m}$. Po dosadení ostatných údajov dostaneme, že výkon zdvíhacieho zariadenia je $P = 15\,000\,\mathrm{W} = 15\,\mathrm{kW}$.

Úloha 17 ... zabudnutý PIN

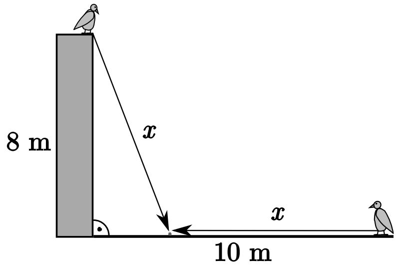
Samo zase na niečo zabudol, tentokrát svoj PIN ku kreditnej karte. Pamätá si však, že PIN je štvormiestny, na druhom mieste je číslo 8 *a na poslednom číslo* 9*. Tiež vie, že celé číslo je deliteľné deviatimi a čísla sa neopakujú. Koľko rôznych možností existuje pre jeho možný PIN?*

Aby číslo bolo deliteľné deviatimi, musí byť jeho ciferný súčet deliteľný deviatimi. V PINe čísla 8 a 9 dávajú súčet 17, súčet zvyšných dvoch čísel teda musí byť 1 (ciferný súčet tak bude 18) alebo 10 (ciferný súčet tak bude 27). Tomu vyhovujú len tri dvojice čísel: $\{1; 0\}$, $\{3; 7\}$ a $\{4; 6\}$. Každú z dvojice môžeme zadať do kódu dvoma spôsobmi, preto existuje šesť možností Samovho PINu.

Úloha 18 ... omrvinka

Na ulici širokej $10\,\mathrm{m}$ *stojí budova vysoká* $8\,\mathrm{m}$*. Na okraji strechy tejto budovy stojí holub a nenažrane pozoruje omrvinku, ktorá leží niekde medzi ním a opačným koncom ulice. Na druhej strane ulice, presne oproti holubovi, stojí na zemi hrdlička s úmyslom zjesť tú istú omrvinku. Holub aj hrdlička vyrazia naraz a letia k omrvinke čo najkratšou možnou cestou a obaja rovnakou rýchlosťou. Pri omrvinke sa stretnú v ten istý čas. Vypočítajte, akú vzdialenosť holub preletel počas cesty za omrvinkou.*

Hrdlička aj holub leteli rovnako dlho a rovnakou rýchlosťou, teda ich vzdialenosť od omrvinky sa musela rovnať – označíme ju x. Omrvinka, budova a holub tvoria pravouhlý trojuholník, pre ktorý platí Pytagorova veta v tvare $8^2 + (10 - x)^2 = x^2$ (všetky vzdialenosti sú v metroch). Roznásobením zátvorky a vykrátením členov pri druhej mocnine upravíme rovnicu na tvar $20x = 164$. Riešenie tejto rovnice je $x = 8{,}2$, teda holub preletel vzdialenosť $8{,}2\,\mathrm{m}$.



Úloha 19 ... hodina chémie

Kvík mal na hodine chémie pred sebou dve kadičky. V prvej bolo 15 ml *tridsaťpercentného roztoku liehu a v druhej* 35 ml *päťdesiatpercentného roztoku rovnakej látky. Koľkopercentný roztok liehu získa, ak zmieša celý obsah oboch kadičiek? Kontrakciu objemu neuvažujte.*

Čistého liehu je $0{,}3 \cdot 15\,\mathrm{ml} = 4{,}5\,\mathrm{ml}$ v prvej kadičke a $0{,}5 \cdot 35\,\mathrm{ml} = 17{,}5\,\mathrm{ml}$ v druhej. Po zmiešaní oboch kadičiek získame $4{,}5\,\mathrm{ml} + 17{,}5\,\mathrm{ml} = 22\,\mathrm{ml}$ liehu v $15\,\mathrm{ml} + 35\,\mathrm{ml} = 50\,\mathrm{ml}$ roztoku. Koncentrácia roztoku je teda $22\,\mathrm{ml}/50\,\mathrm{ml} \cdot 100\,\% = 44\,\%$. Kvík zmiešaním získa 44% roztok liehu.

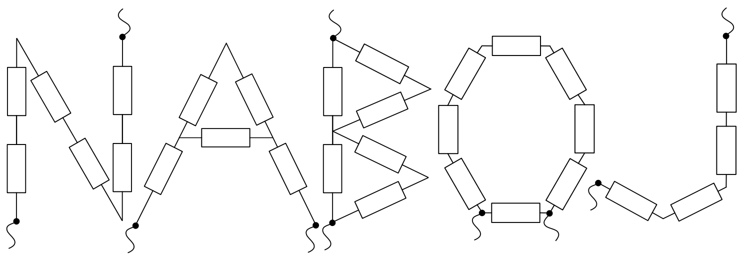
Úloha 20 ... rad čísel

Fero napísal za sebou osem (nie nutne rôznych) čísel, pričom súčet každých troch po sebe idúcich je 42*. Tretie číslo zľava je* 15 *a ôsme zľava* 19*. Aké číslo je úplne vľavo?*

Hľadané číslo si označme x. Z podmienky súčtu troch po sebe idúcich čísel dostaneme, že na druhom mieste musí byť číslo $42 - (15 + x) = 27 - x$. Podobne pre ďalšie čísla dostaneme x (štvrté), $27 - x$ (piate), 15 (šieste). Pre siedme zľava potom máme znovu x, kde konečne zo súčtu poslednej trojice $19 + 15 + x = 42$ vypočítame $x = 8$.

Úloha 21 ... odporný Náboj

Natálka sa na hodine fyziky nudila, a preto si z rezistorov postavila nápis „NABOJ“ (pozri obrázok). Každý rezistor mal odpor $10\,\Omega$*. Potom odmerala odpor medzi zvýraznenými bodmi a uložila písmenka vedľa seba podľa nameranej hodnoty odporu od najmenšej po najväčšiu. Aké „slovo“ tak získala?*



Pri riešení použijeme vzťahy pre výpočet odporu sériového a paralelného zapojenia. Počítajme postupne. V písmene N je sériovo zapojených 6 rezistorov, takže jeho odpor je $R_\mathrm{N} = 10\,\Omega + 10\,\Omega + \cdots + 10\,\Omega = 60\,\Omega$. Uprostred písmena A je paralelné zapojenie dvoch a jedného rezistoru. Odpor tejto trojice R_3 vypočítame zo vzťahu pre paralelné zapojenie.

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{10\,\Omega} + \frac{1}{20\,\Omega} = \frac{3}{20\,\Omega} \quad \Rightarrow \quad R_3 = \frac{20}{3}\,\Omega\,.$$

Celkový odpor písmena A je obyčajné sériové zapojenie dvoch rezistorov a časti s odporom R_3, teda

$$R_\mathrm{A} = 10\,\Omega + \frac{20}{3}\,\Omega + 10\,\Omega = \frac{80}{3}\,\Omega\,.$$

V písmenku B sú sériovo zapojené dve časti s odporom R_3, teda

$$R_\mathrm{B} = \frac{20}{3}\,\Omega + \frac{20}{3}\,\Omega = \frac{40}{3}\,\Omega\,.$$

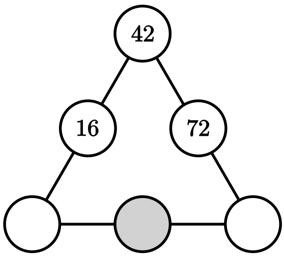
V písmenku O sú dve paralelné vetvy, jedna s odporom $10\,\Omega$ a druhá, dlhšia, s odporom $70\,\Omega$. Platí teda

$$\frac{1}{R_\mathrm{O}} = \frac{1}{10\,\Omega} + \frac{1}{70\,\Omega} = \frac{8}{70\,\Omega} \quad \Rightarrow \quad R_\mathrm{O} = \frac{70}{8}\,\Omega\,.$$

Konečne v písmenku J sú sériovo zapojené 4 rezistory s celkovým odporom $R_\mathrm{J} = 40\,\Omega$. Zoradením odporov podľa veľkosti dostaneme $R_\mathrm{O} < R_\mathrm{B} < R_\mathrm{A} < R_\mathrm{J} < R_\mathrm{N}$. Hľadané „slovo“ je teda OBAJN.

