NÁBOJ junior

6 edycja

2017/18

Rozwiązania

výfuk

UNIWERSYTET
JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

Zadanie 1 ... przystanek końcowy

Na pierwszym przystanku do autobusu wsiadły trzy osoby. Na drugim jeden z pasażerów wysiadł, ale wsiadło pięciu nowych. Na trzecim przystanku dwie osoby wysiadły, a cztery wsiadły. Na czwartym nikt nie wysiadł, a wsiadło dziesięć osób. Na piątym przystanku dwie osoby wysiadły i siedem osób wsiadło. Ilu maksymalnie pasażerów może wysiąść na szóstym przystanku?

Policzmy pasażerów. Oczywiście przed pierwszym przystankiem autobus był pusty. Każda osoba wsiadająca powinna zostać dodana, a każda osoba wysiadająca odjęta. Otrzymujemy więc wyrażenie $0+3-1+5-2+4-0+10-2+7=24$. Oznacza to, że z piątego przystanku do szóstego jadą 24 osoby, więc co najwyżej 24 pasażerów może wysiąść na szóstym przystanku.

Zadanie 2 ... zegar

Jak dużą część koła pokona wskazówka godzinowa zegara przez 40 minut*?*

Istnieje zależność pomiędzy czasem, a kątem obrotu wskazówki godzinowej zegara. Pokonuje ona jedną dwunastą koła w ciągu godziny (ponieważ wykonanie pełnego obrotu zajmuje jej 12 godzin). Ponieważ 40 minut to $2/3$ godziny, więc wskazówka pokona w tym czasie $2/3 \cdot 1/12 = 1/18$ koła.

Zadanie 3 ... sałatka

Organizatorzy zawodów Náboj Junior zrobili sałatkę. Wiadomo, że proporcje sałata : ser wynoszą $3:2$*, ser : cebula* $=5:6$*, cebula : pomidor* $=3:2$*, pomidor : groch* $=4:7$*. Ile gramów grochu znajduje się w sałatce jeżeli organizatorzy wykorzystali* 150 *gramów sałaty?*

Chcemy obliczyć stosunek między sałatą a grochem. Możemy to zrobić wymnażając proporcje z treści zadania, ponieważ dzięki temu wszystkie składniki oprócz sałaty i grochu skrócą się:

$$\frac{\text{sałata}}{\text{groch}} = \frac{\text{sałata}}{\text{ser}} \cdot \frac{\text{ser}}{\text{cebula}} \cdot \frac{\text{cebula}}{\text{pomidor}} \cdot \frac{\text{pomidor}}{\text{groch}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{15}{14}\,.$$

Wiemy, że mamy 150 gramów sałaty, więc po wymnożeniu na krzyż otrzymujemy

$$\text{groch} = \frac{14}{15} \cdot \text{sałata} = \frac{14}{15} \cdot 150\,\text{g} = 140\,\text{g}\,.$$

Jest 140 gramów grochu w sałatce.

Zadanie 4 ... Sudoku

Rozwiąż sudoku. Wpisz liczby od 1 do 4, tak aby w każdym wierszu, kolumnie i pogrubionym kwadracie 2×2 *każda z liczb występowała dokładnie raz.*

	3	1	
4			
			1
	4	3	

Istnieje kilka sposobów rozwiązania, ale pokażemy tylko jeden przykładowy. Na początku postaramy się wpisać wszystkie 1. Widzimy, są one w rzędach I i III. Co więcej, jest już w prawym kwadracie 2×2, więc można ją wpisać na pozycjach BII i AIV. Stosując analogicznie ideę wpisujemy 4 na pozycjach DI i CII. Teraz możemy wpisać cyfrę 3, która występuje w kolumnach B i C. Ponieważ w górnej połowie planszy znajduje się ta cyfra, jedyna możliwa opcja wpisania jest to miejsce AIII. Podobne rozumowanie może być zastosowane przy wpisywaniu 3 na pozycji DII. Tak więc cyfra 2 będzie wpisana na pozostałych polach (patrz rysunek).

	A	B	C	D
I	2	**3**	**1**	4
II	**4**	1	2	3
III	3	2	4	**1**
IV	1	**4**	**3**	2

Zadanie 5 ... Tu/Lf

Lucyna postanowiła stworzyć nowy system jednostek. Najpierw wymyśliła sobie jednostkę czasu, którą oznaczyła swoimi inicjałami Lf*. Zdefiniowała ją jako czas swojego mrugnięcia, czyli* $1\,\mathrm{Lf} = 0{,}1\,\mathrm{s}$*. Co więcej Lucyna zdefiniowała także jednostkę długości, którą oznaczyła inicjałami swojej koleżanki Teresy (oznaczenie Tu) i zdefiniowała ją jako wzrost Teresy, czyli* $1\,\mathrm{Tu} = 1{,}8\,\mathrm{m}$*. Jaka jest maksymalna dozwolona prędkość na autostradzie wyrażona w nowych jednostkach (to jest w* Tu/Lf*), jeżeli wynosi ona* $36\,\mathrm{m/s}$*?*

Dobrym pomysłem jest wyrażenie długości oraz sekund w nowych jednostkach. Wiemy, że $1\,\mathrm{Tu} = 1{,}8\,\mathrm{m}$, zatem $1\,\mathrm{m} = 1/1{,}8\,\mathrm{Tu} = 10/18\,\mathrm{Tu}$. Podobnie możemy zrobić z czasem — wiemy, że $1\,\mathrm{Lf} = 0{,}1\,\mathrm{s}$, zatem $1\,\mathrm{s} = 1/0{,}1\,\mathrm{Lf} = 10\,\mathrm{Lf}$.

W rezultacie możemy zamienić prędkość $36\,\mathrm{m/s}$ na jednostkę Tu/Lf w następujący sposób

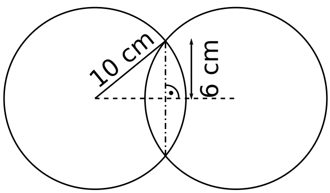
$$36\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 36 \cdot \frac{\frac{10}{18}\,\mathrm{Tu}}{10\,\mathrm{Lf}} = \frac{36\,\mathrm{Tu}}{18\,\mathrm{Lf}} = 2\,\mathrm{Tu/Lf}\,.$$

Zatem prędkości $36\,\mathrm{m/s}$ odpowiada prędkość $2\,\mathrm{Tu/Lf}$.

Zadanie 6 ... okręgi

Dwa okręgi o średnicy $20\,\mathrm{cm}$*, przecinają się w dwóch punktach oddalonych o* $12\,\mathrm{cm}$*. Jaka jest odległość pomiędzy środkami tych okręgów?*

Odcinek łączący punkty przecięcia okręgów i odcinek łączący ich środki są przekątnymi rombu, którego bokami są promienie okręgów, dlatego te odcinki są prostopadłe i połowią się wzajemnie.



Połowy tych odcinków są przyprostokątnymi w trójkącie prostokątnym, którego przeciwprostokątną jest promień okręgu (równy połowie średnicy: $10\,\mathrm{cm}$). Jedna z przyprostokątnych ma długość równą połowie odległości między punktami przecięcia okręgów, a więc 6 cm. Długość drugiej przyprostokątnej x może zostać wyliczona przy użyciu twierdzenia Pitagorasa:

$$(10\,\mathrm{cm})^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + (6\,\mathrm{cm})^2 \quad \Rightarrow \quad x = 2\sqrt{(10\,\mathrm{cm})^2 - (6\,\mathrm{cm})^2} = 16\,\mathrm{cm}\,.$$

Zatem odległość między środkami okręgów wynosi 16 cm.

Zadanie 7 ... gorące hamulce

Wagon pociągowy waży 1 200 t i porusza się z prędkością 72 km/h. Nagle zaczyna hamować. Ile ciepła może wydzielić, jeśli cała jego energia ruchu zostanie przekształcona w ciepło w jego hamulcach?

Energia ruchu pociągu wynosi $E_\mathrm{k} = mv^2/2$, gdzie m oznacza masę, a v prędkość pociągu. Przeliczając masę pociągu na kilogramy (1 200 t = 1 200 000 kg) i prędkość na metry na sekundę (72 km/h = 20 m/s) dostajemy

$$E_\mathrm{k} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 1\,200\,000\,\mathrm{kg} \cdot (20\,\mathrm{m/s})^2 = 240\,000\,000\,\mathrm{J} = 240\,\mathrm{MJ}\,.$$

Ciepło, które może powstać podczas hamowania pociągu wynosi 240 000 000 J = 240 000 kJ = = 240 MJ.

Zadanie 8 ... obwód

Adam ma prostokąt złożony z 4 mniejszych prostokątów, których długości boków w centymetrach są liczbami całkowitymi. Ich pola (wyrażone w cm^2) są przedstawione na rysunku. Jaki jest obwód tego prostokąta?

18	15
24	20

Możemy znaleźć wspólny dzielnik dla pól 18 cm^2 i 15 cm^2 przez rozkład na czynniki pierwsze. Tym wspólnym dzielnikiem jest 3, więc pierwszy prostokąt ma wymiary 6 cm × 3 cm, a drugi 3 cm × 5 cm. W związku z tym prostokąt o polu równym 24 cm^2 ma jeden z boków długości 6 cm, więc musi mieć wymiary 4 cm × 6 cm. Wymiary ostatniego prostokąta wynoszą 4 cm × 5 cm. Teraz możemy policzyć obwód całego prostokąta, który wynosi

$$o = 2\,(a+b) = 2\,[(6\,\mathrm{cm} + 5\,\mathrm{cm}) + (3\,\mathrm{cm} + 4\,\mathrm{cm})] = 36\,\mathrm{cm}\,.$$

Czyli obwód prostokąta wynosi 36 cm.

Zadanie 9 ... kryształ soli

Ola hoduje kryształ w ramach szkolnego eksperymentu. Kryształ pochodzi z substancji chemicznej o gęstości $2\,\mathrm{g/cm^3}$ i ma kształt sześcianu. Rośnie on jednak dość powoli — każda krawędź sześcianu jest wydłużana o $1\,\mathrm{mm}$ tygodniowo. Ile tygodni musi czekać Ola, by kryształ miał masę co najmniej $16\,\mathrm{g}$?

