NÁBOJ junior

6. ročník

2017/18

Vzorové riešenia

výfuk

Trojsten

Ahojte,

práve sa Vám do rúk dostala brožúrka zadaní a riešení úloh súťaže Náboj Junior 2017. Náboj Junior je matematicko-fyzikálna súťaž pre štvorčlenné tímy žiakov druhého stupňa základných škôl a žiakov prímy až kvarty osemročných gymnázií. Súťaž trvá 120 minút, počas ktorých sa tímy snažia vyriešiť čo najviac úloh zameraných nielen na znalosti z matematiky a fyziky, ale aj na schopnosť pristupovať k úlohám inovatívne a s dôvtipom.

Dňa 24. novembra 2017 prebieha 6. ročník Náboja Junior v 24 mestách na Slovensku, v 17 mestách v Českej republike a v jednom meste v Poľsku V týchto slovenských mestách je súťaž organizovaná šikovnými stredoškolákmi, ktorí venujú svoj čas a energiu tomu, aby umožnili mladším žiakom z regióna zasúťažiť si a preveriť svoje vedomosti.

Cieľom Náboja Junior je rozvíjať nadanie detí v oblasti matematiky a fyziky a ukázať širokému spektru žiakov, že tieto prírodné vedy ukrývajú množstvo zaujímavostí, výziev a príležitostí. Ďalším cieľom je rozvíjanie organizačných schopností stredoškolákov, ktorí majú počas prípravy súťaže možnosť na vlastnej koži zažiť zábavné, ale aj náročné aspekty práce v tíme.

Súťaž Náboj Junior vznikla ako spoločný projekt občianskeho združenia Trojsten a korešpondenčného seminára MFF UK Výfuk. Členovia organizácií sú vysokoškolskí študenti Fakulty matematiky, fyziky a informatiky UK v Bratislave alebo Matematicko-fyzikální fakulty UK, ktorí sa snažia o rozvoj nadania študentov a záujmu o prírodné vedy.

Prajeme veľa šťastia pri počítaní,

o. z. Trojsten a seminár MFF UK Výfuk

Úloha 1 ... konečná

Do autobusu na východzej zastávke nastúpia traja ľudia. Na druhej zastávke jeden cestujúci vystúpi a päť ľudí nastúpi. Na tretej zastávke dve osoby vystúpia a štyri nastúpia. Na štvrtej zastávke nikto nevystúpi, ale naopak desať ľudí nastúpi. Na piatej zastávke vystúpili dve osoby a nastúpilo sedem osôb. Koľko cestujúcich najviac môže z autobusu vystúpiť na šiestej zastávke?

Zapíšme si úlohu číselne. Na východzej zastávke bol autobus pochopiteľne prázdny. Všetky nastupujúce osoby budeme teda pričítať a vystupujúce odčítať. Tým dostaneme výraz

$$0 + 3 - 1 + 5 - 2 + 4 - 0 + 10 - 2 + 7 = 24\,.$$

Teda 24 osôb cestovalo z piatej zastávky na šiestu, preto na šiestej zastávke mohlo vystúpiť nanajvýš 24 cestujúcich.

Úloha 2 ... hodiny

O akú časť kruhu sa otočí hodinová ručička za $40\,\mathrm{minút}$*?*

Platí tu jednoduchá priama úmernosť: pokiaľ ručička za hodinu opíše dvanástinu kruhu (lebo celý kruh opíše za 12 hodín), tak za $40\,\mathrm{min} = 2/3\,\mathrm{h}$ opíše $2/3 \cdot 1/12 = 1/18$ kruhu.

Úloha 3 ... zdravá výživa

Organizátori Náboja Junior raz jedli šalát. Vedia, že ingrediencie v ňom sú v pomeroch šalát : syr = = 3 : 2, syr : cibuľa = 5 : 6, cibuľa : paradajky = 3 : 2, paradajky : hrášok = 4 : 7. Koľko obsahuje šalát hrášku, keď naň použili $150\,\mathrm{g}$ *šalátu?*

Chceme zistiť pomer medzi šalátovými listami a hráškom. Tento vzťah dostaneme Keď vynásobíme všetky pomery. Tým sa vykrátia hmotnosti všetkých ingrediencií okrem šalátu a hrášku:

$$\frac{\text{šalát}}{\text{syr}} \cdot \frac{\text{syr}}{\text{cibuľa}} \cdot \frac{\text{cibuľa}}{\text{paradajky}} \cdot \frac{\text{paradajky}}{\text{hrášok}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{7} = \frac{15}{14}\,.$$

Keď teda vieme, že šalát váži $150\,\mathrm{g}$, tak pomocou trojčlenky dopočítame hmotnosť hrášku.

$$\text{hrášok} = \frac{14}{15} \cdot \text{šalát} = \frac{14}{15} \cdot 150\,\mathrm{g} = 140\,\mathrm{g}\,.$$

Na šalát sme potrebovali $140\,\mathrm{g}$ hrášku.

Úloha 4 ... sudoku

Vyriešte nasledujúce sudoku: do mriežky vpíšte čísla 1 *až* 4 *tak, aby platilo, že v každom riadku, stĺpci a zvýraznenom štvorci veľkosti* 2×2 *sú všetky čísla použité práve raz.*

	3	1	
4			
			1
	4	3	

Správnych postupov riešenia tejto úlohy je viacero, preto tu predvedieme iba jeden na ilustráciu. Na začiatok si jednotlivé riadky označíme postupne I, II, III a IV a podobne stĺpce označíme A, B, C, D.

Pokúsime sa najprv doplniť do mriežky číslice 1. Vidíme, že v riadkoch I a III už táto číslica je. Naviac vzhľadom k tomu, že sa nachádza v pravých štvorcoch 2×2, zužuje sa výber voľných políčok na BII a AIV. Následne analogickou úvahou doplníme číslicu 4 na pozície DI a CII.

Teraz môžeme doplniť číslicu 3, ktorá sa nachádza v stĺpcoch B a C. Vzhľadom k tomu, že v stĺpci B sa táto číslica nachádza vo vrchnej polovici mriežky, je možné napísať číslicu 3 len na políčko AIII. Analogický argument použijeme pri doplňovaní trojky na pozíciu DII. Na zvyšné miesta nakoniec vpíšeme číslicu 2 (viď obrázok).

Úloha 5 ... Tu/Lf

Lukáš sa cez víkend rozhodol, že vytvorí novú sústavu jednotiek. Ako prvú zaviedol novú jednotku času, ktorú skromne pomenoval po sebe, teda Lukáš, a vytvoril jej značku podľa svojich iniciálok, teda Lf. *Túto jednotku zadefinoval ako dobu, počas ktorej žmurkne, teda* $1\,\mathrm{Lf} = 0{,}1\,\mathrm{s}$. *Ďalej zadefinoval novú jednotku vzdialenosti, ktorú pomenoval po svojej kamarátke Terke (*Tu*), ktorá zodpovedá Terkinej výške, teda* $1\,\mathrm{Tu} = 1{,}8\,\mathrm{m}$. *Aká rýchlosť v týchto jednotkách (teda vyjadrené v* Tu/Lf*) zodpovedá maximálnej povolenej rýchlosti na diaľnici (tj.* $36\,\mathrm{m/s}$*)?*

Najprv si vyjadríme metre a sekundy podľa nových Lukášových jednotiek. Vieme, že $1\,\mathrm{Tu} = 1{,}8\,\mathrm{m}$, takže $1\,\mathrm{m} = 1/1{,}8\,\mathrm{Tu} = 10/18\,\mathrm{Tu}$. To isté spravíme aj s časom. Vieme, že $1\,\mathrm{Lf} = 0{,}1\,\mathrm{s}$, teda $1\,\mathrm{s} = 1/0{,}1\,\mathrm{Lf} = 10\,\mathrm{Lf}$. Nakoniec prepočítame rýchlosť $36\,\mathrm{m/s}$ do Tu/Lf:

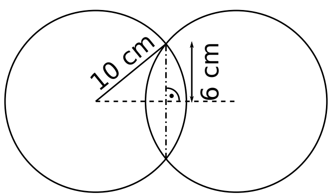
$$36\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 36 \cdot \frac{\frac{10}{18}\,\mathrm{Tu}}{10\,\mathrm{Lf}} = \frac{36\,\mathrm{Tu}}{18\,\mathrm{Lf}} = 2\,\mathrm{Tu/Lf}\,.$$

Rýchlosť $36\,\mathrm{m/s}$ teda zodpovedá rýchlosti $2\,\mathrm{Tu/Lf}$.

Úloha 6 ... okrúhla

Dve kružnice, každá s priemerom $20\,\mathrm{cm}$*, sa pretínajú vo dvoch bodoch vzdialených* $12\,\mathrm{cm}$*. V akej vzdialenosti sú ich stredy?*

Úsečka spájajúca priesečníky kružníc je kolmá na úsečku spájajúcu stredy týchto kružníc a okrem toho sa tieto úsečky navzájom rozpoľujú, pretože to sú uhlopriečky kosoštvorca so stranou rovnou polomeru kružnice.