Úloha 22 ... číselný trojuholník

Do trojuholníku na obrázku sú doplňované prirodzené čísla tak, aby súčin troch čísel na každej jeho strane bol rovnaký. Aké najmenšie číslo môže patriť do sivého krúžku?



Čísla v krúžkoch si rozložíme na prvočinitele. Zistíme, že súčin týchto čísel je $2^5 \cdot 3 \cdot 7$ vľavo a $2^4 \cdot 3^3 \cdot 7$ vpravo. Tento nepomer budeme vyrovnávať postupným doplňovaním prvočiniteľov na voľné miesta (ozn. vľavo, v strede a vpravo).

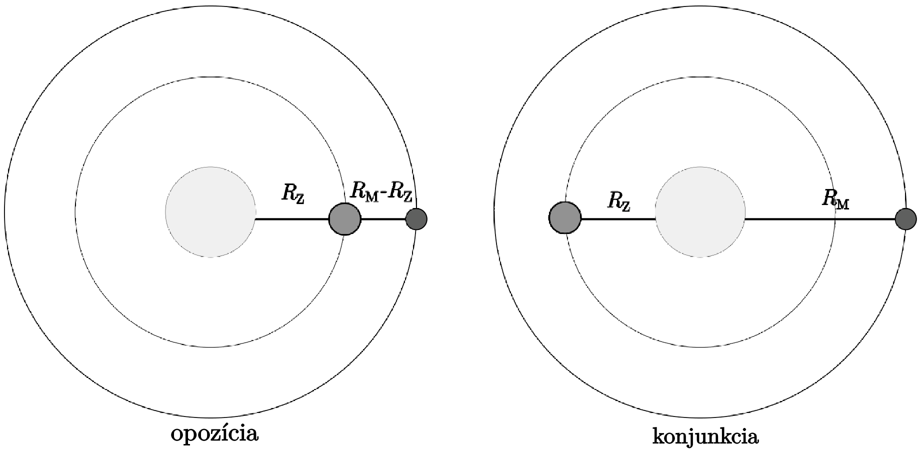
Keďže chceme, aby číslo v sivom krúžku, teda v strede bolo čo najmenšie, začneme dopĺňať čísla na krajné pozície. Dvojok je zatiaľ päť vľavo a štyri vpravo. Ak na voľnú pozíciu vľavo umiestníme ďalšie 4 dvojky a na pozíciu vpravo 5 dvojok, bude na každej strane (ľavej, pravej aj spodnej) 9 Dvojok. Rovnako môžeme postupovať aj s trojkami: na ľavú voľnú pozíciu pridáme tri trojky a na pravú pozíciu pridáme jednu. Na každej strane tak budú štyri trojky. Posledný nevyvážený činiteľ je sedmička, ktorá sa nachádza v rozklade čísla 42, ktoré zdieľa pravá aj ľavá strana a na spodnej strane chýba. Ponúka sa nám možnosť napísať ju do sivého krúžku, ale keďže chceme minimalizovať túto hodnotu, môžeme pridať sedmičku na obe okrajové pozície. Teda na každej strane trojuholníka tak budú dve sedmičky.

Ak teda na ľavú voľnú pozíciu napíšeme číslo $2^4 \cdot 3^3 \cdot 7 = 3\,024$ a na pravú voľnú pozíciu číslo $2^5 \cdot 3 \cdot 7 = 672$, súčiny budú na všetkých stranách rovnaké. Aby sa táto rovnováha nezmenila, do sivého krúžku musíme napísať jednotku, čo je zároveň aj najmenšie prirodzené číslo, takže „lepšie“ riešenie neexistuje.

Úloha 23 ... oneskorenie signálu

Signál, ktorý vysielajú sondy skúmajúce povrch Marsu, prichádza na Zem s istým oneskorením, pretože sa signál šíri konečnou rýchlosťou 300 000 km/s *(rýchlosť svetla vo vákuu). V priebehu roka sa však doba oneskorenia mení v rozmedzí* 250 s *až* 1 250 s*. V akej vzdialenosti od Slnka obieha Mars? Predpokladajte, že obe planéty obiehajú okolo Slnka po kruhových dráhach.*

Ak si nakreslíme obrázok, jednoducho zistíme, že vzájomná vzdialenosť Zeme a Marsu sa v čase mení. Najbližšie k sebe sú planéty v tzv. opozícii (pozri obrázok), kde je ich vzájomná vzdialenosť $r = R_\mathrm{M} - R_\mathrm{Z}$, kde R_M a R_Z sú polomery dráh Marsu a Zeme. Naopak, najväčšia vzdialenosť planét je $R = R_\mathrm{M} + R_\mathrm{Z}$ (konjunkcia).



Keďže signál sa zo sondy šíri vždy rovnakou rýchlosťou, najmenšej dobe oneskorenia t zodpovedá dráha, ktorú musí signál prejsť, rovná r a najväčšiemu oneskoreniu T dráha R:

$$r = ct\,, \qquad R = cT\,,$$

kde $c = 300\,000\,\mathrm{km/s}$ je rýchlosť šírenia signálu. Do prvej rovnice dosaďme za r a vyjadrime si R_Z:

$$R_\mathrm{M} - R_\mathrm{Z} = ct \quad \Rightarrow \quad R_\mathrm{Z} = R_\mathrm{M} - ct\,.$$

Rovnako rozpíšme vzdialenosť R v druhej rovnici a za R_Z dosadíme vyššie odvodený výraz:

$$R_\mathrm{M} + R_\mathrm{Z} = 2R_\mathrm{M} - ct = cT\,.$$

Z tejto rovnice vyjadríme R_{M} a dosadíme známe veličiny c, t a T:

$$R_{\mathrm{M}} = \frac{c\,(t+T)}{2} = 225\,000\,000\,\mathrm{km}\,.$$

Mars obieha vo vzdialenosti 225 miliónov kilometrov od Slnka.

Úloha 24 ... pastelky

Koľkými spôsobmi môže Miška usporiadať šesť pasteliek vo svojom peračníku (červenú, oranžovú, žltú, zelenú, modrú, fialovú) tak, aby žltá a zelená neboli vedľa seba?

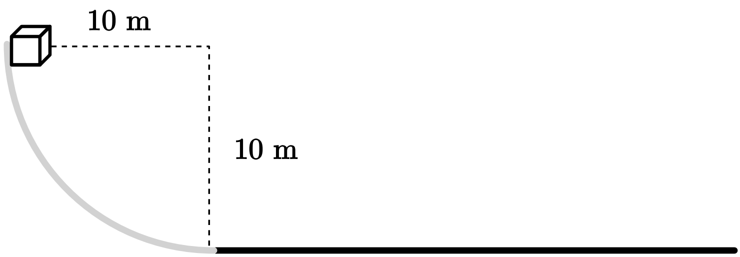
Ak by Miška nemala obmedzenia na žltú a zelenú pastelku, počet všetkých uložení by sme vypočítali ako súčin možností uloženia pasteliek: prvú pastelku môžeme uložiť do peračníka na 6 miest, druhý na zvyšných 5, tretiu na 4 atď. Teda dostaneme $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ možností.

Teraz skúsime zistiť, koľko z týchto možností Miške nevyhovuje, teda koľko usporiadaní ma zelenú a žltú pastelku vedľa seba. Dvojicu pasteliek môžeme umiestniť spolu na 5 pozícií, teda 10 rôznymi spôsobmi (zelenú a žltú môžeme na každej pozícii prehodiť). Zvyšné 4 pastelky, potom môžeme umiestniť $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ spôsobmi na zvyšné voľné pozície. Nevyhovujúcich možností je teda $10 \cdot 24 = 240$ a vyhovujúcich $720 - 240 = 480$.