Objętość kryształu Oli ważącego $16\,\mathrm{g}$ wynosi

$$V = \frac{16\,\mathrm{g}}{2\,\mathrm{g/cm^3}} = 8\,\mathrm{cm}^3\,.$$

Ponieważ kryształ jest sześcienny, to wiemy, że jego objętość to a^3 (gdzie a to bok sześcianu). Pierwiastek trzeciego stopnia z 8 to 2, więc Ola chce mieć kryształ o boku $2\,\mathrm{cm} = 20\,\mathrm{mm}$. Bok kryształu jest wydłużany o $1\,\mathrm{mm}$ co tydzień, więc musi czekać 20 tygodni.

Zadanie 10 ... sok

Babcia Gertruda robi sok z malin i jagód zebranych ze swojego ogródka. Zebrała ona $70\,\mathrm{kg}$ owoców. Żeby zrobić jeden litr soku malinowego potrzeba $3\,\mathrm{kg}$ malin, a na jeden litr soku jagodowego $4\,\mathrm{kg}$ jagód. Ile kilogramów jagód zebrała babcia Gertruda skoro zrobiła $21\,\ell$ soku?

Oznaczmy masę malin jako m_m i masę jagód jako m_j. Teraz możemy napisać, że $m_\mathrm{m} = 70\,\mathrm{kg} - m_\mathrm{j}$. Możemy uzyskać $V_\mathrm{m} = m_\mathrm{m}/(3\,\mathrm{kg}/\ell)$ soku malinowego i $V_\mathrm{j} = m_\mathrm{j}/(4\,\mathrm{kg}/\ell)$ soku jagodowego. Wiemy, że zostało zrobione $21\,\ell = V_\mathrm{m} + V_\mathrm{j}$ soku. Zastępując objętości otrzymujemy równanie

$$21\,\ell = \frac{m_\mathrm{m}}{3\,\mathrm{kg}/\ell} + \frac{m_\mathrm{j}}{4\,\mathrm{kg}/\ell} = \frac{70\,\mathrm{kg} - m_\mathrm{j}}{3\,\mathrm{kg}/\ell} + \frac{m_\mathrm{j}}{4\,\mathrm{kg}/\ell}\,.$$

Po łatwych przekształceniach otrzymujemy, że $m_\mathrm{j} = 28\,\mathrm{kg}$.

Zadanie 11 ... zdjęcie

Kuba chce, aby jego nowe zdjęcie profilowe było jak najbardziej energetyczne. Na jednym zdjęciu stoi na wzgórzu w Anglii 20 metrów nad poziomem morza. Na drugim zdjęciu jedzie na rowerze przez Monako (0 metrów nad poziomem morza). Jak szybko musi jechać na rowerze, aby jego całkowita energia w momencie robienia obu zdjęć była taka sama?

Możemy uzyskać prędkość Kuby porównując jego potencjalną energię E_p na zdjęciu w Anglii z jego energią kinetyczną E_k na zdjęciu w Monako. Jeśli m to jego masa, $h = 20\,\mathrm{m}$ to wysokość nad poziomem morza w Anglii i v to jego prędkość w Monako, otrzymujemy

$$E_\mathrm{p} = E_\mathrm{k} \quad \Rightarrow \quad mgh = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} \cdot 20\,\mathrm{m}} = 20\,\mathrm{m/s}\,.$$

Zadanie 12 ... spotkanie

Na obozie mamy 40 chłopców i 28 dziewczynek. Podczas gry dzieci ustawiają się w kółku. Wiemy, że dokładnie 18 chłopców ma dziewczynkę po swojej prawej stronie. Ilu chłopców ma dziewczynkę po swojej lewej stronie?

Dziewczynki mogą stać w kole w grupach po kilka dziewcząt (grupą może być także jedna dziewczynka). Każda taka grupa ma na swoich końcach chłopców. Po lewej stronie znajduje się chłopiec, który ma dziewczynę po prawej stronie, a po prawej stronie jest chłopiec z dziewczyną po lewej stronie. Jeśli więc po prawej stronie jest 18 chłopców, którzy mają dziewczynę, musi być też 18 chłopców mających dziewczynę po lewej stronie.

Zadanie 13 ... zapora

Na ścianie zapory jest małe pęknięcie, przez które wycieka strumień wody. Początkowo strumień wycieka w kierunku poziomym z prędkością $26\,\mathrm{m/s}$. *Na skutek siły grawitacji, strumień zaczyna opadać w kierunku ziemi, czyli w dodatku do stałej składowej poziomej prędkości* $26\,\mathrm{m/s}$, *pojawia się składowa pionowa* u *zgodnie z zależnością* $u = gt$, *gdzie* g *oznacza przyspieszenie ziemskie.*

Po jakim czasie wektor prędkości strumienia wody w kierunku poziomym i pionowym będzie taki sam względem kierunku poziomego?

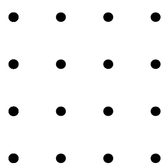
Ponieważ wartość składowej poziomej jest stała, musimy tylko ustalić $u = 26\,\mathrm{m/s}$ (wtedy obie składowe będą miały takie same wartości) i połączyć je z zależnością czasową:

$$u = gt \quad \Rightarrow \quad t = \frac{u}{g} = \frac{26\,\mathrm{m/s}}{10\,\mathrm{m/s^2}} = 2{,}6\,\mathrm{s}\,.$$

Obie składowe będą miały taką samą wartość po czasie $2{,}6\,\mathrm{s}$.

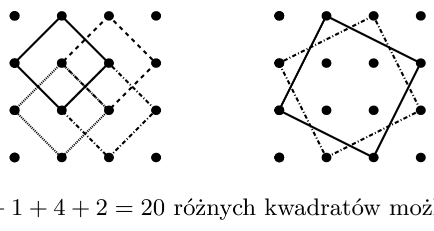
Zadanie 14 ... kwadraty

Ile kwadratów można narysować na poniższym obrazku, jeśli wierzchołkami każdego z nich muszą być pewne spośród 16 *czarnych punktów.*



Zacznijmy liczenie kwadratów od tych najbardziej oczywistych. Oczywiście można narysować 9 kwadratów o wymiarach 1×1, 4 kwadraty o wymiarach 2×2 i tylko jeden o wymiarach 3×3.

Jednakże jeszcze nie policzyliśmy wszystkich kwadratów. Zauważmy, że ukośne linie mogą być do siebie prostopadłe. Mamy stąd 4 kwadraty o wymiarach $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ oraz 2 kwadraty o wymiarach $\sqrt{5} \times \sqrt{5}$ (obrazek).



W sumie mamy $9 + 4 + 1 + 4 + 2 = 20$ różnych kwadratów możliwych do narysowania.

Zadanie 15 ... turniej

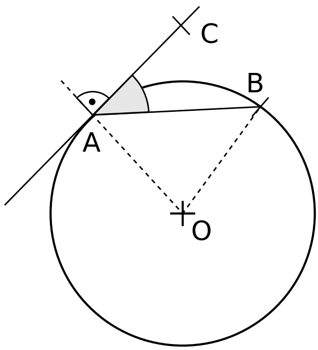
Królowa Elżbieta organizuje turniej, w którym tylko jedna osoba może być zwycięzcą, tj. najszybszy, najodważniejszy, najsilniejszy i najmądrzejszy rycerz. Do turnieju zgłosiło się 200 rycerzy. Rycerze stają do pojedynków w parach i osoba która wygra kwalifikuje się do kolejnej rundy, a przegrywający odpada. Jeśli w jakiejś rundzie rycerz nie ma przeciwnika, automatycznie wygrywa. Ile pojedynków rozegrano w turnieju, jeśli na koniec pozostał tylko jeden rycerz?

W każdym pojedynku jeden uczestnik zostaje wyeliminowany z turnieju. Aby mieć tylko jednego zwycięzcę, należy wyeliminować 199 rycerzy. Dlatego na turnieju było 199 pojedynków.

Zadanie 16 ... geometria

Karolina zaznaczyła dwa różne punkty A *i* B *na okręgu o środku w* O*. Następnie zaznaczyła punkt* C*, o tej własności, że prosta* CA *jest prostopadła do prostej* OA*. Na koniec zmieżyła kąt* $\measuredangle \mathsf{CAB} = 42^\circ$*. Jaka jest miara kąta* $\measuredangle \mathsf{AOB}$*?*

Zacznijmy od narysowania sytuacji z zadania.



Kąt $\measuredangle \mathsf{OAB}$ jest dopełnieniem kąta $\measuredangle \mathsf{CAB}$ do 90°, zatem jest on miary $\measuredangle \mathsf{OAB} = 90^\circ - 42^\circ = 48^\circ$. Skoro punkty A i B leżą na okręgu, to trójkąt ABO jest równoramienny, więc $\measuredangle \mathsf{OAB} = \measuredangle \mathsf{OBA}$. Suma kątów w trójkącie jest zawsze równa 180°, stąd wynika, że miara kąta $\measuredangle \mathsf{AOB}$ wynosi $\measuredangle \mathsf{AOB} = 180^\circ - 2 \cdot 48^\circ = 84^\circ$.

Zadanie 17 ... benzyna

Samochód jedzie po autostradzie ze stałą prędkością $110\,\mathrm{km/h}$ *mając w zbiorniku* $5\,\ell$ *paliwa. Wiemy, że energia wytwarzana podczas spalania benzyny wynosi* $32\,\mathrm{MJ/l}$*, sprawność silnika spalinowego* $50\,\%$ *(tj. silnik przekształca tylko połowę energii wytwarzanej na energię kinetyczną samochodu), a całkowita siła oporu działającego na samochód wynosi* $800\,\mathrm{N}$*. Jak daleko zajedzie samochód, zanim skończy się benzyna?*

Energia z benzyny skorygowana o sprawność silnika odpowiada pracy, jaką należy wykonać, by samochód przejechał określoną odległość. Otrzymujemy więc, że praca to iloczyn odległości i siły wytwarzanej przez silnik. Siła ta jest równa sile oporu działającego na samochód. Całkowita energia wytworzona z benzyny jest iloczynem energii jednostkowej i objętości paliwa w zbiorniku. Następnie, jeśli pomnożymy ją przez sprawność silnika, uzyskamy energię, którą samochód może wykorzystać do ruchu:

$$E = \frac{1}{2} \cdot 32\,\mathrm{MJ}/\ell \cdot 5\,\ell = 80\,\mathrm{MJ}\,.$$

Teraz w łatwy sposób możemy uzyskać wzór na drogę:

$$s = \frac{E}{F} = \frac{80\,\mathrm{MJ}}{800\,\mathrm{N}} = \frac{80\,000\,000\,\mathrm{J}}{800\,\mathrm{N}} = 100\,000\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{km}\,.$$

A więc samochód może przejechać 100 km.