Polovice týchto úsečiek sú tiež odvesnami pravouhlého trojuholníka s preponou o dĺžke polomeru kružnice (polovica priemeru, teda $10\,\mathrm{cm}$). Jedna z týchto odvesien je rovná polovici dĺžky vzdialenosti priesečníkov, teda 6 cm. Dĺžku druhej odvesny x dopočítame z Pytagorovej vety:

$$(10\,\mathrm{cm})^2 = \frac{x}{2}^2 + (6\,\mathrm{cm})^2 \quad \Rightarrow \quad x = 2\sqrt{(10\,\mathrm{cm})^2 - (6\,\mathrm{cm})^2} = 16\,\mathrm{cm}\,.$$

Vzdialenosť stredov kružníc je teda 16 cm.

Úloha 7 ... horúce brzdy

Nákladný vlak váži 1 200 t i pohybuje sa rýchlosťou 72 km/h. Vtom si rušňovodič všimne, že v koľaji leží spadnutý strom a začne prudko brzdiť. Koľko tepla by vzniklo, pokiaľ by sa všetka pohybová energia vlaku zmenila v jeho brzdách na teplo?

Stačí nám spočítať kinetickú (pohybovú) energiu vlaku. Pre ňu platí vzťah $E_k = mv^2/2$, kde m značí hmotnosť a v rýchlosť vlaku. Hmotnosť vlaku prevedieme na kilogramy (1 200 t = = 1 200 000 kg) a rýchlosť na metre za sekundu (72 km/h = 20 m/s):

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 1\,200\,000\,\mathrm{kg} \cdot (20\,\mathrm{m/s})^2 = 240\,000\,000\,\mathrm{J} = 240\,\mathrm{MJ}\,.$$

Teplo, ktoré by vzniklo zabrzdením vlaku, je 240 MJ.

Úloha 8 ... obvodová

Števko má obdĺžnik rozdelený na 4 menšie obdĺžniky s celočíselnými dĺžkami strán v cm, ktorých obsahy (v cm^2) sú zakreslené na obrázku. Aký je obvod Števkovho obdĺžnika?

18	15
24	20

Rozkladom zistíme spoločného deliteľa obsahov 18 cm^2 a 15 cm^2, čo je 3. Prvý obdĺžnik má teda rozmery 6 cm × 3 cm a druhý 3 cm × 5 cm. Tým pádom obdĺžnik s obsahom 24 cm^2 má rozmery 4 cm × 6 cm, nakoľko s prvým obdĺžnikom zdieľa hranu o dĺžke 6 cm. Rozmery posledného obdĺžnika sú tým pádom 4 cm × 5 cm.

Teraz už stačí iba sčítať dĺžky strán, ktoré prispievajú do obvodu celého obdĺžnika:

$$o = 2\,(a+b) = 2 \cdot [(6\,\mathrm{cm} + 5\,\mathrm{cm}) + (3\,\mathrm{cm} + 4\,\mathrm{cm})] = 36\,\mathrm{cm}\,.$$

Obvod Števkovko obdĺžnika je teda 36 cm.

Úloha 9 ... slaný kryštál

Chemička Zuzka si v rámci školského experimentu pestuje kryštál o hustote 2 g/cm^3. Kryštál má tvar kocky, no rastie dosť pomaly. Každá hrana kryštálu povyrastie za týždeň o jeden milimeter. Koľko týždňov musí čakať, aby jej kryštál vážil aspoň 16 g?

Objem V kryštálu Zuzkinej chemikálie s hmotnosťou požadovaných 16 g je jednoducho

$$V = \frac{16\,\mathrm{g}}{2\,\mathrm{g/cm^3}} = 8\,\mathrm{cm}^3\,.$$

Keďže vieme, že kryštál je kocka, je jeho objem treťou mocninou dĺžky jeho hrany. Treťou odmocninou z 8 je 2, preto je hrana požadovaného kryštálu dlhá $2\,\mathrm{cm} = 20\,\mathrm{mm}$. Keďže je rýchlosť rastu zadaná v milimetroch za týždeň, je potrebná doba rastu rovná 20 týždňov. Zuzka teda musí počkať 20 týždňov.

Úloha 10 ... sirup

Babička Irenka si vyrába sirup z malín a černíc zo svojej záhradky. Tento rok bola celkom bohatá úroda, nazbierala až 70 kg ovocia. Na liter malinového sirupu potrebuje 3 kg malín a na liter černicového sirupu 4 kg černíc. Koľko kilogramov černíc nazbierala, keď vieme, že spolu vyrobila $21\,\ell$ sirupu?

Označme si hmotnosť malín m_m a hmotnosť černíc $m_\text{č}$. Vieme že platí $m_\mathrm{m} = 70\,\mathrm{kg} - m_\text{č}$. Z malín vyrobíme $V_\mathrm{m} = m_\mathrm{m}/3\,\mathrm{kg}/\ell$ džúsu; analogicky z černíc vyrobíme $V_\text{č} = m_\text{č}/4\,\mathrm{kg}/\ell$ sirupu. Pre celkové množstvo vyrobeného sirupu platí $21\,\ell = V_\mathrm{m} + V_\text{č}$. Keď dosadíme objemy, dostaneme rovnicu:

$$21\,\ell = \frac{m_\mathrm{m}}{3\,\mathrm{kg}/\ell} + \frac{m_\text{č}}{4\,\mathrm{kg}/\ell} = \frac{70\,\mathrm{kg} - m_\text{č}}{3\,\mathrm{kg}/\ell} + \frac{m_\text{č}}{4\,\mathrm{kg}/\ell}\,.$$

Jednoduchou úpravou dostávame $m_\text{č} = 28\,\mathrm{kg}$.

Úloha 11 ... profilovka

Lucy chce mať novú profilovú fotku čo najenergickejšiu. Na jednej fotke stojí v Anglicku pri rieke Ouse v nadmorskej výške 20 m n. m. Na druhej ide na bicykli v Monaku (0 m n. m.). Akou rýchlosťou by musela ísť na bicykli na fotke z Monaka, aby bola jej celková energia v dobe fotení rovnaká?

Hodnotu rýchlosti, ktorou by musela Lucy ísť získame porovnaním potenciálnej energie E_p z fotky v Anglicku a kinetickej energie E_k z fotky z Monaka. Pokiaľ označíme m Lucyinu hmotnosť, $h = 20\,\mathrm{m}$ nadmorskú výšku v Anglicku a v hľadanú rýchlosť, získame

$$E_\mathrm{p} = E_\mathrm{k} \quad \Rightarrow \quad mgh = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} \cdot 20\,\mathrm{m}} = 20\,\mathrm{m/s}\,.$$

Aby bola Lucyina energia v dobe fotení rovnaká, musí ísť v Monaku rýchlosťou $20\,\mathrm{m/s} = 72\,\mathrm{km/h}$.

Úloha 12 ... zoznamka

V tábore bolo 40 chlapcov a 28 dievčat. Pri zoznamovacej hre sa všetky deti postavili do kruhu. 18 chlapcov malo vedľa seba po pravej ruke niektoré z dievčat. Koľko chlapcov malo dievča po ľavej ruke?

Dievčatá v krúžku sú rozmiestnené vždy v *skupinkách* obsahujúcich nejaký počet dievčat (tento počet môže byť aj jedna). Každá *skupinka* je potom ohraničená chlapcom zľava, ktorý drží krajné dievča za pravú ruku a chlapcom sprava, ktorý drží krajné dievča z tejto skupinky za ľavú ruku. Preto ak má 18 chlapcov dievča po pravej ruke, musí mať 18 chlapcov dievča po ľavej ruke.

Úloha 13 ... nádrž

Na stene vodnej nádrže sa vytvorila prasklina, z ktorej vodorovne vyteká prúd vody rýchlosťou 26 m/s*. Vplyvom tiažovej sily začne vytekajúci prúd vody padať smerom k zemi, teda okrem nemennej vodorovnej zložky rýchlosti začne v závislosti na čase t narastať jej zvislá zložka u, a to podľa vzťahu $u = gt$, kde g je gravitačné zrýchlenie.*

Po akom čase od momentu „vytečenia“ bude veľkosť zvislej zložky rovnaká ako veľkosť vodorovnej zložky?

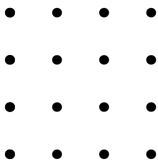
Keďže je vodorovná zložka rýchlosti nemenná, stačí položiť $u = 26\,\mathrm{m/s}$ (vtedy budú obe zložky rovnako veľké) a dosadiť do vzťahu pre časovú závislosť:

$$u = gt \quad \Rightarrow \quad t = \frac{u}{g} = \frac{26\,\mathrm{m/s}}{10\,\mathrm{m/s^2}} = 2{,}6\,\mathrm{s}\,.$$

Čas, kedy sú zložky rýchlosti rovnako veľké je 2,6 s.

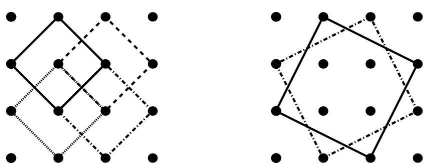
Úloha 14 ... štvorce

Koľko štvorcov vieme nakresliť do štvorcovej mriežky tak, aby všetky ich vrcholy ležali v jednom zo 16*-tich zakreslených bodov štvorcovej mriežky?*



Začnime počítať najzjavnejšie štvorce. Do mriežky vieme zakresliť 9 štvorčekov 1×1, 4 štvorce 2×2 a jeden štvorec 3×3, ktorý nám „obsadí“ celú mriežku.

To však nie sú všetky štvorce, pretože kolmé na sebe sú aj úsečky, ktoré spájajú body mriežky diagonálne. Do mriežky sa preto dajú zakresliť aj 4 štvorce s rozmermi $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$ a 2 štvorce s rozmermi $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$ (viď obrázok).