Miška teda môže svoje pastelky umiestniť do peračníka 480 rôznymi spôsobmi.

Úloha 25 ... megašmykľavka

Fyzici majú niekedy zvláštne nápady. Minule vymysleli megašmykľavku, z ktorej púšťajú kocku s rozmermi $2\,\mathrm{m} \times 2\,\mathrm{m} \times 2\,\mathrm{m}$ *z výšky* $10\,\mathrm{m}$ *vzhľadom na jej stred po štvrťkružnici na vodorovnú dráhu (pozri obrázok). Po namydlenej šmykľavke sa kocka pohybuje bez trenia, ale na vodorovnej dráhe je súčiniteľ šmykového trenia* 0,2. *Akú vzdialenosť prejde kocka po vodorovnej dráhe, kým sa zastaví?*



Úlohu vyriešime pomocou zákona zachovania energie. Počiatočná potenciálna energia kocky sa najprv zmení na kinetickú energiu na začiatku šmykľavky a nakoniec sa táto energia uvoľní vo forme tepla ako práca trecích síl.

Stačí nám teda uvažovať rovnosť celkovej energie na začiatku a na konci pohybu. Potenciálnu energiu vypočítame ako súčin hmotnosti kocky m, tiažového zrýchlenia g a rozdielu výšky ťažiska kocky v pôvodnej polohe na šmykľavke a konečnej polohe na vodorovnej dráhe $h = 9\,\mathrm{m}$. Práca trecích síl je jednoducho súčin trecej sily F_{t} a prejdenej dráhy s:

$$mgh = F_{\mathrm{t}} s = mgfs\,,$$

kde f je súčiniteľ šmykového trenia. Využili sme toho, že pre treciu silu platí $F_t = F_n f$, kde sa normálová sila (sila, ktorou kocka tlačí na podložku) F_n rovná tiažovej sile mg. Po vyjadrení dráhy s z rovnice vyššie a po dosadení dostaneme $s = h/f = 45\,\mathrm{m}$. Kocka se teda zastaví po 45 m šmýkania sa po vodorovnej dráhe.

Úloha 26 ... uhlopriečky

Zistite, ktorý pravidelný mnohouholník má 54 uhlopriečok.

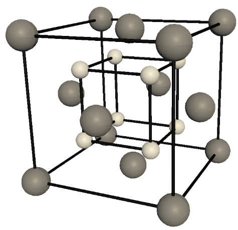
Postupujme od najjednoduchších útvarov. Po nakreslení zistíme, že trojuholník nemá uhlopriečku, štvorec má dve, päťuholník päť, šesťuholník deväť... Takto môžeme pokračovať ďalej, môžeme si však všimnúť, že rozdiel v počte uhlopriečok vzrastie medzi dvomi nasledujúcimi mnohouholníkmi vždy o jedna.

Bez ďalšieho kreslenia tak môžeme určiť, že sedemuholník má 14 uhlopriečok, osemuholník 20, deväťuholník 27, desaťuholník 35, jedenásťuholník 44 a dvanásťuholník 54 uhlopriečok.

Úloha 27 ... trblietavá

Veve nedávno našla kryštál fluoridu vápenatého (CaF_2) s objemom $1\,\mathrm{cm}^3$. Vie, že kryštál má kubickú štruktúru – molekuly CaF_2 sú usporiadané do kockovej siete (pozri obrázok) tak, že atómy vápnika () sa nachádzajú v rohoch kocky a v stredoch stien. Atómy fluóru () tvoria kocku s polovičnou dĺžkou hrany umiestnenú uprostred tej veľkej.

Dĺžka hrany vápníkovej kocky je $5 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$. Veve z tabuliek zistila, že jeden atóm vápnika má hmotnosť $65 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ a fluóru $30 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$. Akú hmotnosť má jej kryštál?



Z tvaru kryštálovej štruktúry najprv zistíme, koľko atómov „patrí“ jednej kryštálovej bunke. Každý z ôsmich atómov vápnika v rohoch kocky, prispieva osminou [1] a každý zo šiestich vápnikov v stredoch strán prispieva polovicou. Dohromady teda na jednu bunku pripadá N_{Ca} atómov Ca:

$$N_{\mathrm{Ca}} = 8 \cdot \frac{1}{8} + 6 \cdot \frac{1}{2} = 4\,.$$

Navyše, keďže sa všetky atómy fluóru nachádzajú vnútri bunky v rohoch menšej kocky, všetkých $N_{\mathrm{F}} = 8$ pripadá tejto bunke.

Hmotnosť jednej bunky je teda súčtom hmotností jednotlivých atómov s hmotnosťami $m_{\mathrm{Ca}} = 65 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ a $m_{\mathrm{F}} = 30 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$:

$$m = m_{\mathrm{Ca}} N_{\mathrm{Ca}} + m_{\mathrm{F}} N_{\mathrm{F}} = 500 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}\,.$$

[1] Toto tvrdenie je analogické s tvrdením, že každý z vápnikov v rohoch kocky je súčasťou ďalších siedmich susedných kociek.

Objem tejto kocky je $v = \left(5 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}\right)^3 = 125 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{m}^3$. Pomer m/v nám dá hustotu $\mathrm{CaF_2}$ ϱ:

$$\varrho = \frac{m}{v} = \frac{500 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}}{125 \cdot 10^{-30}\,\mathrm{m}^3} = 4 \cdot 10^3\,\mathrm{kg/m}^3 = 4\,\mathrm{g/cm}^3\,.$$

Teraz už jednoducho zistíme, že hmotnosť kryštálu s jednotkovým objemom, ktorý Veve našla, je $4\,\mathrm{g}$.

Úloha 28 ... zradné sily

Homogénna doska dlhá $5\,\mathrm{m}$ *s hmotnosťou* $20\,\mathrm{kg}$ *je podopretá dvoma podperami, a to na ľavom konci, a vo vzdialenosti* $3\,\mathrm{m}$ *od ľavého konca. Na pravý koniec dosky položíme závažie s hmotnosťou* $5\,\mathrm{kg}$*. Akou veľkou silou pôsobí doska na ľavú podperu?*

Keďže doska nie je v pohybe, je výslednica všetkých síl na ňu pôsobiacich rovná nule. Teda tiažová sila (pôsobiaca v ťažisku dosky) a sila, ktorou závažie tlačí na dosku smerom kolmo dole sa vyrovnávajú silám, ktoré pôsobia na podpery smerom kolmo hore. Rovnosť týchto síl nám ale neodhalí, akými silami pôsobia jednotlivé podpery.

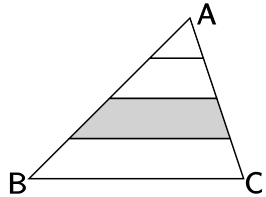
Keďže sa doska ani neotáča, je aj výslednica momentov síl na ňu pôsobiacich *vzhľadom k ľubovoľnej osi otáčania* rovná nule. Ak umiestnime os otáčania do vrcholu pravej podpery, pomôžeme si tým, že vzhľadom na túto os otáčania je moment sily pravej podpery nulový.[2]

Moment sily, ktorou pôsobí závažie má veľkosť $M_\mathrm{z} = 5\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s}^2 \cdot 2\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{N{\cdot}m}$. Moment tiažovej sily dosky má opačný smer a veľkosť $M_\mathrm{d} = 20\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s}^2 \cdot 0{,}5\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{N{\cdot}m}$, pretože pôsobisko tiažovej sily sa nachádza v ťažisku dosky.

Na prvý pohľad vidíme, že $M_\mathrm{d} = M_\mathrm{z}$. Inými slovami, momenty sa akurát vyrušia a pre ľavú podperu neostáva nič iné, len nepôsobiť na dosku iným ako nulovým momentom. Pretože vzdialenosť ľavej podpery od osi otáčania je nenulová, nule sa musí rovnať pôsobiaca sila. Ľavá podpera teda nepôsobí na dosku žiadnou (nulovou) silou.