Zadanie 18 ... orzeszki w czekoladzie

Ile orzeszków w czekoladzie zmieści się w tytce, jeśli 50 % *jej objętości stanowi powietrze między orzeszkami? Tytka ma kształt stożka, którego wysokość wynosi* 24 cm, *a promień podstawy* 8 cm. *Objętość jednego orzeszka to* $0{,}2\pi\,\mathrm{cm}^3$.

Wzór na objętość stożka to $V = \pi r^2 h/3$, gdzie $r = 8\,\mathrm{cm}$ to promień podstawy, a $h = 24\,\mathrm{cm}$ to wysokość. Połowa objętości, którą stanową orzeszki to

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{1\,536\pi}{6}\,\mathrm{cm}^3 = 256\pi\,\mathrm{cm}^3\,.$$

Jeśli podzielimy tę objętość przez objętość jednego orzeszka otrzymamy liczbę orzeszków, które zmieszczą się w tytce:

$$\frac{256\pi\,\mathrm{cm}^3}{0{,}2\pi\,\mathrm{cm}^3} = \frac{256 \cdot 10}{2} = 1\,280\,.$$

W tytce zmieści się 1 280 orzeszków.

Zadanie 19 ... lodownia

Niegdyś do przechowywania zapasów budowane lodownie, w których osiągano niskie temperatury przy użyciu lodu. Jak jest najmniejsza potrzebna masa lodu (o temperaturze $-10\,^\circ\mathrm{C}$ *i cieple właściwym* $2\,\mathrm{kJ/kg{\cdot}^\circ C}$*) do obniżenia temperatury lodowni w rzeźni o objętości* $200\,\mathrm{m}^3$ *wypełnionej powietrzem o gęstości* $1{,}2\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$, *cieple właściwym* $1\,\mathrm{kJ/kg{\cdot}^\circ C}$ *i temperaturze* $20\,^\circ\mathrm{C}$, *taka aby po zamknięciu i schłodzeniu lodowni lód nie zaczął topnieć? Przyjmujemy, że lód nie zadmuje miejsca w lodowni, tj. ma swoje własne, dodatkowe miejsce.*

Warunek, aby lód nie zaczął topnieć oznacza, że końcowa temperatura w lodowni powinna wynosić $0\,^\circ\mathrm{C}$. Gdyby końcowa temperatura w lodowni była mniejsza, to byłby w niej niepotrzebny lód, natomiast gdyby była wyższa, lód zacząłby topnieć. Nie uwzględniając starty energii, ciepło pobrane na ogrzanie lodu od $-10\,^\circ\mathrm{C}$ do $0\,^\circ\mathrm{C}$ jest równe ciepłu oddanemu przez powietrze w lodowni.

Ciepło pobrane jest równe iloczynowi masy, ciepła właściwego i różnicy tepmeratury. Różnica temperatury lodu to $10\,^\circ\mathrm{C}$, a powietrza $20\,^\circ\mathrm{C}$. Masa powietrza może łatwo zostać policzona ze wzoru $m = V\varrho = 200\,\mathrm{m}^3 \cdot 1{,}2\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}} = 240\,\mathrm{kg}$. Niech m oznacza masę lodu i zapiszmy zależność między ciepłem pobranym i oddanym:

$$m{\cdot}2\,\mathrm{kJ/kg{\cdot}^\circ C}{\cdot}10\,^\circ\mathrm{C} = 240\,\mathrm{kg}{\cdot}1\,\mathrm{kJ/kg{\cdot}^\circ C}{\cdot}20\,^\circ\mathrm{C} \quad \Rightarrow \quad m = \frac{240\,\mathrm{kg} \cdot 1\,\mathrm{kJ/kg{\cdot}^\circ C} \cdot 20\,^\circ\mathrm{C}}{2\,\mathrm{kJ/kg{\cdot}^\circ C} \cdot 10\,^\circ\mathrm{C}} = 240\,\mathrm{kg}\,.$$

Do schołodzenia lodowni potrzeba 240 kg lodu.

Zadanie 20 ... monety

Edyta na strychu dziadka znalazła w skrzyni wiele starych monet o nominałach 5, 9 i 12. Dowiedziała się też, że kasjerka w sklepie nie ma możliwości wydawania reszty, więc Ewa nie będzie w stanie zapłacić niektórych kwot. Ile jest takich kwot?

Z podanych wartości nie możemy uzyskać wartości $1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11, 13$ i 16, a możemy wszystkie inne mniejsze od 16. Zauważmy też, że z posiadanych monet możemy zapłacić sekwencję pięciu kolejnych wartości $(17, 18, 19, 20$ i $21)$. Wszystkie inne wartości można uzyskać na przykład przez dodanie monet o wartości 5. Dlatego nie możemy zapłacić dokładnie 10 wartości.

Zadanie 21 ... tratwa

Dawniej ciężkie ładunki były transportowane na tratwach. Jaka jest maksymalna masa ładunku w całkowitej liczbie kilogramów, którą można przewieźć na tratwie wykonanej z 10 *kłód? Długość kłody wynosi* 5 m *a średnica* 20 cm. *Ładunek musi dotrzeć suchy. Zakładamy, że pusta tratwa ma* 3/5 *swojej objętości pod wodą.*

Możemy dodawać ładunek na tratwę do momentu całkowitego zanurzenia tratwy w wodzie. Stąd siła wyporu zanurzonej tratwy jest równa sumie siły ciężkości kłód F_k i ładunku F_l:

$$F_\mathrm{vz} = F_\mathrm{k} + F_\mathrm{n}\,.$$

Objętość tratwy wynosi $V = n\pi r^2 l$, gdzie n to liczba kłód, r jest promieniem, a l długością kłody. Jeśli gęstość wody wynosi $\varrho = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$, a przyspieszenie ziemskie g, to siła wyporu jest równa

$$F = V\varrho g = n \cdot \pi r^2 l \varrho g\,.$$

Ponieważ pusta tratwa zatopiona jest w $3/5$ jej objętości, siła ciężkości kłód to

$$F_\mathrm{k} = \frac{3}{5}F\,.$$

Podstawiając F_k w pierwszym równaniu, uzyskujemy $F_\mathrm{l} = 2F/5$. Maksymalna masa ładunku w związku z tym wynosi:

$$m = \frac{F_\mathrm{l}}{g} = \frac{2}{5} n\pi r^2 l\varrho\,.$$

Stąd

$$m = \frac{2}{5} \cdot 10 \cdot \pi \cdot (0{,}1\,\mathrm{m})^2 \cdot 5\,\mathrm{m} \cdot 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} = 200\pi\,\mathrm{kg} \doteq 628\,\mathrm{kg}\,.$$

Maksymalna waga ładunku, który można przewieźć na tratwie wynosi 628 kg.

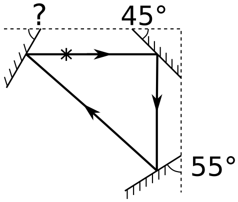
Zadanie 22 ... masło

Julia codziennie na śniadanie je masło. Nową kostkę zaczęła jeść 6 listopada. Dzisiaj (24 listopada) po śniadaniu zauważyła, że wszystkie 3 *wymiary kostki masła stanowią* 2/3 *początkowej wielkości. Kiedy Julia skończy jeść masło, jeśli każdego dnia zjada go tyle samo?*

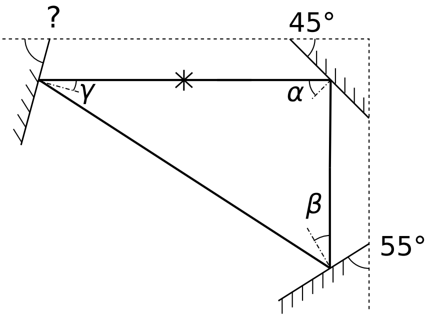
Obecna objętość masła to $(2/3)^3 = 8/27$ początkowej objętości. Wraz z dzisiaj, co odpowiada 19 śniadaniom, Julia zjadła $1 - 8/27 = 19/27$ masła. Wnioskujemy stąd, że Julia każdego dnia je $1/27$ masła. Pozostałe masło wystarczy na 8 posiłków, z których pierwszy będzie 25 listopada, dlatego skończy ona masło 2 grudnia.

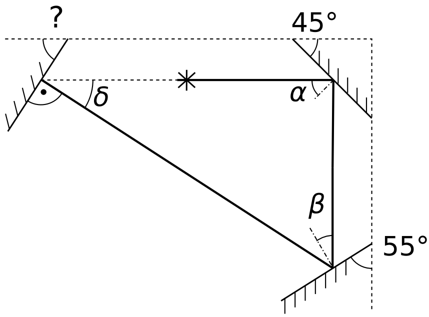
Zadanie 23 ... lustra

Kinga wymyśliła nową zabawkę, zbudowaną z lusterek. Kąt między pierwszym lusterkiem a poziomem wynosi 45°, kąt między pionem, a drugim lusterkiem wynosi 55° (patrz rysunek). Promień lasera ze źródła jest równoległy do kierunku poziomego. Jaki jest kąt między poziomem a trzecim lusterkiem (na rysunku kąt oznaczony jako ?), tak, aby wiązka laserowa ponownie uderzyła w źródło równoległe do źródła poziomego?