Spolu tak vieme do mriežky zakresliť $9 + 4 + 1 + 4 + 2 = 20$ rôznych štvorcov.

Úloha 15 ... rytiersky turnaj

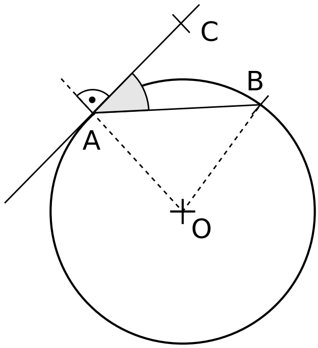
Kráľovná Alžbeta usporiadala rytiersky turnaj, v ktorom zvíťazí iba jediný: ten najrýchlejší, najsilnejší, najstatočnejší, najmúdrejší a najvtipnejší zo všetkých. Na turnaj sa prihlásilo celkovo 200 *rytierov zo širokého okolia. Rytieri vždy súperia vo dvojiciach, pričom práve jeden z dvojice postupuje ďalej. Ak však v nejakom kole nenájde jeden rytier protivníka, postupuje automaticky k ďalšej disciplíne. Koľko zápasov dvojíc sa na turnaji odohralo, ak na konci zostal jediný víťaz?*

V každom zápase vypadne jeden účastník turnaja. Aby zostal jediný víťaz, musí byť vyradených 199 rytierov. Na turnaji sa teda odohralo 199 zápasov.

Úloha 16 ... geometrická

Paťo si na kružnicu so stredom v bode O *nakreslil dva rôzne body* A *a* B*. Potom narysoval bod* C *taký, aby priamky* OA *a* CA *boli na seba kolmé. Nakoniec zmeral, že* $\measuredangle$CAB $= 42°$*. Ako veľký je uhol* $\measuredangle$AOB*?*

Začnime, ako inak, obrázkom.



Z obrázku vidíme, že uhol $\measuredangle$OAB je doplnkom uhlu $\measuredangle$CAB do $90°$ a má teda veľkosť $\measuredangle$OAB $=$ $= 90° - 42° = 48°$. Keďže sú body A a B na kružnici, je trojuholník ABO rovnoramenný a platí, že $\measuredangle$OAB $=$ $\measuredangle$OBA. Pretože je súčet vnútorných uhlov v trojuholníku vždy $180°$, pre veľkosť uhlu $\measuredangle$AOB platí $\measuredangle$AOB $= 180° - 2 \cdot 48° = 84°$.

Úloha 17 ... benzín

Vieme, že spaľovaním benzínu v motore získame $32\,\mathrm{MJ}$ *energie na liter benzínu, pričom iba polovicu z tejto energie vie motor premeniť na pohybovú energiu.*

Keď ideme v aute po diaľnici konštantnou rýchlosťou $110\,\mathrm{km/h}$ *(vtedy na auto pôsobí konštantná odporová sila vzduchu* $800\,\mathrm{N}$*) a máme v nádrži* $5\,\ell$ *benzínu, akú vzdialenosť prejdeme, než nám dôjde benzín?*

Využiteľná energia benzínu zodpovedá práci, ktorú musí auto vynaložiť na prejdenie danej dráhy. Táto práca je rovná súčinu prejdenej dráhy s a sily, ktorú musí motor vynakladať, čo je odporová sila pôsobiaca na auto (motor musí túto silu prekonávať).

Celkovú využiteľnú energiu, ktorú spaľovaním benzínu získame, vypočítame ako:

$$E = \frac{1}{2} \cdot 32\,\mathrm{MJ}/\ell \cdot 5\,\ell = 80\,\mathrm{MJ}\,.$$

Z tejto energie už spočítame prejdenú dráhu:

$$s = \frac{E}{F} = \frac{80\,\mathrm{MJ}}{800\,\mathrm{N}} = \frac{80\,000\,000\,\mathrm{J}}{800\,\mathrm{N}} = 100\,000\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{km}\,.$$

Než autu dôjde benzín, prejde dráhu $100\,\mathrm{km}$.

Úloha 18 ... oriešky v čokoláde

Paulínka bola na hodoch a do sýtosti sa povozila na kolotoči. Keď ju prešlo točenie hlavy, zbadala pred sebou stánok s cukrovou vatou. A orieškami v čokoláde! Oriešky dostala v peknom modrom papierovom kornútiku, no nevie, koľko ich tam je. Vie však, že výška kornútu je 24 cm *a polomer podstavy* 8 cm*. Tiež vie, že objem jedného orieška je* $0{,}2\pi\,\mathrm{cm}^3$ *a že oriešky zaberajú* 50 % *objemu kornútika – zvyšok je vzduch. Koľko orieškov si vlastne Paulínka kúpila?*

Objem kužeľa je $V = \pi r^2 h/3$, kde $r = 8\,\mathrm{cm}$ je polomer podstavy kužeľa a $h = 24\,\mathrm{cm}$ je jeho výška. Polovica jeho objemu, ktorú zaberajú oriešky, je teda

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{1\,536\pi}{6}\,\mathrm{cm}^3 = 256\pi\,\mathrm{cm}^3\,.$$

Tento objem vydelíme objemom jedného oriešku, čím získame ich počet v kornúte:

$$\frac{256\pi\,\mathrm{cm}^3}{0{,}2\pi\,\mathrm{cm}^3} = \frac{256\cdot 10}{2} = 1\,280\,.$$

Do kornútu sa teda vojde 1 280 orieškov.

Úloha 19 ... ľadár

Ako funguje mraznička asi viete. No v minulosti to nebolo také jednoduché, najmä tá časť procesu, kde je treba mrazničku zapojiť do elektriny. V mestách boli ľadovne – sklady ľadu (často sa využívali i jaskyne), kam sa v zime uskladnil ľad a vydržal až do leta. A keď potreboval mäsiar ľad do svojej mrazničky (spravidla podzemná jama), dal iba vedieť miestnemu ľadárovi, koľko ho treba.

Ľadár mu dodáva ľad o teplote $-10\,^\circ\mathrm{C}$ *s hmotnostnou tepelnou kapacitou* $2\,\mathrm{kJ/kg{\cdot}^\circ C}$ *a mäsiar chce ochladiť priestor o objeme* $200\,\mathrm{m}^3$ *(svoj mrazák), ktorý obsahuje iba vzduch s hustotou* $1{,}2\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ *a hmotnostnou tepelnou kapacitou* $1\,\mathrm{kJ/kg{\cdot}^\circ C}$ *z pôvodnej teploty* $20\,^\circ\mathrm{C}$*. Koľko najmenej ľadu si potrebuje objednať, keď chce, aby sa ľad po uzavretí a schladení priestoru nezačal roztápať? Predpokladajte, že ľad nezaberá miesto v mrazničke, má vyhradený svoj ďalší priestor.*

Predpoklad, že ľad sa neroztopí nám hovorí, že teplota na konci bude $0\,^\circ\mathrm{C}$. Pokiaľ by totiž bola v mrazničke konečná teplota nižšia, bolo by v ňom zbytočne veľa ľadu, naopak pokiaľ by bola konečná teplota vyššia, časť ľadu by sa roztopila. Pretože neuvažujeme energetické straty, platí, že teplo, ktoré ľad prijme behom ohriatia z $-10\,^\circ\mathrm{C}$ na $0\,^\circ\mathrm{C}$, sa musí rovnať teplu, ktoré odovzdá vzduch mrazáku.

Pre prijaté aj odovzdané teplo platí, že je rovné súčinu hmotnosti, zodpovedajúcej hmotnostnej tepelnej kapacity a zmeny teplôt. Zmena teploty ľadu je $10\,^\circ\mathrm{C}$ a zmena teploty vzduchu je $20\,^\circ\mathrm{C}$. Hmotnosť vzduchu v mrazničke spočítame jednoducho zo vzorca $m = V\varrho = 200\,\mathrm{m}^3\cdot 1{,}2\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}} = 240\,\mathrm{kg}$. Keď si označíme hmotnosť ľadu m, vieme písať rovnosť prijatého a odovzdaného tepla:

$$m\cdot 2\,\mathrm{kJ/kg{\cdot}^\circ C}\cdot 10\,^\circ\mathrm{C} = 240\,\mathrm{kg}\cdot 1\,\mathrm{kJ/kg{\cdot}^\circ C}\cdot 20\,^\circ\mathrm{C} \quad\Rightarrow\quad m = \frac{240\,\mathrm{kg}\cdot 1\,\mathrm{kJ/kg{\cdot}^\circ C}\cdot 20\,^\circ\mathrm{C}}{2\,\mathrm{kJ/kg{\cdot}^\circ C}\cdot 10\,^\circ\mathrm{C}} = 240\,\mathrm{kg}\,.$$

Potrebná hmotnosť ľadu je 240 kg.

Úloha 20 ... numizmatická

Marianka sa prechádzala po povale, kde našla dedkovu starú truhlicu s množstvom mincí akejsi prastarej meny o nominálnych hodnotách 5, 9 a 12. Prišla na to, že pokiaľ by platila týmito mincami v obchode a predavač by jej nemal čím vrátiť, niektoré čiastky by nemala možnosť zaplatiť presne. Koľko je takýchto čiastok?

Zo zadaných hodnôt očividne nemôžeme dostať hodnoty 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11, 13 a 16. Potom si všimneme, že kombináciou mincí z truhly vieme zaplatiť rad piatich čiastok (17, 18, 19, 20 a 21). Všetky vyššie čiastky potom idú zaplatiť napríklad tým, že budeme pridávať mincu 5. Nemôžeme teda presne zaplatiť iba 10 hodnôt.