Úloha 29 ... pyramída

Trojuholník ABC *je rozdelený tromi úsečkami na štyri časti, pričom priamky sú rovnobežné a navzájom od seba, a od strany* BC *a vrchola* A *rovnomerne rozmiestnené. Jaro vie, že obsah druhej časti zdola (sivou na obrázku) je* $35\,\mathrm{cm}^2$*, a tak si hneď spočítal obsah celého trojuholníka. Koľko mu to vyšlo?*



Keďže úsečky, ktoré delia trojuholník ABC, sú rovnobežné s BC, vzniknuté menšie trojuholníky so spoločným bodom A majú rovnaké vnútorné uhly ako ABC a teda sú si podobné.

[2] Pôsobisko sily sa nachádza v ose otáčania, teda rameno tejto sily je nulové.

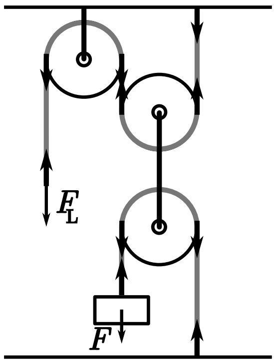
Z rovnomerne rozmiestnených deliacich úsečiek vyplýva, že výšky týchto trojuholníkov prechádzajúcich bodom A sú v pomere 1 : 2 : 3 : 4. Z podobnosti potom vyplýva, že v rovnakom pomere musia byť aj dĺžky deliacich úsečiek a strana BC. Keďže deliace úsečky zodpovedajú základňam trojuholníka a obsah trojuholníkov závisí na súčine dĺžok základien a výšok, obsahy menších trojuholníkov a trojuholníku ABC musia byť v pomere $1^2 : 2^2 : 3^2 : 4^2 = 1 : 4 : 9 : 16$.

Ak označíme plochu najmenšieho trojuholníka ako jeden dielik, správny pomer plôch ostatných trojuholníkov dostaneme vtedy, keď plochy jednotlivých pásov budú mať postupne 1, 3, 5 a 7 dielikov. Zo známej plochy sivého dielika potom určíme, že $1\,\text{dielik} = 35\,\text{cm}^2/5 = 7\,\text{cm}^2$. Plocha trojuholníka ABC zodpovedá 16 dielikom, teda ploche $16 \cdot 7\,\text{cm}^2 = 112\,\text{cm}^2$.

Úloha 30 ... kladkostroj

Laco si v supermarkete kúpil najnovší model kladkostroja (pozri obrázok). Akou najmenšou silou musí Laco držať voľný koniec lana, aby sa závažie s hmotnosťou $2\,\text{kg}$ *nepohybovalo? Hmotnosť kladiek zanedbajte.*

Závažie pôsobí na spodné lano tiažovou silou $F = 2\,\text{kg} \cdot 10\,\text{m/s}^2 = 20\,\text{N}$. Pôsobenie tejto sily si môžeme predstavovať tak, akoby sa táto sila snažila lano „natiahnuť“. Zo zákona akcie a reakcie potom lano pôsobí na závažie rovnako veľkou silou, ale opačného smeru, teda akoby sa lano chcelo „zmrštiť“. Keďže lano prenáša ťahovú silu pozdĺž celej jeho dĺžky, „zmršťujúca“ sila pôsobí na oboch stranách spodnej kladky a na bod uchytenia lana (pozri obrázok). Spodná kladka je teda ťahaná smerom dole silou $2F$.



Laco pôsobí na horné lano inou ťahovou silou F_L, ale inak je postup rovnaký. Ak si nakreslíme do obrázku sily, ktorými pôsobí lano na vrchné kladky, zistíme, že pravá horná kladka je ťahaná silou $2F_\text{L}$ smerom hore. Aby sa sústava kladiek a závaží nepohybovala, musia mať sily F a F_L rovnakú veľkosť, teda

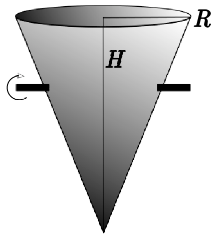
$$2F_\text{L} = 2F \quad \Rightarrow \quad F_\text{L} = F = 20\,\text{N}\,.$$

Laco musí voľný koniec lana držať silou $20\,\text{N}$.

Úloha 31 ... vodný kornútok

Obľúbenou atrakciou na kúpalisku je tzv. vodný kornútok. Je to ľahká nádoba v tvare dutého kužeľa (polomer R*, výška* H*), ktorý je v 2/3 výšky upevnený na otočnú os (pozri obrázok). Do* *kornútku potom zhora priteká voda, ktorá plní kornútok až do momentu, kým sa zo stabilnej rovnováhy stane labilná, kornútok prevráti a všetku vodu vyleje.*

Zistite, aká časť celkového objemu kornútka je naplnená vodou, tesne pred jeho prevrátením. Hodiť sa vám bude údaj, že ťažisko kužeľa sa nachádza na jeho osi v 1/4 výšky nad základňou.



Vodný kornútok sa prevrhne vtedy, keď bude jeho ťažisko tesne nad osou otáčania (dostane sa tak do *labilnej polohy*[3]). Musíme teda zistiť, koľko musí byť v kornútku vody, aby bolo jeho ťažisko v rovnakej výške ako os otáčania.

Ťažisko kužeľa sa nachádza v jednej štvrtine výšky, ak výšku meriame od základne, teda v troch štvrtinách od jeho vrcholu. Ak si výšku vody označíme h_v, musí platiť rovnosť

$$\frac{2}{3}H = \frac{3}{4}h_\mathrm{v} \quad \Rightarrow \quad h_\mathrm{v} = \frac{8}{9}H\,.$$

Výška vody bude v momente tesne pred prevrátením dosahovať 8/9 výšky kornútku. Polomer základne tohto kužeľa bude tiež rovný 8/9 polomeru kornútku. Objem vody tak bude

$$V_\mathrm{v} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{8}{9}R\right)^2 \cdot \frac{8}{9}H = \left(\frac{8}{9}\right)^3 \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{512}{729}V\,.$$

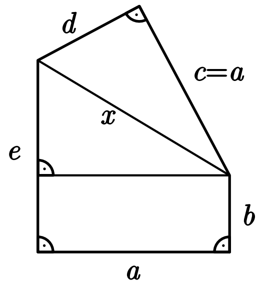
Tesne pred prevrátením bude kornútok naplnený do $512/729 \doteq 0{,}7$ násobku svojho objemu.

Úloha 32 ... nepravidelný päťuholník

Justína dostala od Čajky hádanku: aký je obsah nakresleného päťuholníka? Zadané sú jeho štyri strany a, b, c a e, pričom a = c, a tri pravé uhly (pozri obrázok).

Útvar si rozdelíme na obdĺžnik a dva trojuholníky, ktorých obsahy postupne spočítame (pozri obrázok). Obsah obdĺžnika je $S_1 = ab$. Obsah pravouhlého trojuholníka nad obdĺžnikom je $S_2 = a(e-b)/2$.

[3]Situácia tak bude rovnaká, ako keby sme mali hojdačku balansujúcu v najvyššej možnej polohe. Takejto hojdačke stačí len malý impulz, aby z tejto polohy spadla.