Oznaczmy α, β i γ kąty padania wiązki na odpowiednie lustra (patrz rysunek po lewej). Wiemy, że kąty odbicia muszą być takie same. Kąt α można obliczyć jako kąt dopełniający do kąta nachylenia pierwszego zwierciadła, a więc$\alpha = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$. Podobnie, z nachylenia drugiego lustra uzyskuje się kąt $\beta = 90^\circ - 55^\circ = 35^\circ$. Ponieważ suma kątów wewnętrznych trójkąta utworzonego przez wiązkę lasera musi wynosić 180°, otrzymujemy $2\gamma = 180^\circ - 2\alpha - 2\beta = 20^\circ$, stąd $\gamma = 10^\circ$. Trzecie lustro musi być pochylone o $90^\circ - \gamma = 80^\circ$.

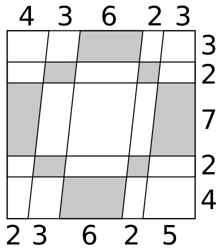




Innym rozwiązaniem jest odbijanie prostopadłe od trzeciego zwierciadła, a więc wysyłanie wiązki z powrotem do źródła w taki sam sposób, w jaki się tam znalazła. Można uzyskać odbicie prostopadłe z sumy kątów czworokąta, który jest równy 360°. Przez wydłużenie odbitej wiązki od punktu C poza drugie lustro dostajemy kąt padania 70°. Stąd kąt δ jest równy $360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 70^\circ = 110^\circ$. Lustro musi następnie zostać przechylone o $180^\circ - \delta = 70^\circ$.

Zadanie 24 ... pole

Jakie jest całkowite pole zamalowanych figur? Numery na rysunku oznaczają długości odcinków w centymetrach.



Większość kształtów to równoległoboki, których powierzchnia to av_a, gdzie a jest podstawą, a v_a wysokością. Jedynymi innymi figurami są te w lewej i prawej kolumnie (skrajnych kolumnach), które są trapezami. Zauważmy, że „prawą” kolumnę można przesunąć obok „lewej” kolumny i w ten sposób ponownie uzyskujemy równoległobok. Ponieważ znamy długość jednej podstawy i wysokości, otrzymujemy całkowitą powierzchnię

$$6 \cdot 3\,\mathrm{cm}^2 + 3 \cdot 2\,\mathrm{cm}^2 + 2 \cdot 2\,\mathrm{cm}^2 + (2+5) \cdot 7\,\mathrm{cm}^2 + 3 \cdot 2\,\mathrm{cm}^2 + 2 \cdot 2\,\mathrm{cm}^2 + 6 \cdot 4\,\mathrm{cm}^2 = 111\,\mathrm{cm}^2\,.$$

Suma zamalowanych figur wynosi $111\,\mathrm{cm}^2$.

Zadanie 25 ... wodospad

Joanna chciałaby zbudować własny sztuczny wodospad o wysokości $1\,\mathrm{m}$ *i przepływie wody* $10\,\ell/\mathrm{s}$. *Jakiej mocy pompę musi ona kupić, aby wystarczająca ilość wody z jeziora została przepompowana do zbiornika, który zasila jej wodospad? Pomiń efekty wynikające z tarcia wewnętrznego w płynie.*

Jeśli strumień wody wynosi $10\,\ell/\mathrm{s}$, pompa powinna co 10 sekund pompować $10\,\ell/\mathrm{s}$ ($10\,\mathrm{kg}$) wody. Oznacza to, że pompa musi dostarczać energię potencjalną $10\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s}^2 \cdot 1\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{J}$ co sekundę. Ponieważ stosunek energii (tutaj $100\,\mathrm{J}$) do czasu (tutaj $1\,\mathrm{s}$) jest mocą, pompa Joanny musi mieć minimalną moc $100\,\mathrm{J/s} = 100\,\mathrm{W}$.

Zadanie 26 ... rozwinięcie dziesiętne

Rozważmy liczbę $1/5^{10}$, *zapisaną w standardowej postaci dziesiętnej. Ile cyfr w rozwinięciu dziesiętnym (po przecinku) ma ta liczba?*

Najlepszym sposobem na znalezienie liczby cyfr rozwinięcia dziesiętnego jest zmodyfikowanie oryginalnej liczby do postaci $x/10^n$, gdzie x jest liczbą naturalną, która nie ma ostatniej cyfry równej 0, a 10^n jest odpowiednią potęgą liczby 10. W rzeczywistości taka liczba ma n cyfr dziesiętnych (np. $4/1\,000 = 0{,}004$). Ponieważ oryginalna część zawiera w mianowniku tylko potęgę 5, musimy ją zmodyfikować. Jeśli zauważymy, że $5 \cdot 2 = 10$, możemy łatwo zmodyfikować mianownik, mnożąc licznik i mianownik przez 2^{10}. Otrzymujemy

$$\frac{1}{5^{10}} = \frac{1}{5^{10}} \cdot \frac{2^{10}}{2^{10}} = \frac{2^{10}}{10^{10}}\,.$$

Końcowa liczba w liczniku wynosi $2^{10} = 1\,024$, tj. jej ostatnia cyfra jest niezerowa. Jeśli spojrzymy na mianownik (10^{10}), łatwo można powiedzieć, że liczba $1/5^{10}$ w systemie dziesiętnym ma 10 cyfr po przecinku.

Zadanie 27 ... rurka

Beata znalazła w garażu długą rurkę w kształcie litery U *o polu przekroju* $1\,\mathrm{cm}^2$. *Wypełniła większość rurki wodą. Następnie dodała* $10\,\mathrm{ml}$ *benzyny o gęstości* $0{,}72\,\mathrm{g/cm}^3$ *do lewego ramienia rurki i czekała na stabilizację płynów. O ile podniósł się poziom wody w prawym ramieniu rurki, jeśli wiadomo, że benzyna i woda nie mieszają się?*

$10\,\mathrm{ml} = 10\,\mathrm{cm}^3$ benzyny tworzy kolumnę o wysokości $h = 10\,\mathrm{cm}^3/1\,\mathrm{cm}^2 = 10\,\mathrm{cm}$ powodującej w rurze ciśnienie hydrostatyczne $p = \varrho g h$ na powierzchni wody w lewym ramieniu rurki, gdzie $\varrho = 0{,}72\,\mathrm{g/cm}^3$ to gęstość benzyny, a g to przyspieszenie ziemskie. To dodatkowe ciśnienie powoduje spadek powierzchni wody w ramieniu lewej rurki o Δh, a zatem powierzchnia wody w prawym ramieniu rurki podnosi się o taką samą wysokość. Woda w prawym ramieniu rurki jest wyższa niż w lewym ramieniu o $2\Delta h$. Jeżeli ciśnienia w rurze są ustabilizowane, ta dodatkowa woda (o gęstości $\varrho_w = 1\,\mathrm{g/cm}^3$) również musi spowodować ciśnienie p. Dlatego możemy napisać:

$$\varrho g h = \varrho_{\mathrm{w}} g\,(2\Delta h) \quad \Rightarrow \quad \Delta h = \frac{\varrho h}{2\varrho_{\mathrm{w}}} = \frac{0{,}72\,\mathrm{g/cm}^3 \cdot 10\,\mathrm{cm}}{2 \cdot 1\,\mathrm{g/cm}^3} = 3{,}6\,\mathrm{cm}\,.$$

Woda w prawym ramieniu podniesie się o $3{,}6\,\mathrm{cm}$.

Zadanie 28 ... silnia

Oblicz

$$\frac{2018! - 2017!}{2017!}\,.$$

Symbol ! *oznacza silnię, tj. iloczyn wszystkich liczb naturalnych od* 1 *do danej liczby (np.* $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$*).*

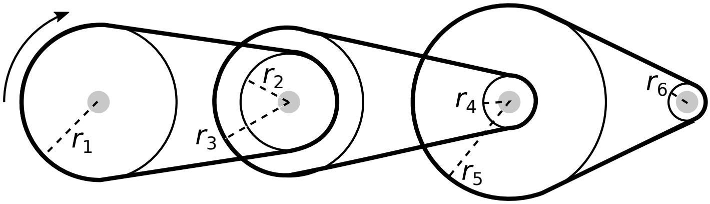
Wprost z definicji otrzymujemy $2018! = 2018 \cdot 2017 \cdot 2016 \cdots 1$. Zauważmy, że $2018! = 2018 \cdot 2017!$. Ta obserwacja upraszcza rozwiązanie. Licznik ułamka w zadaniu może zostać zapisajny jako $2018! - 2017! = 2018 \cdot 2017! - 2017!$. W liczniku możemy teraz wyciągnąć $2017!$ przed nawias. Otrzymujemy $2017! \cdot (2018 - 1)$. Wtedy szukany ułamek ma postać:

$$\frac{2018! - 2017!}{2017!} = \frac{2017! \cdot (2018 - 1)}{2017!} = 2018 - 1 = 2017\,.$$

Wynik to 2017

Zadanie 29 ... skrzynia biegów

Typowa skrzynia biegów składa się z sześciu kół połączonych sztywną liną lub mających wspólną oś obrotu (patrz rysunek). Promienie odpowiednich kół wynoszą: $r_1 = 21\,\mathrm{cm}$, $r_2 = 13\,\mathrm{cm}$ $r_3 = 20\,\mathrm{cm}$, $r_4 = 7\,\mathrm{cm}$, $r_5 = 26\,\mathrm{cm}$ *i* $r_6 = 5\,\mathrm{cm}$. *Wiemy również, że pierwsze koło obraca się z prędkością 3 obrotów na minutę. Z jaką prędkością (w* obr$\cdot$/min*) obraca się szóste koło skrzyni biegów?*



Jest kilka ważnych faktów, o których musimy pamiętać. Po pierwsze, koła połączone liną mają taką samą prędkość bezwzględną (np. w m/s). Po drugie, koła zamontowane na tej samej osi mają tę samą prędkość kątową (w obr·/min). Oznaczmy prędkość kątową pierwszego koła jako $\omega_1 = 3\,\text{rpm}$. Jego absolutna prędkość wynosi $v_1 = 2\pi r_1 \omega_1$, gdzie $2\pi r_1$ reprezentuje obwód pierwszego koła. Można wywnioskować z rysunku, że $v_1 = v_2$. Stąd

$$2\pi r_1 \omega_1 = 2\pi r_2 \omega_2 \,,$$

czyli

$$\omega_2 = \frac{r_1}{r_2} \omega_1 \,.$$

Postępując zgodnie ze schematem skrzyni biegów, dostajemy również $\omega_3 = \omega_2$ i $r_3\omega_3 = r_4\omega_4$. W związku z tym

$$\omega_4 = \frac{r_3}{r_4}\omega_3 = \frac{r_3}{r_4}\omega_2 = \frac{r_3}{r_4} \cdot \frac{r_1}{r_2}\omega_1 \,.$$

Również $\omega_4 = \omega_5$ i $r_5\omega_5 = r_6\omega_6$, stąd

$$\omega_6 = \frac{r_5}{r_6}\omega_5 = \frac{r_5}{r_6} \cdot \frac{r_3}{r_4} \cdot \frac{r_1}{r_2}\omega_1 = \frac{26\,\text{cm} \cdot 20\,\text{cm} \cdot 21\,\text{cm}}{5\,\text{cm} \cdot 7\,\text{cm} \cdot 13\,\text{cm}} \cdot 3\,\text{obr}\cdot/\text{min} = 72\,\text{obr}\cdot/\text{min} \,.$$

Szóste koło przekładni obraca się z prędkością 72 obr·/min.