Úloha 21 ... plť

Ťažký náklad sa kedysi po riekach dopravoval na pltiach. Akú maximálnu hmotnosť môže mať náklad, ktorý unesie plť vyrobená z 10 valcových klád dlhých 5 m s priemerom 20 cm, aby sa náklad nenamočil? Uvažujte, že prázdna plť má pod hladinou tri pätiny svojho objemu.

Na plť môžeme nakladať, pokiaľ sa celá nepotopí. Vtedy sa vztlaková sila celkove ponorenej plti F_{vz} bude rovnať súčtu tiažovej sily klád F_{k}, z ktorých je plť vyrobená a a tiažovej sily nákladu F_{n}:

$$F_{\mathrm{vz}} = F_{\mathrm{k}} + F_{\mathrm{n}}\,.$$

Vztlakovú silu plte vypočítame z jej objemu $V = n\pi r^2 l$, kde n je počet klád, r je polomer jednej klady a l je jej dĺžka, hustoty vody ϱ a tiažového zrýchlenia g:

$$F_{\mathrm{vz}} = V\varrho g = n \cdot \pi r^2 l \varrho g\,.$$

Tiažovú silu klád F_{k} určíme z poznatku, že prázdna plť je ponorená do 3/5 svojho objemu (teda na ňu pôsobí vztlaková sila $3F_{\mathrm{vz}}/5$):

$$F_{\mathrm{k}} = \frac{3}{5} F_{\mathrm{vz}}\,.$$

Dosadením do prvej rovnice zisťujeme, že platí $F_{\mathrm{n}} = 2F_{\mathrm{vz}}/5$. Maximálnu hmotnosť nákladu zistíme nasledovne:

$$m = \frac{F_{\mathrm{n}}}{g} = \frac{2}{5} \cdot n \cdot \pi r^2 l \varrho\,.$$

Odtiaľ číselným dosadením dostávame

$$m = \frac{2}{5} \cdot 10 \cdot \pi \cdot (0{,}1\,\mathrm{m})^2 \cdot 5\,\mathrm{m} \cdot 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} = 200\pi\,\mathrm{kg} \doteq 628\,\mathrm{kg}\,.$$

Plť uvezie náklad maximálnej hmotnosti 628 kg.

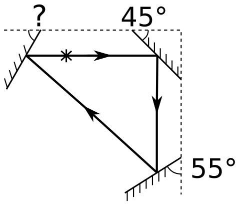
Úloha 22 ... maslová

Šviho si dá každý deň na raňajky maslo. Novú kocku masla načal 6. 11. Dnes (24. 11.) po raňajkách zistil, že všetky tri rozmery kocky masla majú 2/3 pôvodnej hodnoty. Kedy Šviho doje túto kocku masla, keď vieme, že každý deň zje rovnaké množstvo?

Súčasný objem masla činí $(2/3)^3 = 8/27$ pôvodného objemu maslovej kocky. Šviho teda dodnes, čomu odpovedá 19 raňajok, zjedol $1 - 8/27 = 19/27$ pôvodného objemu masla. Z toho vyplýva, že Šviho každý deň zje 1/27 objemu masla. Zvyšný objem masla teda Švihovi postačí ešte na 8 dní, pričom prvým z nich je 25. 11. Kocku preto doje 2. decembra.

Úloha 23 ... cyklická

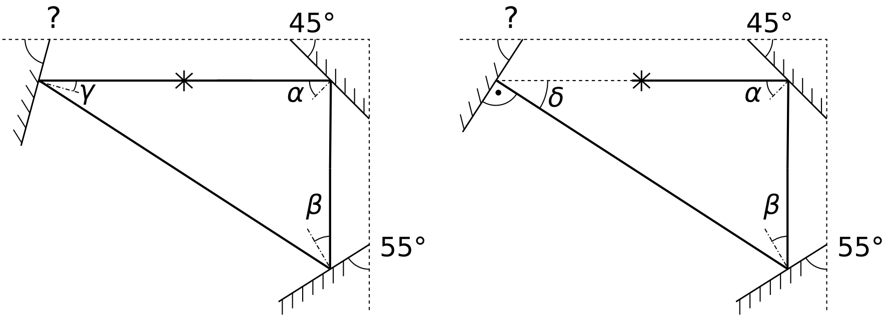
Bubu si vymyslel novú hračku, ktorá sa skladá z troch zrkadiel. Prvé zviera s vodorovným smerom uhol $45°$*, druhé zviera so zvislým smerom uhol* $55°$ *(ako na obrázku). Laserový zväzok vystupuje z laseru rovnobežne s vodorovným smerom. Ako má Bubu nastaviť tretie zo zrkadiel (teda aký veľký je uhol označený ?), aby lúč dopadal na zdroj žiarenia, rovnobežne s vodorovným smerom?*



Označme si α, β, γ uhly dopadu na jednotlivé zrkadlá (viď obrázok vľavo), pričom vieme, že pri každom zrkadle musia byť rovnako veľké aj príslušné uhly odrazu.

Pokiaľ uhol α je doplnkový k uhlu náklonu zrkadla, tak vieme jeho veľkosť dopočítať ako $\alpha = 90° - 45° = 45°$. Rovnakým spôsobom zistíme aj veľkosť uhlu β: $\beta = 90° - 55° = 35°$. Pretože súčet všetkých uhlov v trojuholníku tvorenom laserovým lúčom je $180°$, dopočítame $2\gamma = 180° - 2\alpha - 2\beta = 20\,°$, teda $\gamma = 10°$.

Uhol naklonenia tretieho zrkadla je potom opäť vďaka striedavému uhlu rovný $90° - \gamma = 80°$.

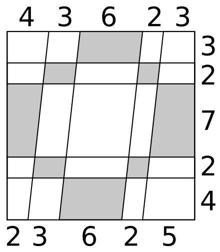


Druhým variantom je, že sa budeme snažiť o kolmý odraz na treťom zrkadle, čím odrazený lúč pošleme do zdroja rovnakou cestou akou z neho prišiel (viď obrázok vpravo).[1] Opäť zo súčtu vnútorných uhlov trojuholníka dostávame $\delta = 180° - 2\alpha - 2\beta = 20°$ a z vlastností doplnkových uhlov získame pre náklon tretieho zrkadla uhol $90° - \delta = 70°$.

Úloha 24 ... plošná

Vypočítajte celkový obsah šedých častí na obrázku. Čísla zodpovedajú dĺžkam jednotlivých úsekov na obvode štvorca v cm.

[1] Je to netradičné, ale každopádne správne riešenie.



Jedná sa väčšinou o rovnobežníky, u ktorých sa dá spočítať obsah pomocou vzťahu $S = av_a$, kde v_a je výška na stranu a. Jediná zmena je u útvarov v strede naľavo a napravo, kde sa jedná o lichobežníky. Všimnime si, že „pravý“ stĺpec môžeme presunúť vedľa „ľavého“ stĺpca, čím z týchto dvoch lichobežníkov vznikne opäť rovnobežník. Keďže teraz poznáme veľkosť jednej strany a k nej príslušné výšky u všetkých lichobežníkov, môžeme celkový obsah spočítať ako

$$S = 6 \cdot 3\,\mathrm{cm}^2 + 3 \cdot 2\,\mathrm{cm}^2 + 2 \cdot 2\,\mathrm{cm}^2 + (2+5) \cdot 7\,\mathrm{cm}^2 + 3 \cdot 2\,\mathrm{cm}^2 + 2 \cdot 2\,\mathrm{cm}^2 + 6 \cdot 4\,\mathrm{cm}^2 = 111\,\mathrm{cm}^2 .$$

Súčet šedých obsahov je $111\,\mathrm{cm}^2$.

Úloha 25 ... vodopád

Terka si chce na záhrade postaviť malý vodopád vysoký $1\,\mathrm{m}$ s prietokom $10\,\ell/\mathrm{s}$. Aký výkon musí mať čerpadlo prečerpávajúce vodu z jazierka pod vodopádom do nádrže nad ním? Vnútorné trenie v kvapaline zanedbajte.

Aby bol prietok vodopádu $10\,\ell/\mathrm{s}$, čerpadlo musí za $1\,\mathrm{s}$ vyčerpať do výšky $10\,\ell$ (teda $10\,\mathrm{kg}$) vody. Inými slovami, musí tejto vode dodať potenciálnu energiu $10\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s}^2 \cdot 1\,\mathrm{m} = 100\,\mathrm{J}$. Keďže energia (tu $100\,\mathrm{J}$) za čas ($1\,\mathrm{s}$) zodpovedá výkonu, Terkino čerpadlo musí mať výkon $100\,\mathrm{J/s} = 100\,\mathrm{W}$.

Úloha 26 ... desatinná

Koľko desatinných miest bude mať číslo $1/5^{10}$ napísané v bežnom desatinnom tvare? (Inak povedané, na koľkom desatinnom mieste sa nachádza posledná platná cifra?)

Pre určenie počtu desatinných miest by sa nám hodilo zlomok upraviť do tvaru $x/10^n$, kde x je číslo nekončiace cifrou 0 a 10^n je vhodná mocnina desiatky (keby číslo x nulou končilo, mohli by sme zlomok krátiť a znížiť tak počet platných desatinných miest). Takéto číslo má totiž n desatinných miest (napríklad $4/1\,000 = 0{,}004$).