Pre výpočet obsahu posledného trojuholníka potrebujeme zistiť dĺžku strany d, k čomu sa dostaneme pomocou Pythagorovej vety (preponu značíme x):

$$a^2 + (e-b)^2 = x^2\,,$$
$$d^2 + c^2 = x^2\,.$$

Porovnaním ľavých strán rovníc dostaneme

$$d = \sqrt{a^2 + (e-b)^2 - c^2} = \sqrt{a^2 + (e-b)^2 - a^2} = e - b\,.$$

Obsah trojuholníka teda vychádza $S_3 = a(e-b)/2$. Celkový obsah získame súčtom obsahov čiastočných útvarov:

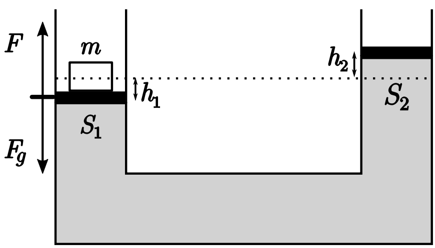
$$S = ab + \frac{a\,(e-b)}{2} + \frac{a\,(e-b)}{2} = ab + a\,(e-b) = ab + ae - ab = ae\,.$$

Obsah päťuholníka je ae.

Úloha 33 ... zdvihák

Friďo potreboval nový zdvihák. Helboj mu daroval hydraulický s piestami so zanedbateľnou hmotnosťou a plochami $3\,\mathrm{dm}^2$ *a* $2\,\mathrm{dm}^2$*. Friďo ho hneď vyskúšal a na prvý piest položil* $6\,\mathrm{kg}$ *závažie. O koľko centimetrov vyššie bude po ustálení druhý piest oproti jeho počiatočnej polohe? Hustota oleja v hydraulickom pieste je* $800\,\mathrm{kg/m^3}$.

Hydraulický zdvihák funguje ako sústava dvoch spojených nádob. Z rovnosti hydrostatických tlakov rovno vyplýva, že na začiatku, teda pred tým ako Friďo zaťažil jeden z piestov, bude hladina oleja (a teda aj piesty) v oboch častiach zdviháku v rovnakej výške.



Potom Friďo položil na prvý piest závažie. To bude na piest pôsobiť tiažovou silou smerom nadol $F_g = mg$, kde $m = 6\,\mathrm{kg}$ je hmotnosť závažia a g je tiažové zrýchlenie. Dôsledkom tejto sily piest poklesne o h_1 a druhý piest stúpne o h_2. Hladina oleja v druhom pieste tak bude o $h_1 + h_2$ vyššie ako v prvom pieste. Na prvý piest bude teda okrem tiažovej sily pôsobiť v opačnom smere dodatočná sila od hydrostatického tlaku $F = S_1 \varrho g\,(h_1 + h_2)$, kde $S_1 = 3\,\mathrm{dm}^2$ je plocha prvého piestu a $\varrho = 800\,\mathrm{kg/m}^3$ je hustota oleja.

Po ustálení piestu musia byť tieto dve sily v rovnováhe, teda $F_g = F$. Kým si túto rovnosť rozpíšeme, musíme si uvedomiť, že objem oleja v piestoch ostáva konštantný (olej ako každá iná kvapalina nie je stlačiteľný) Pokles prvého piestu „vytlačí“ objem oleja $S_1 h_1$. Rovnaký objem oleja potom musí zodpovedať aj stúpnutiu druhého piesta, takže bude platiť

$$S_1 h_1 = S_2 h_2\,,$$

kde $S_2 = 2\,\mathrm{dm}^2$ je plocha druhého piestu.

S týmto poznatkom môžeme rozpísať rovnosť síl:

$$mg = S_1 \varrho g\,(h_1 + h_2) = \varrho g\,(S_1 h_1 + S_1 h_2)\ .$$

Za člen $S_1 h_1$ dosadíme z rovnice pre konštantný objem oleja, vykrátime g a dostaneme výsledný vzťah pre h_2

$$m = \varrho\,(S_2 h_2 + S_1 h_2) \quad \Rightarrow \quad h_2 = \frac{m}{\varrho\,(S_1 + S_2)} = 15\,\mathrm{cm}\,.$$

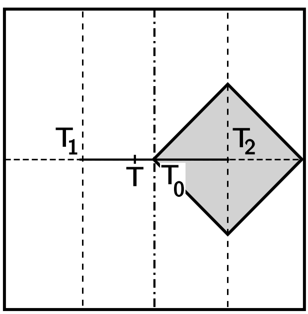
Druhý piest zdviháku stúpol o $15\,\mathrm{cm}$ oproti jeho počiatočnej polohe.

Úloha 34 ... deravý štvorec

Monika si vystrihla štvorec so stranou dlhou 14 cm. *Prišiel jej však príliš nudný, tak z neho vyrezala menší štvorec (pozri obrázok). O koľko sa tým posunulo ťažisko výsledného útvaru?*

Úloha sa podstatne zjednoduší, keď si všimneme niekoľko symetrií. Pôvodný štvorec je symetrický podľa oboch osí (úsečky spájajúce protiľahlé stredy strán). Jeho ťažisko T_0 sa teda musí nachádzať v ich priesečníku.

Ďalej, ak rozdelíme novovzniknutý útvar pozdĺž zvislej osi, vľavo dostaneme obdĺžnik s rozmermi $\frac{a}{2}$ a a (kde $a = 14\,\mathrm{cm}$ je dĺžka strany štvorca). Tento obdĺžnik je opäť symetrický podľa oboch jeho osí, takže jeho ťažisko T_1 sa bude nachádzať v ich priesečníku, ktorý je od bodu T_0 vzdialený o $a/4$.



Rovnakú symetriu vykazuje aj útvar vpravo, takže aj jeho ťažisko T_2 sa bude nachádzať opäť vo vzdialenosti $a/4$ od pôvodného ťažiska T_0. Vzdialenosť bodov T_1 a T_2 je teda $2 \cdot a/4 = a/2 = 7\,\mathrm{cm}$.

Na to, aby sme mohli tieto čiastočné ťažiská skombinovať do jedného, potrebujeme poznať hmotnosť (resp. obsah) jednotlivých častí. Obdĺžnik má obsah $S_1 = a \cdot a/2 = a^2/2$. Obsah útvaru napravo zistíme ľahko – stačí si uvedomiť, že strana vystrihnutého štvorca je rovná štvrtine uhlopriečky. Z Pytagorovej vety jednoducho zistíme, že uhlopriečka je $\sqrt{2}$krát dlhšia ako strana štvorca. Dĺžka strany vystrihnutého štvorca je teda $\sqrt{2} \cdot a/4$ a jeho obsah

$$S' = \left(\frac{\sqrt{2} \cdot a}{4}\right)^2 = \frac{2a^2}{16} = \frac{a^2}{8}\,.$$

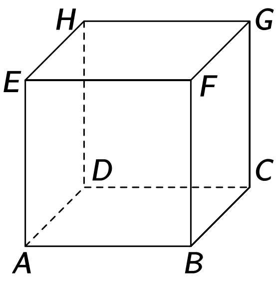
Obsah útvaru napravo je teda

$$S_2 = S_1 - S' = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{8} = \frac{3a^2}{8}\,.$$

Pomer veľkostí plôch $S_1 : S_2$ je $4 : 3$. ťažisko výsledného útvaru T bude teda deliť úsečku $\mathsf{T}_1\mathsf{T}_2$ v obrátenom pomere $3 : 4$.[4] Keďže dĺžka tejto úsečky je $7\,\mathrm{cm}$, bod T bude ležať vo vzdialenosti $3\,\mathrm{cm}$ od bodu T_1 a $4\,\mathrm{cm}$ od bodu T_2, a teda vo vzdialenosti $0{,}5\,\mathrm{cm}$ od pôvodného ťažiska.