Zadanie 30 ... ułamki

Radek napisał dla żartu następujące ułamki:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \frac{1}{56}, \frac{1}{72}, \frac{1}{90} \;\; i \;\; \frac{1}{110} \,.$$

Jaka jest ich suma?

Zauważmy, że te ułamki nie są całkowicie przypadkowe:

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{20} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}, \ldots$$

Inaczej mówiąc każdy ułamek jest różnicą odwrotności dwóch kolejnych liczb naturalnych. Jeśli dodamy wszystkie otrzymane ułamki, prawie wszystkie uproszczą się:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11} \,.$$

Stąd suma tych wszystkich ułamków wynosi $10/11 \doteq 0{,}909$.

Zadanie 31 ... czerwień

Adam lubi bawić się liczbami całkowitymi dodatnimi. Szczególnie lubi liczyć sumy cyfr położonych na pozycjach nieparzystych i parzystych, odpowiednio N i P. Ostatnio Adam zauważył, że każda liczba podzielna przez 11 ma tę własność, że $|N - P|$ również jest podzielna przez 11. Ponadto często ta różnica jest równa zeru. Dlatego koloruje na czerwono wszystkie liczby całkowiete, dla których zachodzi $|N-P| = 0$. Pomóż Adamowi znaleźć najmniejszą liczbę całkowitą dodatnią, podzielną przez 11, ale nie czerwoną.

Oczywiście dwucyfrowe liczby podzielne przez 11 są czerwone. Dlatego musimy zacząć szuanie od liczb trzycyfrowych. Ogólnie liczbę szukaną przez Adama możemy zapisać $100a + 10b + c$, gdzie a, b, c oznaczją odpowiednie cyfry.

Cyfry muszą spełniać warunek $|a + c - b| \neq 0$, ale oczywiście musi być podzielne przez 11. Stąd możemy zapisać $|a + c - b| = 11$ (więszej różnicy nie da się osiągnąć, bo suma liczb a i c może być co najwyżej 18).

Skoro szukamy najmniejszej liczby, możemy spróbować $a = 1$. To daje $c - b = 10$, co nie może być rozwiązane w liczbach jednocyfrowych. Dlatego spróbujmy $a = 2$ i rozwiążmy równanie $c - b = 9$. Jednym rozwiązaniem w liczbach jednocyfrowych jest $b = 0$ i $c - 9$.

Najmniejszą nieczerwoną liczbą podzielną przez 11 jest liczba 209.

Zadanie 32 ... próbówka

Mateusz lubi przeprowadzać eksperymenty chemiczne. Ostatnim razem wziął długą probówkę o promieniu 5 mm *i wlał do niej trochę wody. Następnie wziął długi, cylindryczny kawałek korka o promieniu* 4 mm*, wysokości* 10 cm *i gęstości* $0{,}25\,\mathrm{g/cm^3}$*, a następnie wrzucił go do próbówki i zostawił pływający w pionie. Jak bardzo podniósł się poziom wody w rurze?*

Ponieważ korek unosi się, siła oporu i siła działająca na korek są równe. Siła ciężkości wynosi $FG = mg = \varrho V g$, gdzie $\varrho = 0{,}25\,\mathrm{g/cm^3}$ jest gęstością korka, g przyspieszeniem ziemskim, a V objętością korka (objętość jest równa Sh, gdzie S jest polem podstawy, a $h = 10cm$ jest jego wysokością). Dla siły wyporu zachodzi równość $F_{\mathrm{vz}} = \varrho_{\mathrm{v}} V' g$, gdzie ϱ_{v} jest gęstością wody, V' jest objętością części, która jest zanurzona w wodzie (ponownie mamy $V' = Sh'$, gdzie h' jest wysokością zanurzonej części). Siły muszą być sobie równe, więc otrzymujemy

$$\varrho S h g = \varrho_{\mathrm{v}} S h' g \quad \Rightarrow \quad h' = h\frac{\varrho}{\varrho_{\mathrm{v}}} = 10\,\mathrm{cm} \cdot \frac{0{,}25\,\mathrm{g/cm^3}}{1\,\mathrm{g/cm^3}} = 2{,}5\,\mathrm{cm}\,.$$

Wysokość zanurzonej części korka wynosi 2,5 cm. To jednak nie oznacza, że znaleźliśmy różnicę w poziomach wody. Z rysunku widzimy, że cylindryczna objętość wody o promieniu 5 mm (taka sama jak rurka) i wysokość h_1 zmieniają się w pierścień o średnicy wewnętrznej równej 4 mm, średnicy zewnętrznej 5 mm i wysokości $h' = 2{,}5\,\mathrm{cm}$. Ponieważ woda jest nieściśliwa, jej objętość nie może się zmienić. Więc dostaliśmy

$$\pi \cdot (5\,\mathrm{mm})^2\, h_1 = \pi \cdot \left[(5\,\mathrm{mm})^2 - (4\,\mathrm{mm})^2\right] \cdot 25\,\mathrm{mm} \quad \Rightarrow$$

$$h_1 = 25\,\mathrm{mm} \cdot \frac{(5\,\mathrm{mm})^2 - (4\,\mathrm{mm})^2}{(5\,\mathrm{mm})^2} = 9\,\mathrm{mm}\,.$$

Z rysunku widzimy, że zmiana poziomu wody wynosi $25\,\mathrm{mm} - h_1 = 16\,\mathrm{mm}$, a więc poziom wody wzrośnie o 16 mm.

Zadanie 33 ... podzielności

Aleksandra wypisała wszystkie liczby całkowite od 2 *do* 100*, które nie są podzielne ani przez* 2*, ani przez* 3*, ani przez* 5*. Zauważyła, że wiele z nich to liczby pierwsze, ale nie wszystkie. Policz sumę tych liczb wypisanych przez Aleksandrę, które nie są pierwsze.*

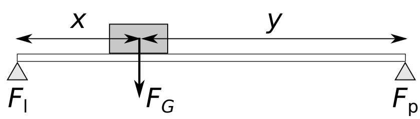
Każdy składnik szukanej sumy można zapisać jako iloczyn co najmniej dwóch liczb pierwszych. Oczywiście w tym iloczynie nie może występować, żaden czynnik 2, 3 ani 5. Możliwymi czynnikami są 7, 11, 13, 17...

Zauważmy, że najmniejszym iloczynem w którym występuje czynnik 17 jest $7 \cdot 17 = 119 > 100$. Stąd możemy używać tylko czynników 7, 11 i 13, ale musimy uważać, aby iloczyn nie wyszedł za duży. Iloczyn trzech lub większej liczby czynników to co najmniej $7^3 = 343$, więc zostają tylko iloczyny dwóch czynników. Jeśli będą dwa czynniki większe od 10, to iloczyn będzie większy od 100. Pozostają trzy iloczyny $7^2 = 49$, $7 \cdot 11 = 77$ oraz $7 \cdot 13 = 91$. Suma tych liczb $49 + 77 + 91 = 217$ jest szukaną sumą.

Zadanie 34 ... cegła

Andrzej kupił unikalną, jednorodną cegłę o wadze 32 kg*, której wymiary wynoszą* 10 cm*,* 20 cm *i* 25 cm*. Chciał ją umieścić na półce w swoim pokoju. Półka ma 1 metr długości i jest wystarczająco mocna, jej wagę pomijamy. Jest ona przytwierdzona do ściany w dwóch punktach znajdujących się na jej końcach, z których każdy ma nośność tylko* 20 kg*. Dlatego Andrzej nie może położyć cegły w dowolnym miejscu na półce. Jaka jest najmniejsza możliwa odległość boku cegły od lewego końca półki (patrz rysunek)?*

Cegła działa na półkę z siłą ciężaru w miejscu poniżej środka masy w kierunku bezpośrednim w dół. Wielkość tej siły wynosi $F_G = Mg$, gdzie $M = 32\,\mathrm{kg}$ jest masą cegły oraz g jest przyśpieszeniem grawitacyjnym. Wsporniki działają z siłami F_l i F_p na każdym końcu w przeciwnym kierunku i łącznie równoważą siłę ciężaru cegły (czyli $F_\mathrm{l} + F_\mathrm{p} = F_G$). Jeśli cegła znajduje się najbliżej lewego wspornika zakładamy, że ten wspornik jest maksymalnie obciążony, co oznacza $F_\mathrm{l} = mg$, gdzie $m = 20\,\mathrm{kg}$ to tonaż wspornika. Z powyższych równań możemy określić siły F_l i F_p, ale nie pozycję cegły. Pomocny jest brak obrotu: ponieważ półka/konstrukcja jest w spoczynku (nie porusza się), a zatem nie obraca się wokół prawego wspornika. Krótko mówiąc, całkowity moment sił F_G, F_l i F_p musi wynosić zero w stosunku do prawego wspornika.