Keďže v zlomku zo zadania sú len mocniny päťky, musíme zlomok šikovne rozšíriť. Stačí si iba uvedomiť, že platí $5 \cdot 2 = 10$. Pokiaľ teda náš zlomok rozšírime číslom 2^{10}, dostaneme:

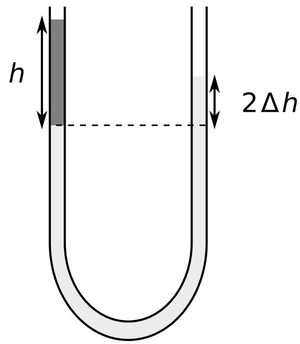
$$\frac{1}{5^{10}} = \frac{1}{5^{10}} \cdot \frac{2^{10}}{2^{10}} = \frac{2^{10}}{10^{10}} .$$

Číslo v čitateli je $2^{10} = 1\,024$ a nekončí nulou. Z mocniny desiatky v menovateli teda môžeme určiť, že číslo $1/5^{10}$ má 10 desatinných miest.

Úloha 27 ... u-trubica

Kaja našla v garáži dlhú trubicu tvaru písmena U *s prierezom* $1\,\mathrm{cm}^2$ *a naplnila ju z väčšej časti vodou. Potom do ľavého ramena trubice naliala ešte* $10\,\mathrm{ml}$ *benzínu s hustotou* $0{,}72\,\mathrm{g/cm^3}$ *a počkala, kým sa kvapaliny v trubici ustália. O koľko tým stúpla hladina vody v pravom ramene trubice, ak viete, že benzín a voda sa nemiešajú?*

$10\,\mathrm{ml} = 10\,\mathrm{cm}^3$ benzínu vytvorí v trubici stĺpec výšky $h = 10\,\mathrm{cm}^3/1\,\mathrm{cm}^2 = 10\,\mathrm{cm}$, ktorý tlačí na hladinu vody v ľavom ramene trubice hydrostatickým tlakom $p = \varrho g h$, kde $\varrho = 0{,}72\,\mathrm{g/cm^3}$ je hustota benzínu a g je tiažové zrýchlenie. Tento dodatočný tlak spôsobí, že hladina vody v ľavom ramene poklesne o Δh, preto sa v pravom ramene hladina o rovnakú výšku zdvihne (voda sa nikam nestratí).



V pravom ramene je teda hladina o $2\Delta h$ vyššie ako hladina vody v ľavom ramene. Ak sú tlaky v trubici ustálené, musí táto voda „naviac“ tiež spôsobovať tlak p.

$$\varrho g h = \varrho_\mathrm{v} g\,(2\Delta h) \quad \Rightarrow \quad \Delta h = \frac{\varrho h}{2\varrho_\mathrm{v}} = \frac{0{,}72\,\mathrm{g/cm^3} \cdot 10\,\mathrm{cm}}{2 \cdot 1\,\mathrm{g/cm^3}} = 3{,}6\,\mathrm{cm}\,.$$

Voda v pravom ramene trubice stúpla o $3{,}6\,\mathrm{cm}$ oproti svojej pôvodnej výške hladiny.

Úloha 28 ... výročná

Vypočítajte, koľko je

$$\frac{2018! - 2017!}{2017!}\,.$$

Znak ! *označuje faktoriál, tzn. súčin všetkých prirodzených čísel od* 1 *po dané číslo (napríklad* $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$*).*

Z definície faktoriálu platí $2018! = 2018 \cdot 2017 \cdot 2016 \cdots 1$. Môžeme si tiež všimnúť, že platí $2018! = 2018 \cdot 2017!$, čo výrazne zjednodušuje riešenie úlohy. Čitateľ zlomku zo zadania sa dá prepísať ako $2018! - 2017! = 2018 \cdot 2017! - 2017!$, odkiaľ môžeme člen $2017!$ vyňať. Dostaneme teda $2017! \cdot (2018 - 1)$. Po dosadení do zlomku zo zadania tak dostaneme:

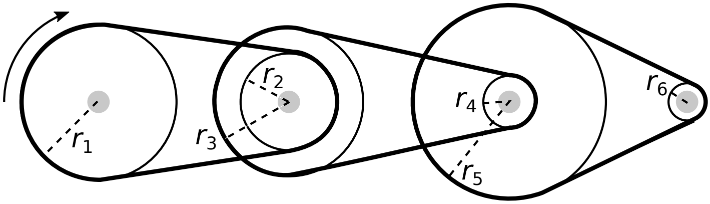
$$\frac{2018! - 2017!}{2017!} = \frac{2017! \cdot (2018 - 1)}{2017!} = 2018 - 1 = 2017\,.$$

Zlomok zo zadania je rovný číslu 2017.

Úloha 29 ... prevodovka

V prevodovke máme šesť ozubených kolies, ktoré sú buď spojené reťazou, alebo sú na spoločnej hriadeli, viď obrázok.

Vieme, že polomery jednotlivých kolies sú $r_1 = 21\,\mathrm{cm}$, $r_2 = 13\,\mathrm{cm}$ $r_3 = 20\,\mathrm{cm}$, $r_4 = 7\,\mathrm{cm}$, $r_5 = 26\,\mathrm{cm}$ *a* $r_6 = 5\,\mathrm{cm}$. *Prvé koleso sa otáča rýchlosťou 3 otáčky za minútu. Akou rýchlosťou (v otáčkach za minútu) sa otáča posledné koleso prevodovky?*



Dôležité je si uvedomiť, že kolesá spojené remeňom sa otáčajú rovnakou obvodovou rýchlosťou, zatiaľ čo kolesá na rovnakej hriadeli sa otáčajú rovnakou uhlovou rýchlosťou (teda za minútu sa otočia o rovnaký počet otáčok).

Označme si uhlovú rýchlosť prvého kolesa $\omega_1 = 3\,\mathrm{ot/min}$. Jeho obvodová rýchlosť je potom $v_1 = 2\pi r_1 \omega_1$, kde člen $2\pi r_1$ predstavuje obvod prvého kolesa.

Z nákresu prevodovky platí rovnosť $v_1 = v_2$, ktorú si vieme zapísať aj ako:

$$2\pi r_1 \omega_1 = 2\pi r_2 \omega_2 \quad \Rightarrow \quad r_1\omega_1 = r_2\omega_2 \quad \Rightarrow \quad \omega_2 = \frac{r_1}{r_2}\omega_1\,.$$

Keď ďalej postupujeme podľa nákresu, vieme písať $\omega_3 = \omega_2$ a $r_3\omega_3 = r_4\omega_4$, takže platí:

$$\omega_4 = \frac{r_3}{r_4}\omega_3 = \frac{r_3}{r_4}\omega_2 = \frac{r_3}{r_4}\cdot\frac{r_1}{r_2}\omega_1\,.$$

A nakoniec platí $\omega_4 = \omega_5$ a $r_5\omega_5 = r_6\omega_6$, takže:

$$\omega_6 = \frac{r_5}{r_6}\omega_5 = \frac{r_5}{r_6}\omega_4 = \frac{r_5}{r_6}\cdot\frac{r_3}{r_4}\cdot\frac{r_1}{r_2}\omega_1 = \frac{26\,\mathrm{cm}\cdot 20\,\mathrm{cm}\cdot 21\,\mathrm{cm}}{5\,\mathrm{cm}\cdot 7\,\mathrm{cm}\cdot 13\,\mathrm{cm}}\cdot 3\,\mathrm{ot/min} = 72\,\mathrm{ot/min}\,.$$

Šieste koleso prevodovky sa otáča uhlovou rýchlosťou $72\,\mathrm{ot/min}$.

Úloha 30 ... zlomky

Majo si pre zábavu napísal zlomky

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \frac{1}{56}, \frac{1}{72}, \frac{1}{90} \text{ a } \frac{1}{110}\,.$$

Potom sa zamyslel, aký by asi mohol byť ich súčet. Vypočítajte súčet Majových zlomkov!

Môžeme si všimnúť, že zlomky nie sú zvolené náhodne, pretože platí:

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{6} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{12} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{20} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}, \ldots$$

Inými slovami, všetky zlomky sú rovné rozdielu prevrátených hodnôt dvoch po sebe idúcich malých prirodzených čísel. Keď postupne sčítame zadané zlomky v tejto rozpísanej podobe, takmer všetky z nich se nám navzájom odčítajú:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}-\frac{1}{11}=1-\frac{1}{11}=\frac{10}{11}\,.$$

Súčet všetkých zlomkov je preto $10/11 \doteq 0{,}909$.

Úloha 31 ... červená

Marek rád skúma prirodzené čísla tak, že určuje súčty cifier N a P na nepárnych, respektíve párnych pozíciách. Marek zistil, že pre každé číslo deliteľné 11 platí, že rozdiel $|N-P|$ je deliteľný 11, pričom často je tento rozdiel dokonca nulový. Čísla spĺňajúce $|N-P|=0$ Marek nazval červenými číslami.

Pomôžte Marekovi a nájdite najmenšie číslo, ktoré je deliteľné 11, ale nie je červené.

Zjavne platí, že všetky dvojciferné násobky 11 sú červené čísla. Hľadajme preto naše číslo medzi trojcifernými číslam. Všeobecne môžeme hľadané číslo napísať v tvare $100a+10b+c$, kde a, b, c označujú hodnoty jednotlivých cifier (teda sú jednociferné čísla).