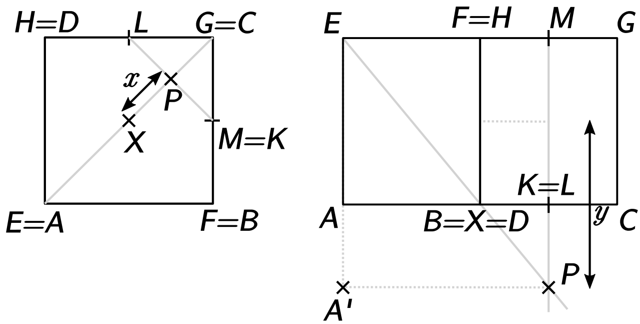
Úloha 35 ... kocka

Máme kocku ABCDEFGH*, pričom bod* X *je stred steny* ABCD*, bod* K *je stred strany* BC*, bod* L *je stred strany* CD *a bod* M *je stred strany* FG*. Ďalej označme priesečník priamky* EX *a roviny* KLM *ako bod* P*. Aká je vzdialenosť bodu* P *od ťažiska kocky, ak je dĺžka jej strany a?*



Ak sa na problém pozrieme zhora (pozri obrázok), tak sa pohľad na problém zjednoduší. Zhora vidíme iba posunutia vo vodorovnom smere. Hneď si môžeme všimnúť, že vodorovná vzdialenosť priesečníku EX a roviny KLM, teda bodu P, od stredu kocky je rovná jednej štvrtine uhlopriečky. Dĺžka uhlopriečky je z Pytagorovej vety $u = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$, takže jej štvrtina je $x = u/4 = a\sqrt{2}/4$.

[4] Ťažisko je vždy bližšie k ťažšiemu z útvarov.



Ak sa na situáciu pozrieme zboku, môžeme si všimnúť, že trojuholníky vymedzené stranami AE, AB, priamkou EX a bodom P majú všetky uhly zhodné, takže sú si podobné a pomer ich strán je rovný $1:2$. Odtiaľ určíme, že zvislá vzdialenosť tohto bodu od stredu kocky (jej ťažiska) je $y = a/2 + a/2 = a$.

Vzdialenosť bodu P od stredu kocky určíme pomocou Pytagorovej vety, pretože už poznáme jeho vodorovnú (x) aj zvislú (y) vzdialenosť:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2 + a^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{16} + \frac{16a^2}{16}} = \sqrt{\frac{18a^2}{16}} = \frac{3a\sqrt{2}}{4}.$$

Bod P je od ťažiska kocky vzdialený o $3a\sqrt{2}/4$.

Úloha 36 ... kde je nula

Bubu videl v električke napísaný mnohočlen $x^5 - 7x^4 + 3x^3 + 4x^2 - 16x - 17$. *Kamarátka Bu mu prezradila, že tento mnohočlen má práve jeden koreň (to je x, pre ktoré platí, že hodnota mnohočlenu je rovná 0) na intervale* $\langle 0; 10\rangle$. *Zistite hodnotu tohto koreňa s presnosťou* $\pm 0{,}5$.

Označme si hľadaný koreň ako x_0. Mnohočlen označíme ako $\mathcal{M}(x)$, a teda platí $\mathcal{M}(x_0) = 0$. Ďalej si zaveďme čísla x_- a x_+ ako čísla, ktoré sú len o niečo menšie a väčšie ako x_0.

Keďže $\mathcal{M}(x)$ prochádza v x_0 nulou, hodnoty $\mathcal{M}(x_-)$ a $\mathcal{M}(x_+)$ sa *musia* líšiť v znamienku, inak by medzi týmito hodnotami mnohočlen nemohol byť nulový.

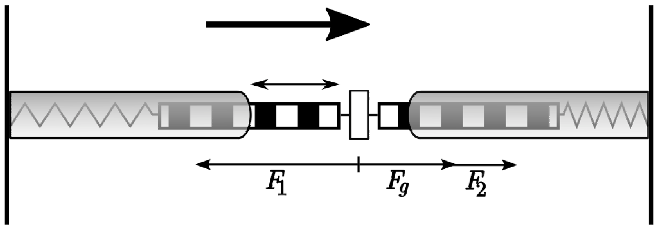
Skontrolujeme, či toto pravidlo platí pre okraje zadaného intervalu. Pre $x = 0$ nemusíme počítať a jednoducho zistíme, že $\mathcal{M}(0) = -17 < 0$. Pre $x = 10$ tiež nemusíme nič počítať. Stačí si uvedomiť, že prvý člen bude $10^5 = 100\,000$, čo je číslo prevyšujúce všetky ostatné členy (druhý člen bude „len“ $-7 \cdot 10^4 = -70\,000$). Rozhodne teda platí $\mathcal{M}(10) > 0$.

Pre stred intervalu, tzn. pre $x = 5$, sú prvé dva členy $5^5 - 7 \cdot 5^4 = 5^4 \cdot (5-7) = -2 \cdot 5^4 < 0$, ostatné členy sú opäť zanedbateľne malé, takže $\mathcal{M}(5) < 0$. Z podmienky pre opačnosť znamienok tak môžeme usúdiť, že hľadaný koreň sa bude nachádzať v intervale $(5; 10)$. Rovnako rýchlo, s použitím prvých dvoch členov môžeme spočítať, že $\mathcal{M}(6) < 0$, a s použitím aj tretieho členu $\mathcal{M}(7) > 0$. Ak uhádneme približnú hodnotu mnohočlenu ako $x_0 \doteq 6{,}5$, v rámci tolerancie hľadanú hodnotu určíme s absolútnou istotou.

Úloha 37 ... silomery

Kamča našla v školskom labáku dva silomery. Oba mali v nenatiahnutom stave dĺžku 15 cm, *ale prvý mal dieliky zodpovedajúce sile* 1 N *dlhé* 1 cm, *zatiaľ čo druhý mal dieliky dlhé* 3 cm. *Katka potom medzi silomery pripevnila závažie s hmotnosťou* 700 g *a hrúbkou* 5 cm *a napla ho medzi dve vodorovné dosky vzdialené* 50 cm *(pozri obrázok). Akú silu ukazoval prvý silomer, zavesený zhora?* Pozor, obrázok je otočený naležato! Šípka vyznačuje smer tiažovej sily.

Na zavesené závažie pôsobia tri sily: tiažová sila $F_g = mg$ (m je hmotnosť závažia a g tiažové zrýchlenie) a sily od silomerov F_1 a F_2 (pozri obrázok). Z rovnosti týchto troch síl platí $F_1 = F_2 + F_g$.



Sily F_1 a F_2 sú závislé na tom, ako sú natiahnuté pružiny v silomeroch. Aby silomery mohli ukazovať pôsobiacu silu na svojich stupniciach, musí platiť, že ich natiahnutie je priamo úmerné pôsobiacej sile. Inak povedané, musí platiť $F_1 = k_1 x_1$, kde x_1 je natiahnutie silomeru a $k_1 = 1\,\mathrm{N/cm}$ je konštanta zodpovedajúca stupnici silomeru. Rovnako platí, že $F_2 = k_2 x_2$, kde konštanta

$$k_2 = \frac{1\,\mathrm{N}}{3\,\mathrm{cm}} = \frac{1}{3}\,\mathrm{N/cm}\,.$$

Aby silomery mohli byť napnuté medzi doskami (ozn. vzdialenosť dosiek $D = 50\,\mathrm{cm}$), musia sa medzi nich vojsť oba silomery aj závažie. Teda musí platiť $D = 2d_0 + h + x_1 + x_2$, kde $d_0 = 15\,\mathrm{cm}$ je dĺžka nenapnutých silomerov a $h = 5\,\mathrm{cm}$ je šírka závažia. Rovnosť upravíme tak, aby na pravej strane ostali len neznáme členy. Dostaneme tak

$$x_1 + x_2 = D - 2d_0 - h = 15\,\mathrm{cm} = x\,.$$

Z poslednej rovnice teda platí $x_2 = x - x_1$.

Napíšeme si rovnosť síl zo začiatku riešenia s novo nadobudnutými poznatkami:

$$F_1 = F_2 + F_g\,,$$
$$k_1 x_1 = k_2 (x - x_1) + mg\,.$$

Posledná rovnica obsahuje len známe veličiny a neznámu x_1. Úpravou rovnice tak prídeme k hľadanému riešeniu

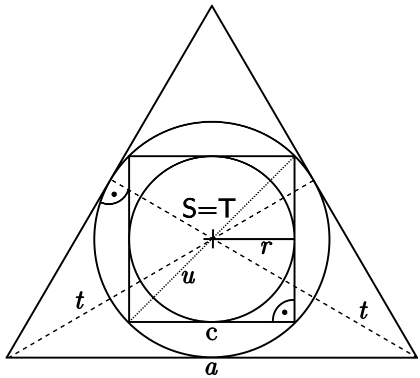
$$x_1 = \frac{k_2 x + mg}{k_1 + k_2} = 9\,\mathrm{cm}\,.$$

Silomer natiahnutý o $x_1 = 9\,\mathrm{cm}$ ukazoval silu 9 N.