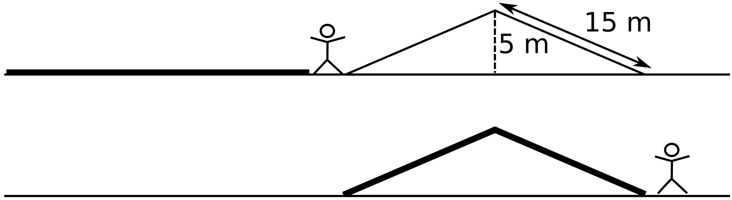
Siła F_p działa bezpośrednio na prawy spornik, a zatem jej moment obrotu odnoszący się do tego wspornika jest równy zero. Niezerowe są momenty obrotowe F_G i F_l. Oznaczmy d długość półki i odległość środka ciężkości cegły od lewego wspornika jako x, a następnie:

$$F_\mathrm{l}d = F_G(d-x) \quad \Rightarrow \quad x = \frac{F_G d - F_\mathrm{l} d}{F_G} = \frac{(M-m)gd}{Mg} = \frac{M-m}{M}d = \frac{32\,\mathrm{kg} - 20\,\mathrm{kg}}{32\,\mathrm{kg}} \cdot 1\,\mathrm{m} = 0{,}375\,\mathrm{m}\,.$$

Aby Andrzej miał jedną stronę cegły jak najbliżej lewego wspornika, musi umieścić ją na najdłuższym boku, który ma 25 cm długości. Robiąc to przybliża cegłę o połowę długości boku bliżej lewego końca półki, czyli o 12,5 cm, więc uzyskana odległość wynosi 37,5 cm − 12,5 cm = = 25 cm.

Zadanie 35 ... wąż strażacki

Strażacy zawsze prawidłowo osuszają swoje węże wodne. Wolontariusz Sam robi to w taki sposób, że opróżnia mokry wąż, który leżąc na ziemi ma 30 m *długości i waży* 60 kg*. Następnie przenosi go na konstrukcję w kształcie piramidy, której wysokość wynosi* 5 m*, a każde z ramion ma* 15 m *długości. Jeśli pominiemy tarcie, jaką pracę wykonujemy kładąc wąż na konstrukcji?*



Jeśli nie uwzględnimy tarcia, siła ciężkości jest jedyną siłą, którą Sam musi przezwyciężyć. Ta równoważona jest przez reakcję maty. Na przykład na poziomej macie hipotetycznie Sam nie wykonywałby żadnej pracy, ale na przechylonej macie już tak. Siła ta zmienia się jednak w czasie, gdy zmienia się waga węża znajdującego się na piramidzie. Zamiast długich obliczeń sił, lepiej jest myśleć o energiach. Praca W wykonana przez Sama przeciwko sile ciężkości musi przekształcić się w potencjalną energię węża. Jeśli weźmiemy pod uwagę, że początkowa energia potencjalna ma wartość zero, a po tym jak wąż znajduje się na piramidzie, ma energię $E_\mathrm{p} = mgh$, gdzie $m = 60\,\mathrm{kg}$ jest wagą węża, g jest przyspieszeniem grawitacyjnym, a h jest wysokością środka ciężkości węża. Zaskakująco łatwo jest znaleźć taką wysokość. Dzielimy wąż na dwie gałęzie o środkach masy na połowie ich długości, czyli $h = 5\,\mathrm{m}/2 = 2{,}5\,\mathrm{m}$ powyżej maty. Szukany środek ciężkości węża jest zatem na tej samej wysokości, więc energia potencjalna i praca wykonana przez Sam jest równa:

$$W = E_\mathrm{p} = mgh = 60\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} \cdot 2{,}5\,\mathrm{m} = 1\,500\,\mathrm{J} = 1{,}5\,\mathrm{kJ}\,.$$

Sam musi wykonać pracę równą 1,5 kJ.

Zadanie 36 ... lody

Sprzedawca lodów zauważył, że latem 7 *dzieci kupuje lody codziennie,* 6 *dzieci kupuje lody co drugi dzień, a* 3 *dzieci kupuje co trzeci dzień. Pierwszego i drugiego dnia lata sprzedawca sprzedał po* 11 *lodów. Trzeciego dnia sprzedał* 12 *lodów. Ile lodów sprzedał czwartego dnia?*

Ważne jest, aby zauważyć, że nie znamy dokładnego dnia, w którym poszczególne dzieci zaczynają jeść swoje lody. Do tej pory wiemy tylko, że niektóre z nich jedzą lody codziennie. Możemy odjąć tę liczbę od ilości lodów sprzedawanych przez sprzedawcę w ciągu pierwszych trzech dni. Dlatego dzieci jedzące lody co drugi dzień lub co trzeci dzień spożywały 4 lody pierwszego i drugiego dnia, a 5 z nich trzeciego dnia. W sumie te dzieci zjadły 13 lodów. Każde dziecko jedzące lody co trzeci dzień kupiło dokładnie jednego loda przez trzy dni. Ponieważ 3 dzieci je swoje lody co trzeci dzień, 10 pozostałych lodów sprzedawanych przez sprzedawcę musiało być spożywanych przez dzieci jedzące lody co drugi dzień. Niektóre z tych dzieci kupiły swoje lody dwukrotnie (pierwszego i trzeciego dnia), a pozostałe tylko raz (drugiego dnia). Przypominamy, że w sumie jest 6 takich dzieci. Jeśli oznaczymy przez x liczbę dzieci, które zjadły lody pierwszego i trzeciego dnia, możemy zapisać powyższą informację jako równanie

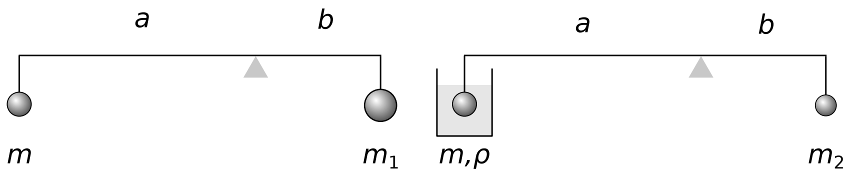
$$10 = 2x + (6 - x) \quad \Rightarrow \quad x = 4\,.$$

Ta czwórka dzieci kupiła lody trzeciego dnia, dlatego nie kupi lodów czwartego dnia. Biorąc pod uwagę, że dzieci, które jedzą lody co drugi lub trzeci dzień, zjadały 4 z nich pierwszego dnia, dochodzimy do wniosku, że żadne dziecko, które je co trzeci lody nie kupiło lodów w pierwszym (ani w czwartym) dniu. W rezultacie, czwartego dnia będzie tylko dwoje dzieci, które jedzą swoje lody co drugi dzień, oraz 7 dzieci jedzących lody codziennie. Sprzedawca sprzedał więc tylko $7 + 2 = 9$ lodów.

Zadanie 37 ... gęstościomierz

Iza ma metalową kulę o nieznanej gęstości. Zbudowała więc przyrząd do jej pomiaru, który nazwała gęstościomierzem. Wygląda on jak dźwignia podparta niesymetrycznie. Z jednej strony zawieszona jest badana kula (patrz rysunek), z drugiej strony dźwignia równoważona jest dodatkową masą 100 g. *Następnie Iza zanurza kulę całkowicie w wodzie i ponownie równoważy dźwignię, tym razem przy pomocy masy* 80 g. *Jaka jest gęstość ϱ kuli badanej przez Izę?*

Oznaczamy jako a odległość między kulą a punktem podparcia dźwigni przed zanurzeniem, oraz jako b odległość między kulą a punktem podparcia dźwigni po zanurzeniu badanej kuli w wodzie. Niech m będzie masą kuli badanej przez Izę, ϱ jej gęstością, a $m_1 = 100\,\mathrm{g}$ i $m_2 = 80\,\mathrm{g}$ masami równoważącymi dźwignię (patrz rysunek).



Jeśli gęstościomierz jest w równowadze, to momenty sił, przez które kulka i obciążniki działają na gęstościomierz, muszą być sobie równe. Najpierw kulka znajduje się w powietrzu, oznacza to, że $mga = m_1gb$. Dzieląc równania przez przyspieszenie ziemskie otrzymujemy $ma = m_1b$. Gdy kulka zostaje zanurzona w wodzie (o gęstości ϱ_v), siła, która pochodzi od kulki, zmniejsza siłę wyporu o $\varrho_v Vg$, gdzie $V = m/\varrho$ jest objętością kuli. Równowaga momentów sił wygląda wtedy następująco:

$$(mg - \varrho_\mathrm{v} V g)\, a = m_2 g b \quad \Rightarrow \quad \left(m - m\frac{\varrho_\mathrm{v}}{\varrho}\right) a = m_2 b\,.$$

Możemy wyliczyć m i zastąpić je pierwszym równaniem ($m = m_1b/a$). Mamy wtedy

$$\frac{m_1 b}{a}\left(1 - \frac{\varrho_\mathrm{v}}{\varrho}\right) a = m_2 b\,.$$

Zarówno a jak i b skracają się, więc po podzieleniu obu stron równości przez m_1 otrzymujemy

$$\left(1 - \frac{\varrho_\mathrm{v}}{\varrho}\right) = \frac{m_2}{m_1} = \frac{80\,\mathrm{g}}{100\,\mathrm{g}} = 0{,}8\,.$$

Przyrównując do siebie prawą i lewą stronę dostajemy stosunek gęstości $\varrho_v/\varrho = 0{,}2$, skąd otrzymujemy, że gęstość kuli badanej przez Izę wynosi $\varrho = \varrho_v 0{,}2 = 5\,000\,\mathrm{kg/m^3}$.

Zadanie 38 ... kłamca

Organizatorzy Náboj Junior myślą o pewnej liczbie. Ewa twierdzi, że jeśli odejmie 1 *od tej liczby, a wynik podzieli przez* 3*, to dostanie kwadrat pewnej liczby. Łukasz mówi, że liczba jest podzielna przez* 3*, a Kuba deklaruje, że jest to liczba pierwsza, a suma jej cyfr wynosi* 10*. O jakiej najmniejszej liczbie mogli pomyśleć? Uważaj, jedno z nich kłamie!*

Niech x oznacza nieznaną liczbę. Ewa twierdzi, że $x - 1$ jest podzielna przez 3 (ponieważ wynikiem jest znowu liczba naturalna). Jednak Łukasz mówi, że x samo jest podzielne przez 3. Dlatego jedno z nich kłamie.