Tieto čísla musia spĺňať podmienku $|a+c-b| \neq 0$ a zároveň byť deliteľné 11, takže musí platiť $|a+c-b|=11$ (pre vyššie rozdiely deliteľné 11 by čísla a a c nemohli byť jednociferné).

Keďže hľadáme najmenšie číslo, môžme položiť $a=1$. Potom ale musí platiť $|c-b|=10$, čo opäť pre jednociferné čísla nie je možné. Musíme teda položiť $a=2$ a splniť podmienku $|c-b|=9$. Najmenšie číslo získame keď položíme $b=0$ a $c=9$.

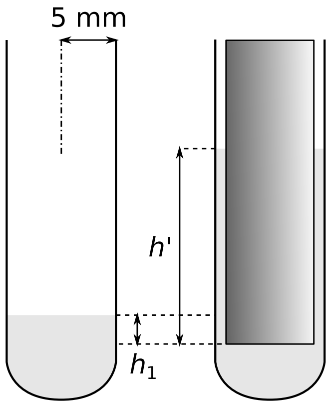
Najmenšie číslo, ktoré nie je červené a zároveň je deliteľné 11, je číslo 209.

Úloha 32 ... skúmavka

Jaro rád experimentuje v chemickom laboratóriu. Naposledy si zobral dlhú skúmavku s polomerom 5 mm a nalial do nej trochu vody. Potom našiel dlhý valcový kus korku a polomerom 4 mm, výškou 10 cm a hustotou $0{,}25\,\mathrm{g/cm^3}$ a nenapadlo mu nič iné, ako ako vhodiť ho do skúmavky a nechať ho v nej zvisle plávať. O koľko sa vhodením korku zdvihla hladina vody v skúmavke?

Keďže korok v skúmavke pláva, platí rovnosť tiažovej a vztlakovej sily, ktoré na neho pôsobia. Tiažová sila je $F_G=mg=\varrho Vg$, kde $\varrho=0{,}25\,\mathrm{g/cm^3}$ je hustota korku, g je tiažové zrýchlenie a V je objem korku (ten sa dá vypočítať ako Sh, kde S je obsah podstavy a $h=10\,\mathrm{cm}$ je jeho výška). Pre vztlakovú silu platí $F_{\mathrm{vz}}=\varrho_{\mathrm{v}}V'g$, kde ϱ_{v} je hustota vody a V' je objem ponorenej časti (tá sa opäť dá vyjadriť ako Sh', kde h' je výška ponorenej časti). Z rovnice pre rovnosť síl vyjde:

$$\varrho Shg=\varrho_{\mathrm{v}}Sh'g \quad\Rightarrow\quad h'=h\frac{\varrho}{\varrho_{\mathrm{v}}}=10\,\mathrm{cm}\cdot\frac{0{,}25\,\mathrm{g/cm^3}}{1\,\mathrm{g/cm^3}}=2{,}5\,\mathrm{cm}\,.$$



Korok je teda ponorený vo vode do hĺbky 2,5 cm. To ešte ale neznamená, že o rovnakú výšku stúpla aj hladina vody. Z obrázku je vidieť, že valcový objem vody s polomerom 5 mm (rovnaký ako má skúmavka) a výškou h_1 sa po ponorení korku zmení do tvaru valcového medziližia s vnútorným polomerom 4 mm, vonkajším polomerom 5 mm a výškou $h' = 2{,}5\,\mathrm{cm}$. Keďže voda je nestlačiteľná, jej objem sa nemôže zmeniť. Platí teda:

$$\pi \cdot (5\,\mathrm{mm})^2\, h_1 = \pi \cdot \left[(5\,\mathrm{mm})^2 - (4\,\mathrm{mm})^2\right] \cdot 25\,\mathrm{mm} \qquad \Rightarrow$$

$$h_1 = 25\,\mathrm{mm} \cdot \frac{(5\,\mathrm{mm})^2 - (4\,\mathrm{mm})^2}{(5\,\mathrm{mm})^2} = 9\,\mathrm{mm}\,.$$

Z obrázku naviac platí, že zmena výšky hladiny je $25\,\mathrm{mm} - h_1 = 16\,\mathrm{mm}$. Hladina vody v skúmavke teda vhodením korku stúpla o 16 mm.

Úloha 33 ... deliteľná

Čeky sa zamyslela nad tým, aké čísla od dvojky do stovky nie sú deliteľné 2, *ani* 3 *a ani* 5. *Zistila, že niektoré z nich sú prvočísla, ale nie všetky! Aký je súčet tých, ktoré prvočísla nie sú?*

Čísla, ktoré hľadáme, majú „rozumný“ prvočíselný rozklad (tzn. ich môžme skutočne rozložiť na súčin menších prvočísel), ktorý neobsahuje žiadne z prvočísel 2, 3 a 5. Môže teda obsahovať jedine ďalšie (vyššie) prvočísla, teda 7, 11, 13, 17 atď.

Všimnime si ale, že pre najmenší prijateľný násobok 17 platí $7 \cdot 17 = 119 > 100$. Hľadané čísla teda v rozkladu obsahujú iba prvočísla 7, 11 a 13, a to iba v obmedzenom počte kombinácií.

Čekyným podmienkam vyhovuje jedine mocnina $7^2 = 49$ a násobky $7 \cdot 11 = 77$ a $7 \cdot 13 = 91$. Všetky ďalšie kombinácie prvočiniteľov dávajú čísla väčšie než 100. Sčítaním nájdených čísel tak dostávame výsledný súčet $49 + 77 + 91 = 217$.

Úloha 34 ... polička

Adam si nedávno kúpil veľmi vzácnu homogénnu tehlu s hmotnosťou 32 kg *a rozmermi* 10 cm, 20 cm *a* 25 cm, *ktorú si chcel vystaviť na poličke vo svojej izbe. Polička je dostatočne pevná, má zanedbateľnú hmotnosť a dĺžku* 1 m. *Na oboch koncoch je polička pevne uchytená do steny* *podperami s maximálnou nosnosťou len* 20 kg. *Adam teda nemôže umiestniť tehlu na poličku na ľubovoľné miesto. Koľko najbližšie od ľavej podpery môže byť umiestnená jedna zo stien tehly?*

Tehla tlačí na Adamovu poličku tiažovou silou v mieste pod svojim ťažiskom smerom kolmo dole. Veľkosť tejto sily je $F_G = Mg$, kde $M = 32\,\mathrm{kg}$ je hmotnosť tehly a g je tiažové zrýchlenie. V opačnom smere poličku podopiera ľavá a pravá podpera silami F_l a F_p, ktoré v súčte kompenzujú tiažovú silu tehly (tzn. platí $F_\mathrm{l} + F_\mathrm{p} = F_G$).

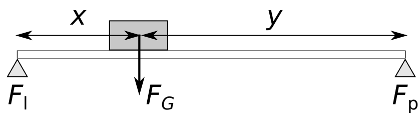
Ak má byť Adamova tehla čo najbližšie k ľavej podpere, môžeme uvažovať, že táto podpera bude zaťažená maximálnou možnou mierou, teda platí $F_\mathrm{l} = mg$, kde $m = 20\,\mathrm{kg}$ je nosnosť podpery, tzn. $F_\mathrm{l} = 200\,\mathrm{N}$.

Z rovníc vyššie platí

$$F_\mathrm{p} = F_G - F_\mathrm{l} = (M - m)\,g = (32\,\mathrm{kg} - 20\,\mathrm{kg}) \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} = 120\,\mathrm{N}\,.$$

Sila, ktorou tlačí tehla na poličku sa teda rozdelí na dve časti veľké 200 N a 120 N.

Keby bolo ťažisko tehly presne nad ľavou podperou, celá tiažová sila tehly bude pôsobiť na ľavú podperu (takže hypoteticky $F_\mathrm{l} = F_G$ a $F_\mathrm{p} = 0$). Ak začneme tehlu posúvať smerom k pravej podpere, sila F_l začne klesať a sila F_p rovnakou mierou rásť, lebo vždy musí platiť $F_\mathrm{l} + F_\mathrm{p} = F_G$. Ak posunieme nakoniec tehlu nad pravú podperu, bude celkom isť platiť $F_\mathrm{p} = F_G$ a $F_\mathrm{l} = 0$.



Ak si vzdialenosť ťažiska tehly od ľavej podpery označíme x a vzdialenosť od pravej podpery y (viď obrázok), z úvahy vyššie bude vyplývať, že pomer síl $F_\mathrm{p} : F_\mathrm{l} = 120\,\mathrm{N} : 200\,\mathrm{N} = 3 : 5$ sa musí rovnať pomeru vzdialeností $x : y$.[2] Naviac platí $y = 1\,\mathrm{m} - x$, takže

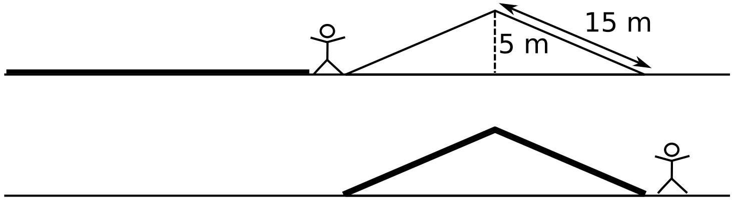
$$\frac{x}{y} = \frac{x}{1\,\mathrm{m} - x} = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{3}{8}\,\mathrm{m} = 0{,}375\,\mathrm{m} = 37{,}5\,\mathrm{cm}\,.$$

Aby mohol Adam priblížiť jednu zo stien tehly čo najbližšie k ľavej podpere, musí ju položiť na najširšiu hranu dlhú 25 cm. Tým bude ľavá stena tehly bližšie k ľavej podpere najviac o polovicu dĺžky tejto hrany, tj. o 12,5 cm a výsledná vzdialenosť tak bude 37,5 cm − 12,5 cm = 25 cm.