Úloha 38 ... vpísané útvary

Filip hľadal námety na nové logo svojej firmy, až sa mu podaril nakresliť rovnostranný trojuholník, do ktorého bola vpísaná kružnica, do ktorej bol vpísaný štvorec, do ktorého bola vpísaná ďalšia kružnica. Aký polomer mala táto kružnica, ak strana trojuholníka mala dĺžku a?

Vpísaná kružnica má stred S v priesečníku osí uhlov, ktoré v rovnostrannom trojuholníku splývajú s výškami. Stred vpísanej kružnice je teda zároveň aj ťažisko trojuholníka T, a teda polomer vpísanej kružnice je rovný tretine dĺžky ťažnice.



Túto dĺžku t zistíme jednoducho z Pythagorovej vety, pretože ľubovoľná výška nám tvorí pravouhlý trojuholník s preponou a a ďalšou odvesnou $a/2$. Teda platí

$$a^2 = t^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}\,.$$

Polomer vpísanej kružnice je teda $a\sqrt{3}/6$ a priemer je $a\sqrt{3}/3$. Práve priemeru kružnice sa bude rovnať uhlopriečka u vpísaného štvorca. Táto uhlopriečka znovu tvorí pravouhlý trojuholník, s dvomi stranami štvorca (s dĺžkou c), pre ktorý platí

$$u^2 = c^2 + c^2 \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{\frac{u^2}{2}} = \sqrt{\frac{3a^2}{9 \cdot 2}} = \frac{a}{3} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}}\,.$$

Na záver, priemer vnútornej vpísanej kružnice je rovný strane c, takže hľadaný polomer je

$$r = \frac{c}{2} = \frac{a}{6} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = a\frac{\sqrt{6}}{12} \doteq 0{,}2a\,.$$

Kružnica vo Filipovom logu má polomer asi $0{,}2a$.

Úloha 39 ... ciferný súčin

Paulínku by zaujímalo, koľko existuje šesťciferných čísel, ktorých ciferný súčin (súčin všetkých cifier, z ktorých sa číslo skladá) je rovný 750. Koľko ich je?

Prvočíselný rozklad čísla 750 je $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$. Naše šesťciferné číslo má teda cifry z množiny $\{1; 2; 3; 5; 5; 5\}$ alebo $\{1; 1; 6; 5; 5; 5\}$ a my len musíme určiť počet všetkých možností, ako tieto cifry uložiť na jednotlivé pozície.

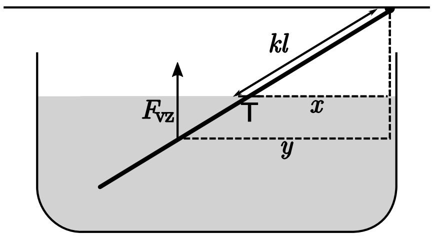
Prvé tri cifry z prvej množiny môžeme uložiť na pozície vo výslednom čísle $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ spôsobmi. Ostatné pozície potom musíme obsadiť päťkami, teda len jedným spôsobom. Rovnako môžeme postupovať aj pri druhej množine. Najprv si v nej ale „ofarbíme" jednotky rôznymi farbami a dostaneme tak 120 rôznych čísel. V nich však vždy nájdeme dvojice, ktoré majú jednotky na rovnakých miestach, ale s prehodenými farbami. Po myslenom „odfarbení" jednotiek nám zostane len 60 rôznych čísel. Dostaneme tak, že počet možných šesťciferných čísel je $120 + 60 = 180$.

Úloha 40 ... mokrá tyč

Jaro našiel doma na pôde tenkú homogénnu tyč dlhú 1 m *vyrobenú z dreva s hustotou* 750 kg/m^3. *Na jednom konci tyč pripevnil v otočnom kĺbe ku stropu, pod ňu dal nádobu s vodou (pozri obrázok) a počkal, kým nastala rovnováha. Aký dlhý kus tyče je pod vodou?*

Počítanie rovnováhy pôsobiacich síl nám na prvý pohľad nepomôže k úspešnému riešeniu, lebo okrem vztlakovej a tiažovej sily na tyč pôsobí nejakou silou aj kĺb. Veľkosť a ani smer tejto sily nepoznáme.

Keďže sa tyč neotáča, môžeme analyzovať momenty síl. Ak sa tyč neotáča (čo je náš prípad ustálenej rovnováhy), celkový moment síl pôsobiacich na tyč musí byť nulový pre ľubovoľnú os otáčania. Poučení z predchádzajúcich úloh už vieme, že výhodné bude zvoliť si os otáčania v kĺbe. Tým zabezpečíme, že moment neznámej sily pôsobiacej v kĺbe má nulovú veľkosť.



Moment tiažovej sily bude rovný $M_\mathrm{t} = mgx$, kde m je hmotnosť tyče, g tiažové zrýchlenie a x vodorovná vzdialenosť ťažiska, ktoré sa nachádza v strede tyče a osi otáčania (pozri obrázok). Hmotnosť tyče môžeme tiež vyjadriť pomocou hustoty a objemu tyče ako $m = \varrho_\mathrm{t} S l$, kde $\varrho_\mathrm{t} = 750\,\mathrm{kg/m^3}$ je hustota tyče, S a l sú jej prierez a dĺžka.

Ďalej označíme písmenom k tú časť dĺžky tyče, ktorá je nad hladinou vody. Teda pod hladinou je $(1-k)\,l$ metrov tyče a na túto časť tyče pôsobí v jej strede vztlaková sila $\varrho V' g$, kde ϱ je hustota vody a $V' = (1-k)\,Sl$ je objem ponorenej časti tyče. Moment tejto sily je teda $M_\mathrm{v} = \varrho\,(1-k)\,Sly$, kde y je opäť vodorovná vzdialenosť pôsobiska vztlakovej sily a osi otáčania.

Ak si uvedomíme, že trojuholníky naznačené čiarkovanými čiarami a tyčou sú si podobné,[5] pomer ich odvesien y/x musí byť rovnaký ako pomer ich prepôn, teda platí

$$\frac{y}{x} = \frac{kl + \frac{1}{2}(1-k)\,l}{\frac{1}{2}kl} = 1 + k\,.$$

Teraz nám nič nebráni napísať si rovnosť momentov M_t a M_v, keďže iné momenty síl na tyč nepôsobia:

$$M_\mathrm{t} = M_\mathrm{v} \quad \Rightarrow \quad \varrho_\mathrm{t} Slgx = \varrho\,(1-k)\,Slgy\,.$$

V rovnici sa vykráti člen Slg. Ak „prehodíme“ členy ϱ a x na opačné strany rovnice, členy sa presunú do menovateľa a dostávame

$$\frac{\varrho_\mathrm{t}}{\varrho} = (1-k)\cdot\frac{y}{x}\,.$$

Do rovnice dosadíme už odvodenú rovnosť $y/x = 1 + k$ a dostávame

$$\frac{\varrho_\mathrm{t}}{\varrho} = (1-k)\cdot(1+k) = 1 - k^2\,,$$

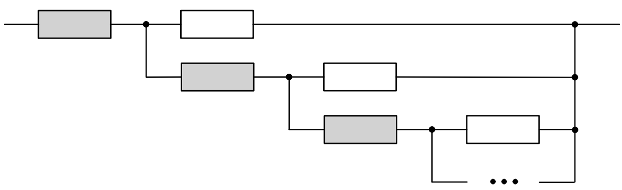
kde sme využili známy vzorec $(1-A)\cdot(1+A) = 1 - A^2$. V rovnici osamostatníme k^2 a celú rovnicu odmocníme:

$$k^2 = 1 - \frac{\varrho_\mathrm{t}}{\varrho} \quad \Rightarrow \quad k = \sqrt{1 - \frac{\varrho_\mathrm{t}}{\varrho}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\,.$$

Výsledok nám hovorí, že polovica tyče, teda 50 cm, sa nachádza nad vodou a rovnaká časť tyče pod vodou. Najväčšiemu úskaliu – kvadratickej rovnici a jej riešeniu – sme sa vyhli vhodným označením neznámej ponorenej časti.