Ponadto Kuba mówi, że suma cyfr x wynosi 10. Oznacza to, że według niego x nie jest podzielna przez 3, ponieważ suma cyfr nie jest podzielna przez 3. W podzielności Kuba i Ewa zgadzają się, stąd Łukasz jest niewątpliwie kłamcą, a x nie jest podzielny przez 3. W konsekwencji z twierdzenia Ewy x ma postać $x = 3n^2 + 1$, gdzie n jest pewna liczbą naturalną.

Jeśli x jest także liczbą pierwszą, wówczas $3n^2$ musi być parzyste (w przeciwnym razie x by było i nie byłoby pierwsze). Zatem n jest parzyste, co możemy zapisać jako $n = 2m$, gdzie m jest kolejną liczbą naturalną. Jeśli zastąpimy w równaniu x, otrzymamy

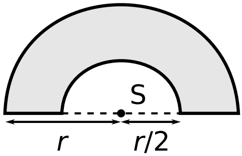
$$x = 3n^2 + 1 = 3 \cdot (2m)^2 + 1 = 12m^2 + 1\,.$$

Na podstawie tego warunku sprawdzamy kandydatów na x dla małych m. Jeden po drugim dla $m = 1, 2, \ldots$ otrzymujemy $13, 49, 109, 193, \ldots$ Widzimy, że suma cyfr wynosi 10 dla liczby 109. Ta liczba spełnia wszystkie warunki Ewy i Kuby. Musimy jeszcze sprawdzić, czy 109 jest liczbą pierwszą.

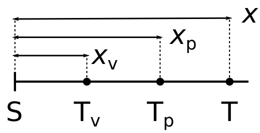
Ponieważ liczba jest nieparzysta, a suma jej cyfr wynosi 10, wykluczona jest podzielność przez liczby 2 i 3. Ostatnia cyfra to nie 5, a zatem nie można podzielić przez 5. Musimy sprawdzić niepodzielność 7 ręcznie (znamy wielokrotność 7 to $7 \cdot 10 + 7 \cdot 6 = 112$). Nie musimy sprawdzać podzielności przez dowolną inną liczbę pierwszą, ponieważ następna to 11 i wówczas mamy $11^2 = 121 > 109$. Stąd jeśli liczba 109 byłaby podzielna przez 11 lub większą liczbą pierwszą, musiałaby być również podzielna przez jedną ze sprawdzanych liczb. Najmniejsza liczba, o której mogli myśleć organizatorzy to 109.

Zadanie 39 ... półkole

Architekt Jan chciał narysować symetryczny most, więc próbował dowiedzieć się, gdzie będzie nowy środek ciężkości tekturowego półkola o promieniu r, jeśli wytniemy z niego półkole o promieniu długości połowy promienia większego półkola (patrz rysunek). Jan wiedział, że pierwotny środek ciężkości był odległy o $\frac{4r}{3\pi}$ od punktu S*. Jak daleko od punktu* S *będzie nowy środek ciężkości?*



Z symetrii osiowej wynika, że środek ciężkości pierwotnego półkola T_{p}, środek ciężkości mostu T, oraz środek ciężkości wyciętego półkola T_{v} są na linii, która dzieli każdy z tych trzech obiektów na takie same połówki, i przechodzi przez punkt S.



Z definicji wiemy, że wycięte półkole ma promień $r/2$, a więc jego środek ciężkości jest odległy o $a = 2r/3\pi$ od punktu S (połowa pierwotnej pozycji półkola $b = 4r/3\pi$). Zdefiniujmy c jako odległość środka ciężkości od punktu S.

Możliwe jest obliczenie środka ciężkości obiektów z wyciętymi częściami, ale my to zrobimy na odwrót. Jeśli połączymy pozycję mostu Jana i wyciętego półokręgu otrzymamy pozycję oryginalnego półkola!

Środek ciężkości mostu jest oddalony o $c-b$ od pierwotnego środka ciężkości półkola, podczas gdy środek ciężkości wyciętego półkola jest o $b - a = 2r/3\pi$ oddalony od tego samego punktu. Ponadto stosunek odległości między częściowymi środkami ciężkości a końcowym środkiem ciężkości jest odwrotnie proporcjonalny do stosunku ich mas, który można zapisać jako

$$\frac{c-b}{b-a} = \frac{m_{\mathrm{p}}}{m_{\mathrm{m}}},$$

gdzie m_{p} i m_{m} oznaczają odpowiednio masę półkola i mostu. Zwróćmy uwagę, że te masy są proporcjonalne do pól powierzchni tych obiektów.

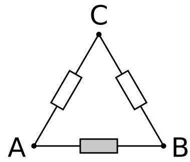
Powierzchnia wyciętego półkola to jedna czwarta całego obszaru pierwotnego półkola. Pozostałe trzy czwarte odpowiadają obszarowi mostu. Stąd stosunek mas wynosi $m_{\mathrm{p}} : m_{\mathrm{m}} = 1 : 3$. Jeśli podstawimy to w początkowym równaniu to otrzymamy relację dla zmiennej c:

$$\frac{c-b}{b-a} = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad c = b + \frac{b-a}{3} = \frac{4r}{3\pi} + \frac{\frac{2r}{3\pi}}{3} = \frac{14r}{9\pi}.$$

Środek masy mostu Jana jest oddalony o $14r/9\pi$ od punktu S, co wynosi około $0{,}5r$.

Zadanie 40 ... oporniki

Karolina dostała na urodziny trójkąt ABC *z trzema opornikami (patrz rysunek). Wartości oporów białych oporników są takie same, szary ma inny opór. Karolinie ta informacja nie wystarczyła, więc wzięła multimetr i podłączyła go do punktów* A *i* B *uzyskując wartość oporu* $6\,\Omega$*. Następnie podłączyła multimetr do punktów* A *i* C *i multimetr pokazał opór* $12\,\Omega$*. Jaki jest opór szarego opornika?*



Oznaczmy opór białego opornika przez R_b i opór szarego jako R_s. Oba z nich są do tej pory nieznane. Jeśli multimetr jest podłączony do punktów A i B, obwód mierzony ma białe rezystory szeregowo podłączone z szarym równolegle. Opór takiego obwodu wynosi $R_\mathsf{AB} = 6\,\Omega$ i może być obliczony następująco

$$\frac{1}{R_\mathsf{AB}} = \frac{1}{R_\mathrm{b} + R_\mathrm{b}} + \frac{1}{R_\mathrm{s}} \quad \Rightarrow \quad R_\mathsf{AB} = \frac{2R_\mathrm{b}R_\mathrm{s}}{2R_\mathrm{b} + R_\mathrm{s}}\,.$$

Jednak jeśli multimetr jest podłączony w A i C, szary rezystor i jeden z białych rezystory są połączone szeregowo, jeden biały rezystor jest podłączony do nich równolegle. Całkowita rezystancja $R_\mathsf{AC} = 12\,\Omega$ oblicza się z równania

$$\frac{1}{R_\mathsf{AC}} = \frac{1}{R_\mathrm{b} + R_\mathrm{a}} + \frac{1}{R_\mathrm{b}} \quad \Rightarrow \quad R_\mathsf{AC} = \frac{(R_\mathrm{b} + R_\mathrm{s})\,R_\mathrm{b}}{2R_\mathrm{b} + R_\mathrm{s}}\,.$$

Chociaż te równania wyglądają na proste, przegrupowanie nie jest takie łatwe. Jeśli zauważymy, że mianowniki po prawej stronie są takie same, to możemy wyrazić mianownik z pierwszego równania

$$2R_\mathrm{b} + R_\mathrm{s} = \frac{2R_\mathrm{b}R_\mathrm{s}}{R_\mathsf{AB}}\,,$$

i podstawić w drugim równaniu

$$R_\mathsf{AC} = \frac{(R_\mathrm{b} + R_\mathrm{s})\,R_\mathrm{b}}{\frac{2R_\mathrm{b}R_\mathrm{s}}{R_\mathsf{AB}}} = \frac{(R_\mathrm{b} + R_\mathrm{s})\,R_\mathrm{b}R_\mathsf{AB}}{2R_\mathrm{b}R_\mathrm{s}}\,.$$

Termin R_b jest w mianowniku, a także w liczniku, więc możemy go pominąć. Wówczas, po podzieleniu tego równania przez $R_\mathsf{AB}/2$ otrzymujemy

$$2 \cdot \frac{R_\mathsf{AC}}{R_\mathsf{AB}} = \frac{R_\mathrm{b} + R_\mathrm{s}}{R_\mathrm{s}} = 1 + \frac{R_\mathrm{b}}{R_\mathrm{s}}\,.$$

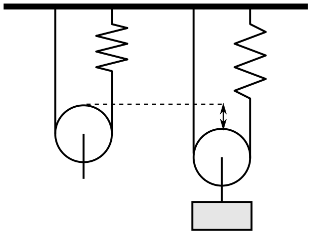
Lewa strona jest równa $2 \cdot 12\,\Omega/6\,\Omega = 4$, stąd (z prawej strony) $R_\mathrm{b}/R_\mathrm{s} = 3$ lub $R_\mathrm{b} = 3R_\mathrm{s}$. Zastępujemy w pierwszym równaniu opór R_AB:

$$R_\mathsf{AB} = \frac{2 \cdot 3R_\mathrm{s}R_\mathrm{s}}{2 \cdot 3R_\mathrm{s} + R_\mathrm{s}} = \frac{6R_\mathrm{s}^2}{7R_\mathrm{s}} \quad \Rightarrow \quad R_\mathrm{s} = \frac{7}{6}R_\mathsf{AB} = 7\,\Omega\,.$$

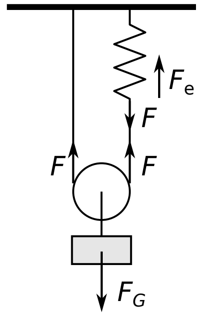
Stąd opór szarego rezystora wynosi $7\,\Omega$.

Zadanie 41 ... sprężyna

Jak bardzo bloczek na obrazku obniży się po przymocowaniu do niego ciężarka o masie 1,5 kg*? Długość nierozciągniętej sprężyny to* 20 cm*, a jej stała sprężystości wynosi* 25 N/m.