Úloha 35 . . . hasičská hadica

Hasiči musia po každom zásahu dôsledne vysušiť hadice. Dobrovoľná hasička Kamča to robí tak, že mokrú hadicu dlhú 30 m *a vážiacu* 60 kg *najskôr vyrovná na zemi, a potom ju ťahaním vynesie na konštrukciu v tvare pyramídy s výškou* 5 m *a ramenami dlhými* 15 m*. Pokiaľ zanedbáme trenie, akú prácu vytiahnutím hadice na konštrukciu vykoná?*

[2] Ak je sila na jednu z podpier x-krát väčšia, tehla bude k tejto podpere x-krát bližšie.



Keďže trenie zanedbávame, jediná sila, ktorú musí Kamča prekonávať je tiažová sila hadice. A tým koná prácu. Táto sila je sčasti kompenzovaná reakciou podložky. Napríklad na vodorovnej podložke by Kamča hypoteticky nekonala žiadnu prácu (stále sme vo svete bez trenia), ale na naklonenej rovine už prácu koná. Táto sila sa ale v čase mení, lebo sa mení aj to, aká časť hadice je vytiahnutá hore.

Namiesto dlhého a náročného počítania síl je výhodnejšie sa zamyslieť nad energiami. Práca W, ktorú Kamča vykoná proti tiažovej sile sa bez strát musí premeniť na potenciálnu energiu hadice. Pokiaľ stanovíme, že na začiatku mala hadica nulovú potenciálnu energiu, po vytiahnutí na pyramídu bude mať energiu $E_\mathrm{p} = mgh$, kde $m = 60\,\mathrm{kg}$ je hmotnosť hadice, g je tiažové zrýchlenie a h je výška, v ktorej sa ťažisko hadice nachádza.

Zistiť túto výšku je jednoduché. Stačí si hadicu pomyselne rozdeliť na dve ramená, ktorých ťažisko sa nachádza v polovici ich dĺžky, teda vo výške $h = 5\,\mathrm{m}/2 = 2{,}5\,\mathrm{m}$ nad povrchom. Výsledné ťažisko hadice sa teda bude nachádzať v rovnakej výške, takže potenciálna energia aj práca, ktorú Kamča musela pre vytiahnutie hadice vykonať, bude

$$W = E_\mathrm{p} = mgh = 60\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} \cdot 2{,}5\,\mathrm{m} = 1\,500\,\mathrm{J} = 1{,}5\,\mathrm{kJ}\,.$$

Kamča teda musela vykonať prácu 1,5 kJ.

Úloha 36 ... zmrzlina

Počas teplých letných dní si zmrzlinár všimol, že z celej dediny 7 *detí je zmrzlinu každý deň,* 6 *detí si ju kupuje každý druhý deň a* 3 *deti majú na zmrzlinu chuť každý tretí deň. Prvý a druhú deň predal zmrzlinár rovnako po* 11 *zmrzlinách a na tretí deň predal zmrzlinu* 12 *deťom. Koľko zmrzlín predá na štvrtý deň?*

Treba si uvedomiť, že nevieme, ktorý deň začínajú jesť zmrzlinu deti, ktoré ju nejedia denne. Naviac nemusí platiť, že všetky deti, ktoré jedia zmrzlinu každý druhý deň, ju začnú jesť v ten istý deň.

Najprv od počtu predaných zmrzlín odpočítame tie, pre ktoré si prídu deti každý deň. Zvyšné deti potom zjedli prvý a druhý deň 4 zmrzliny a na tretí deň 5 zmrzlín, dokopy teda 13 zmrzlín.

Každé dieťa, ktoré je zmrzlinu každý tretí deň, si počas spomínaných troch dní kúpilo zmrzlinu práve raz. Keďže takéto deti sú 3, tak potom deti kupujúce si zmrzlinu každý druhý deň museli zjesť zvyšných 10. Niektoré z nich jedli dvakrát (prvý a tretí deň), ostatné len raz (na druhý deň), a celkovo bolo týchto detí 6. Keď si neznámou x označíme deti, ktoré chodia po zmrzlinu každý druhý deň a v spomínané dni si ju dali dvakrát, môžeme túto formuláciu napísať do rovnice:

$$10 = 2x + (6 - x) \quad \Rightarrow \quad x = 4\,.$$

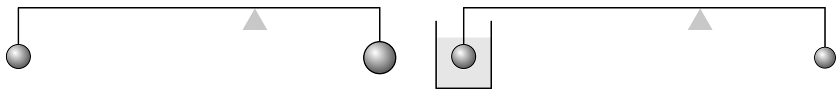
Tieto deti si na štvrtý deň kupovať zmrzlinu nebudú, lebo si ju kúpili na tretí deň a k zmrzlinárovi prídu najbližšie až na piaty deň. Zároveň už prvý deň nezostáva žiadna zmrzlina pre deti navštevujúce zmrzlinára každý tretí deň, a preto sa u neho žiadne z týchto detí nezastaví ani na štvrtý deň.

Na štvrtý deň si zmrzlinu kúpia len dve deti, ktoré ju jedia každý druhý deň a všetkých 7 detí, ktoré ju jedávajú denne. Zmrzlinár teda na štvrtý deň predá $7 + 2 = 9$ zmrzlín.

Úloha 37 ... hustomer

Maťo má kovovú guľôčku a rád by zmeral jej hustotu. Preto si postavil mechanický hustomer, ktorý funguje nasledovne. Hustomer vyzerá ako nerovnoramenná dvojzvratná páka. Na jedno rameno sa zavesí guľôčka a vyváži a umiestnením závažia o hmotnosti $100\,\mathrm{g}$ *na druhé rameno. Následne sa celá guľôčka ponorí do vody a opäť sa hustomer vyváži, tentokrát závažím o hmotnosti* $80\,\mathrm{g}$. *Aká je hustota Maťovej guľôčky?*

Postupujme všeobecne a dĺžku ramena, na ktoré je zavesená Maťova guľôčka, označme a, dĺžku druhého ramena b. Hmotnosť guľôčky označme m, jej hustotu ϱ a hmotnosti závaží $m_1 = 100\,\mathrm{g}$ a $m_2 = 80\,\mathrm{g}$, viď obrázok.



Pokiaľ je hustomer v rovnováhe, momenty síl, ktorými na hustomer pôsobí guľôčka a závažie, musia byť rovnako veľké. Pokým je guľôčka na vzduchu, platí jednoducho $mga = m_1gb$ a po vykrátení tiažového zrýchlenia $ma = m_1b$.

Po ponorení guľôčky do vody (hustotu vody označíme ϱ_v) poklesne sila, ktorou guľôčka pôsobí na rameno hustomeru o vztlakovú silu $\varrho_\mathrm{v}Vg$, kde $V = m/\varrho$ je objem Maťovej guľôčky. Rovnováha momentov síl sa tým upraví do tvaru:

$$(mg - \varrho_\mathrm{v}Vg)\,a = m_2gb \quad \Rightarrow \quad \left(m - m\frac{\varrho_\mathrm{v}}{\varrho}\right)a = m_2b\,.$$

Z ľavej strany rovnice vieme vyňať m pred zátvorku, a dosadiť zaň z prvej rovnice ($m = m_1b/a$). Dostávame:

$$\frac{m_1b}{a}\left(1 - \frac{\varrho_\mathrm{v}}{\varrho}\right)a = m_2b\,.$$

Z rovnice sa vykrátia členy a aj b. Vydelením oboch strán rovnice členom m_1 tak dostaneme

$$\left(1 - \frac{\varrho_\mathrm{v}}{\varrho}\right) = \frac{m_2}{m_1} = \frac{80\,\mathrm{g}}{100\,\mathrm{g}} = 0{,}8\,.$$

Porovnaním ľavej a pravej strany rovnice vidíme, že pomer hustôt $\varrho_\mathrm{v}/\varrho = 0{,}2$, takže hustota Maťovej guľôčky je $\varrho = \varrho_\mathrm{v}/0{,}2 = 5\,000\,\mathrm{kg/m^3}$.

Úloha 38 ... klamár

Bratislavskí organizátori Náboja Junior si myslia číslo. Menička Jitka tvrdí, že keď od tohto čísla odčítame 1 a vydelíme výsledok 3, získame druhú mocninu nejakého čísla. Opravovateľ Lukáš zas hovorí, že je myslené číslo deliteľné 3 a vysvetľovač Kubo presadzuje názor, že sa jedná o prvočíslo s ciferným súčtom 10. Hlavná organizátorka Terka sa už na nich začína hnevať. Je to totiž jej obľúbené číslo, ona ho zabudla a oni jej ho nechcú povedať! A navyše vie, že jeden z organizátorov nehovorí o myslenom čísle pravdu! Aké je teda Terkine obľúbené číslo?

Označme hľadané číslo x. Jitka tvrdí, že $x - 1$ je deliteľné 3 (pretože výsledok delenia je opäť prirodzené číslo). Lukáš ale hovorí, že rovno x je deliteľné troma. Jeden z nich je teda klamár.