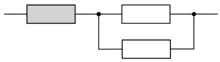
Úloha 41 ... nekonečné zapojenie

To najlepšie, čo sa dá spraviť s nekonečnou zásobou rezistorov s odpormi $1\,\Omega$ (biely rezistor) a $2\,\Omega$ (sivý rezistor) urobiť, je zapojiť ich podľa obrázku do nekonečného obvodu. Vypočítajte celkový odpor tohto zapojenia! Výsledok udajte s presnosťou na dve desatinné miesta.



Uvažovaná sieť rezistorov je nekonečná, preto ak k tejto sieti priložíme ešte jeden „kúsok“, bude zapojených stále nekonečne veľa rezistorov a celkový odpor zapojenia sa teda nemôže zmeniť. To nám umožňuje si celé zapojenie prekresliť do jednoduchého náhradného zapojenia, ktorého odpor R_c musí byť rovný celkovému odporu pôvodnej nekonečnej siete (pozri obrázok).

[5] Trojuholníky majú zjavne všetky uhly zhodné a musia si byť podobné.



$\mathbf{R_C}$

Stačí si spomenúť na pravidlá pre počítanie sériovo a paralelne zapojených rezistorov a pri označení menšieho z rezistorov ($1\,\Omega$) R a väčšieho $2R$ napíšeme rovnosť:

$$R_c = 2R + \left(\frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_c}} \right) = 2R + \left(\frac{R_c R}{R_c + R} \right) .$$

Teraz rovnicu vynásobme členom $(R_c + R)$. Dostávame

$$R_c^2 + R_c R = 2R^2 + 2R_c R + R_c R ,$$

čo vieme upraviť na tvar

$$0 = R_c^2 - 2R_c R - 2R^2 = (R_c - R)^2 - 3R^2 .$$

Dostávame tak rovnosť $3R^2 = (R_c - R)^2$, ktorú môžeme odmocniť (fyzikálny význam majú len kladné členy), a teda dostaneme výsledný odpor ako

$$R_c - R = \sqrt{3}R \quad \Rightarrow \quad R_c = R + \sqrt{3}R = \left(1 + \sqrt{3}\right) R \doteq 2{,}7\,\Omega .$$

Výsledok s požadovanou presnosťou je možné určiť aj postupným pridávaním jednotlivých „kúskov“. Postupne pre 1, 2, 3 a 4 „kúsky“ dostaneme odpory $3\,\Omega$, $11/4\,\Omega = 2{,}75\,\Omega$, $41/15\,\Omega \doteq 2{,}73\,\Omega$ a $153/56\,\Omega \doteq 2{,}73\,\Omega$.

Úloha 42 ... zlomky, zlomky, zlomky...

Enku by zaujímalo ešte jedno číslo. Jedná sa o istý zlomok z. Ak zvýšime čitateľ a menovateľ tohto zlomku o 1, dostaneme zlomok o $1/20$ väčší. Ak túto operáciu vykonáme ešte raz, dostaneme zlomok o $1/12$ väčší než z. Aký bol pôvodný zlomok?

Úloha je prebraná zo školského kola kategórie C 59. ročníku matematickej olympiády.

Označme si pôvodný zlomok ako $z = a/b$. Zo zadania potom vyplývajú rovnice

$$\frac{a+1}{b+1} - \frac{a}{b} = \frac{1}{20} , \qquad \frac{a+2}{b+2} - \frac{a}{b} = \frac{1}{12} ,$$

ktoré vieme upraviť tak, aby neobsahovali zlomky (prvú rovnicu vynásobíme členom $20b\,(b+1)$, druhú členom $12b\,(b+2)$):

$$20b\,(a+1) - 20a\,(b+1) = b\,(b+1) \ , \quad \Rightarrow \quad 19b - 20a = b^2 ,$$
$$12b\,(a+2) - 12a\,(b+2) = b\,(b+2) \ , \quad \Rightarrow \quad 22b - 24a = b^2 .$$

Porovnaním pravých strán rovníc dostaneme $4a = 3b$, čo vieme dosadiť napríklad do druhej z rovníc. Tým dostaneme rovnicu

$$22b - 24 \cdot \frac{3}{4} b = 22b - 18b = 4b = b^2 .$$

Táto rovnica má dve riešenia. Prvé z nich, $b = 0$ však nemá zmysle, pretože v pôvodnom zlomku by sme museli deliť nulou. Pre nás správne je teda druhé riešenie $b = 4$. Jednoducho dopočítame $a = 3$, takže hľadaný zlomok je $z = 3/4$.

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

Organizačné miesta Náboja Junior 2016

Na Slovensku súťaž pripravovalo občianske združenie *Trojsten* . V Českej republike sa na koordinácii súťaže podieľali organozátori fyzikálneho korešpondenčného seminára pre základné školy *Výfuk*.

Brno – *Fakulta stroj. inženýrství VUT*
České Budějovice – *Gymnázium Jírovcova*
Česká Lípa – *Gymnázium Žitavská*
Frýdlant nad Ostravicí – *Gymnázium Frýdlant*
Hradec Králové – *Univerzita Hradec Králové*
Karlovy Vary – *První české gymnázium v Karlových Varech*
Olomouc – *Gymnázium Olomouc-Hejčín*
Ostrava – *Gymnázium O. Havlové*
Písek – *SPŠ a VOŠ Písek*
Plzeň – *Gymnázium Mikulášské náměstí*
Praha – *Gymnázum Ch. Dopplera*
Praha – *Gymnázium Voděradská*
Sokolov – *Gymnázium a KVC Sokolov*
Třebíč – *Katolické gymnázium*
Ústí nad Labem – *Fakulta sociálně ekonomická UJEP*
Zlín – *Gymnázium Zlín-Lesní čtvrť*

Bánovce n. Bebr. – *Gymnázium J. Jesenského*
Banská Bystrica – *Gymnázium A. Sládkoviča*
Bratislava – *Univerzitné pastor. centrum UK*
Brezno – *Gymnázium J. Chalupku*
Dubnica nad Váhom – *Gymnázium Školská*
Hlohovec – *Gymnázium I. Kupca*
Košice – *Gymnázium Alejová*
Levice – *Gymnázium A. Vrábla*
Lipt. Mikuláš – *Gymnázium M. M. Hodžu*
Lučenec – *CVČ Magnet*
Michalovce – *Gymnázium P. Horova*
Námestovo – *Gymnázium A. Bernoláka*
Nitra – *Gymnázium Párovská*
Partizánske – *Gymnázium Komenského*
Piešťany – *Gymnázium P. de Coubertina*
Poprad – *Gymnázium Kukučínova*
Prešov – *Gymnázium J. A. Raymana*
Prievidza – *Gymnázium V. B. Nedožerského*
Púchov – *Gymnázium Púchov*
Spišská Nová Ves – *Gymnázium Javorová*
Sučany – *Bilingválne gymnázium M. Hodžu*
Šahy – *Gymnázium Mládežnícka*
Šurany – *Gymnázium Bernolákova*
Trenčín – *Gymnázium Ľ. Štúra*
Trstená – *Gymnázium M. Hattalu*
Zvolen – *Gymnázium Ľ. Štúra*
Žilina – *Gymnázium Varšavská*