Zastanówmy się jakie siły działają na bloczek. Grawitacja działa w dół z siłą $F_G = 1{,}5\,\mathrm{kg}\cdot 10\,\mathrm{m/s^2} = 15\,\mathrm{N}$, dwie siły naciągu F działają w przeciwnym kierunku (patrz rysunek). Aby układ był w równowadze, czyli siła wywierana na bloczek była równa zeru, siły działające na bloczek muszą się wyrównywać. Stąd wyliczamy $F = F_G/2 = 7{,}5\,\mathrm{N}$.

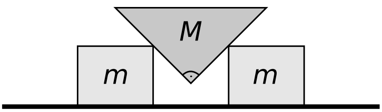


Siła naciągu F przechodzi wzdłuż sznurka i zwiększa długość sprężyny o x. Gdy sprężyna rozciąga się, powstaje siła sprężystości $F_e = kx$, gdzie $k = 25\,\mathrm{N/m}$ odpowiada współczynnikowi sprężystości sprężyny. Z równoważenia się sił otrzymujemy $F = F_e$, a następnie obliczamy $x = F/k = 0{,}3\,\mathrm{m} = 30\,\mathrm{cm}$. Innymi słowy ciężarek wydłuża sprężynę o 30 cm.

Jednakże bloczek obniża się o długość mniejszą niż x. Jest to proste do wyobrażenia[1], że wydłużenie sprężyny o x obniży blok o $x/2$, a więc o 15 cm.

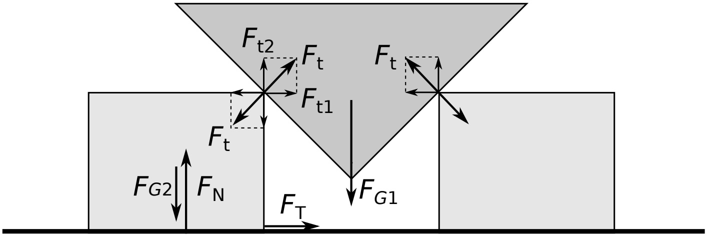
Zadanie 42 ... klin

Katarzyna znalazła dwa drewniane klocki o masie m każdy oraz klin o przekroju będącym trójkątem prostokątnym równoramiennym. Wzięła klin i umieściła go na klockach (patrz rysunek). Jaka jest maksymalna masa M, jaką może mieć klin, aby układ pozostał w równowadze? Współczynnik tarcia pomiędzy klockami a podłożem to f, zaś tarcie między klinem a klockami jest zaniedbywane.



Warunkiem koniecznym pozostania układu w równowadze jest równoważenie się sił działających na każdy z klocków. Inaczej mówiąc siła tarcia i siła reakcji podłoża muszą zrównoważyć także siłę nacisku klinu.

[1] Wyobraźmy sobie odwrotny przykład, tj. przypadek kiedy podnosimy blok o pewną długość a. Kawałki sznurka o długości a pojawiają się *po obu* stronach bloku, stąd wynika, że możemy skrócić sznurek o $2a$. W naszym przypadku, jeśli sznurek wydłużył się o b, blok obniży się o $b/2$.



Wszystkie istotne siły działające na układ zostały umieszczone na obrazku. Są trzy siły działające na klin. Jest siła grawitacji $F_{G1} = Mg$ oraz są dwie siły reakcji na siłę nacisku F_{t}, wywierane przez klocki na klin. Ze względu na to, że przekrój poprzeczny klina jest trójkątem prostokątnym, te siły działają pod kątem 45° do poziomu. Możemy rozdzielić te siły na ich składowe poziome i pionowe (patrz rysunek). Zauważmy, że siła F_{t} i jej składowe tworzą trójkąt prostokątny, w którym przyprostokątne tworzą kąt 45° z przeciwprostokątną, a zatem jest to trójkąt równoramienny. Stąd wielkość obu sił składowych ($F_{\mathrm{t}1}$ i $F_{\mathrm{t}2}$) jest taka sama.

Zauważmy, że poziome składowe redukują się wzajemnie, natomiast pionowe składowe dodają się a ich zwrot jest przeciwny do zwrotu siły F_{G1}.

Z równowagi sił otrzymujemy:

$$F_{G1} = 2F_{\mathrm{t}2} \quad \Rightarrow \quad F_{\mathrm{t}2} = F_{\mathrm{t}1} = \frac{F_{G1}}{2} = \frac{Mg}{2}\,.$$

Teraz przyjrzyjmy się siłom działającym na klocki. Ze względu na symetrię, wystarczy sprawdzić jeden z klocków, na przykład ten z lewej. Znowu rozważamy siły $F_{\mathrm{t}1}$ i $F_{\mathrm{t}2}$. Siła $F_{\mathrm{t}2}$ sumuje się z siłą grawitacji $F_{G2} = mg$ w kierunku pionowym. Mamy siłę reakcji F_{N} działająca w przeciwną stronę (inaczej klocek wgłębiałby się w podłoże). Stąd możemy zapisać $F_{\mathrm{N}} = F_{G2} + F_{\mathrm{t}2}$.

Tylko dwie siły działają w kierunku poziomym, a są to siła nacisku $F_{\mathrm{t}1}$ oraz siła tarcia F_{T}. Muszą się one wzajemnie równoważyć. To znaczy, że jeśli będziemy zwiększać masę klina, to siła tarcia również powinna wzrastać. Nie zapominajmy, że siła tarcia musi być zawsze tak duża, by całkowicie zrównoważyła inne siły działające w tym samym kierunku. W konsekwencji równoważenia się sił możemy zapisać dla drewnianego klocka $F_{\mathrm{T}} = fF_{\mathrm{N}} \geq F_{\mathrm{t}1}$. Po połączeniu zależności między F_{N}, $F_{\mathrm{t}1}$, $F_{\mathrm{t}2}$ i obiema siłami grawitacji, otrzymujemy:

$$f\left(F_{G2} + F_{\mathrm{t}2}\right) \geq F_{\mathrm{t}1} \quad \Rightarrow \quad f\left(mg + \frac{Mg}{2}\right) \geq \frac{Mg}{2}\,.$$

Zapiszmy tę nierówność w postaci $fmg \geq (1-f)\,Mg/2$. Jeśli $f \geq 1$, to $(1-f)$ jest ujemne i nierówność zachodzi dla dowolnego dodatniego M. Z fizycznego punktu widzenia oznacza to, że układ pozostaje w spoczynku dla dowolnej masy $M \geq 0$. Jeśli $f < 1$, to można z powyższej nierówności uzyskać ograniczenie na M. Wystarczy pomnożyć strony nierówności przez dodatni czynnik $2/g\,(1-f)$:

$$\frac{2fmg}{g\,(1-f)} \geq M \quad \Rightarrow \quad M \leq \frac{2fm}{(1-f)}\,.$$

Jeśli $f < 1$, to największa masa klina jest ograniczona przez $M \leq 2fm/(1-f)$. Jeżeli zaś $f \geq 1$, to jego masa jest nieograniczona.

Náboj Junior 2017

Brno – *Fakulta stroj. inženýrství VUT*
České Budějovice – *Gymnázium Jírovcova*
Česká Lípa – *Gymnázium Žitavská*
Frýdlant nad Ostravicí – *Gymnázium Frýdlant*
Hradec Králové – *Univerzita Hradec Králové*
Kadaň – *Sluníčková základní škola Kadaň*
K. Vary – *První české gymnázium v K. Varech*
Olomouc – *Gymnázium Olomouc-Hejčín*
Ostrava – *Gymnázium O. Havlové*
Písek – *SPŠ a VOŠ Písek*
Plzeň – *Gymnázium Mikulášské náměstí*
Praha – *Gymnázum Ch. Dopplera*
Praha – *Gymnázium Voděradská*
Sokolov – *Gymnázium a KVC Sokolov*
Třebíč – *Katolické gymnázium*
Ústí n. Labem – *Fak. soc. ekonomická UJEP*
Zlín – *Gymnázium Zlín-Lesní čtvrť*

Bánovce n. Bebr. – *Gymnázium J. Jesenského*
Banská Bystrica – *Gymnázium A. Sládkoviča*
Bratislava – *UPeCe sv. Jozefa Freinandemetza*
Brezno – *Gymnázium J. Chalupku*
Hlohovec – *Gymnázium I. Kupca*
Košice – *Gymnázium Alejová*
Levice – *Gymnázium A. Vrábla*
Lipt. Mikuláš – *Gymnázium M. M. Hodžu*
Lučenec – *CVČ Magnet*
Michalovce – *Gymnázium P. Horova*
Námestovo – *Gymnázium A. Bernoláka*
Nitra – *Gymnázium Párovská*
Partizánske – *Gymnázium Komenského*
Piešťany – *Gymnázium P. de Coubertina*
Poprad – *Gymnázium Kukučínova*
Prešov – *Gymnázium J. A. Raymana*
Prievidza – *Gymnázium V. B. Nedožerského*
Púchov – *Gymnázium Púchov*
Sučany – *Bilingválne gymnázium M. Hodžu*
Šurany – *Gymnázium Bernolákova*
Trenčín – *Piar. gymnázium J. Braneckého*
Trnava – *ZŠ s MŠ Spartakovská*
Trstená – *Gymnázium M. Hattalu*
Zvolen – *Gymnázium Ľ. Štúra*

Kraków – *Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński*

Propozycje problemów

Alžběta Andrýsková, Beata Czernecka, Martina Daňková, Jindřich Dušek, Lukáš Fusek, Simona Gabrielová, Robert Gemrot, Miroslav Jarý, Radek Kusek, Karolína Letochová, Viktor Materna, David Němec, Kateřina Rosická, Pavla Rudolfová, Jakub Sláma, Daniel Slezák, Petra Štefaníková, Kateřina Stodolová, Patrik Švančara, Pavla Trembulaková oraz Julie Weisová

Autorzy zadań i rozwiązań

Petra Hrubcová, Simona Gabrielová, David Němec, Jakub Sláma, Petr Šimůnek, Radka Štefaníková, Petra Štefaníková, Patrik Švančara oraz Pavla Trembulaková

Tłumacze

Beata Czernecka, Jakub Hluško, Katarína Marčeková, Radek Kusek, Mikuláš Polák oraz Karolina Szulc

Recenzenci

RNDr. Zdenka Baxová, PaedDr. Ľubomír Konrád oraz Tomáš Kremel