Kubo zas tvrdí, že ciferný súčet čísla x je 10. To znamená, že podľa Kuba x nie je deliteľné 3, pretože ciferný súčet x nie je deliteľný 3. V deliteľnosti tromi sa tak Kubo zhoduje s Jitkou. Lukáš je preto bezpochyby klamár a x nie je deliteľné troma.

Podľa Jitky je číslo x v tvare $x = 3n^2 + 1$, kde n je nejaké prirodzené číslo.

Aby bolo x zároveň prvočíslo, člen $3n^2$ musí byt párny (inak by bolo x párne a nebolo by teda prvočíslo). Párne teda musí byť aj číslo n, čo sa dá zapísať ako $n = 2m$, kde m je zas nejaké prirodzené číslo. Keď dosadíme tento poznatok do vyjadrenia pre x, dostaneme:

$$x = 3n^2 + 1 = 3 \cdot (2m)^2 + 1 = 12m^2 + 1\,.$$

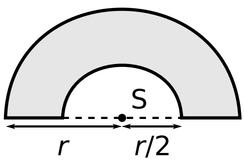
Na základe tejto podmienky môžeme skontrolovať kandidátov na číslo x pre malé m. Postupne pre $m = 1, 2, \ldots$ vyjdú čísla 13, 49, 109, 193, ... Vidíme, že ciferný súčet rovný 10 má číslo 109. Toto číslo splňuje takmer všetky tvrdenia Jitky a Kuba, stačí iba overiť, či je číslo prvočíslom.

To, že číslo je nepárne a má ciferný súčet 10 vylučuje deliteľnosť prvočíslami 2 a 3. Číslo končiace na cifru 9 tiež nie je deliteľné 5. Nedeliteľnosť 7 musíme overiť ručne (najbližší násobok 7 je $7 \cdot 10 + 7 \cdot 6 = 112$). Deliteľnosť vyššími prvočíslami overovať nemusíme, pretože pre ďalšie prvočíslo 11 platí $11^2 = 121 > 109$. Ak by bolo číslo 109 deliteľné 11 alebo väčším prvočíslom, muselo by zároveň byť deliteľné aj jedným z už testovaných prvočísel.

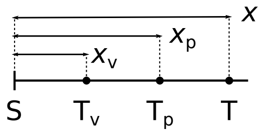
Terkine obľúbené číslo je preto 109.

Úloha 39 ... polkruh

Fyzikálny maliar Maťko chcel nakresliť symetrický most, tak sa zamýšľal nad tým, ako sa posunie ťažisko kartónového polkruhu s polomerom r, keď z neho vyreže polkruh s polovičným polomerom podľa obrázku. Vedel, že pôvodné ťažisko bolo od stredu S *vzdialené $\frac{4r}{3\pi}$. V akej vzdialenosti bude ležať nové ťažisko?*



Z osovej symetrie je zrejmé, že ťažisko pôvodného polkruhu T_p, Maťkovho mostu T aj vystrihnutého polkruhu T_v ležia na úsečke, ktorá vychádza z bodu S a rozdeľuje všetky tri objekty na polovice. Celý problém sa nám tak zjednodušuje do jedného rozmeru.



Schematicky si situáciu môžeme znázorniť pomocou úsečky na obrázku, v ktorom sme si tiež označili príslušné vzdialenosti x_p, x a x_v. Skombinovaním ťažísk mostu a vyrezaného polkruhu musíme dostať ťažisko pôvodného polkruhu, takže platí:

$$x_\mathrm{p} = \frac{mx + m_\mathrm{v}x_\mathrm{v}}{m + m_\mathrm{v}},$$

kde hmotnosti m a m_v zodpovedajú hmotnostiam mostu a polkruhu a $m+m_\mathrm{v} = m_\mathrm{p}$ je hmotnosť pôvodného polkruhu.

Hmotnosť kartónu, z ktorého Maťko most vyrába, je úmerná jeho obsahu. Obsah vyrezaného polkruhu S_v je jedna štvrtina[3] obsahu pôvodného polkruhu S. Zvyšné tri štvrtiny zodpovedajú obsahu mostu. Platí teda $m_\mathrm{v} = m_\mathrm{p}/4$ a $m = 3m_\mathrm{p}/4$. Dosadením do vzťahu pre ťažisko dostávame:

$$x_\mathrm{p} = \frac{3x + x_\mathrm{v}}{4} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4x_\mathrm{p} - x_\mathrm{v}}{3}.$$

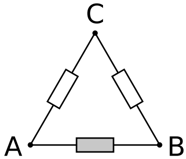
Zo zadania vieme, že $x_\mathrm{p} = 4r/3\pi$. Keďže vystrihnutý polkruh je dvakrát menší, bude platiť $x_\mathrm{v} = x_\mathrm{p}/2 = 2r/3\pi$ a teda

$$x = \frac{4x_\mathrm{p} - x_\mathrm{v}}{3} = \frac{4 \cdot \frac{4r}{3\pi} - \frac{2r}{3\pi}}{3} = \frac{14r}{9\pi}.$$

Ťažisko Maťkovho mostu je od bodu S vzdialené $14r/9\pi$, čo je asi $0{,}5r$.

Úloha 40 ... odporná

Viky dostala na narodeniny trojuholník ABC *s troma rezistormi (viď obrázok). Odpory bielych rezistorov sú rovnaké, narozdiel od odporu šedého rezistora, ktorý sa od nich líši. Viky ale táto informácia nestačila, a tak schytila svorky multimetra, zapojila ich k bodom* A *a* B *a namerala odpor* $6\,\Omega$*. Potom svorky multimetra zapojila k bodom* A *a* C *a multimeter jej ukázal odpor* $12\,\Omega$*. Aká je hodnota odporu šedého rezistora?*



Označme odpor bieleho rezistoru R_b a odpor šedého rezistoru $R_\mathrm{š}$. Ani jednu z hodnôt totiž (zatiaľ) nepoznáme.

[3] $S_\mathrm{v} = \frac{\pi r^2}{2} \to \frac{\pi (r/2)^2}{2} = \frac{\pi r^2}{8} = \frac{S}{4}.$

Keď Viky zapojí svorky multimetru k bodom A a B, premeriava zapojenie, kde sú biele odpory zapojené sériovo a k nim je paralelne zapojený šedý rezistor. Pre celkový odpor $R_{\mathsf{AB}} = 6\,\Omega$ teda platí:

$$\frac{1}{R_{\mathsf{AB}}} = \frac{1}{R_\mathrm{b} + R_\mathrm{b}} + \frac{1}{R_\text{š}} \quad \Rightarrow \quad R_{\mathsf{AB}} = \frac{2R_\mathrm{b}R_\text{š}}{2R_\mathrm{b} + R_\text{š}}\,.$$

Keď ale Viky zapojí svorky multimetra medzi body A a C, v sérii je zapojený jeden biely a jeden šedý rezistor, ku ktorým je paralelne zapojený ešte jeden biely rezistor. Pre celkový odpor $R_{\mathsf{AC}} = 12\,\Omega$ teda platí:

$$\frac{1}{R_{\mathsf{AC}}} = \frac{1}{R_\mathrm{b} + R_\text{š}} + \frac{1}{R_\mathrm{b}} \quad \Rightarrow \quad R_{\mathsf{AC}} = \frac{(R_\mathrm{b} + R_\text{š})\,R_\mathrm{b}}{2R_\mathrm{b} + R_\text{š}}\,.$$

Tieto rovnice vyzerajú relatívne jednoducho, ale ich úprava nie je až taká rýchla. Všimnime si ale, že menovatele zlomkov na pravých stranách rovníc sú rovnaké. Skúsme preto z prvej rovnice celý tento menovateľ vyjadriť:

$$2R_\mathrm{b} + R_\text{š} = \frac{2R_\mathrm{b}R_\text{š}}{R_{\mathsf{AB}}}\,,$$

a dosadiť do druhej rovnice:

$$R_{\mathsf{AC}} = \frac{(R_\mathrm{b} + R_\text{š})\,R_\mathrm{b}}{\dfrac{2R_\mathrm{b}R_\text{š}}{R_{\mathsf{AB}}}} = \frac{(R_\mathrm{b} + R_\text{š})\,R_\mathrm{b}R_{\mathsf{AB}}}{2R_\mathrm{b}R_\text{š}}\,.$$

Člen R_b sa nachádza ako v čitateli, tak aj v menovateli a vykráti sa. Keď rovnicu vydelíme členom $R_{\mathsf{AB}}/2$, dostaneme:

$$2 \cdot \frac{R_{\mathsf{AC}}}{R_{\mathsf{AB}}} = \frac{R_\mathrm{b} + R_\text{š}}{R_\text{š}} = 1 + \frac{R_\mathrm{b}}{R_\text{š}}\,.$$

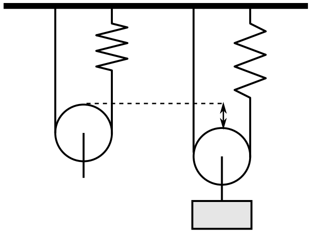
Ľavá strana rovnice je rovná $2 \cdot 12\,\Omega/6\,\Omega = 4$, takže (z pravej strany) $R_\mathrm{b}/R_\text{š} = 3$ alebo $R_\mathrm{b} = 3R_\text{š}$. Tento poznatok dosadíme do prvej rovnice pre odpor R_{AB}:

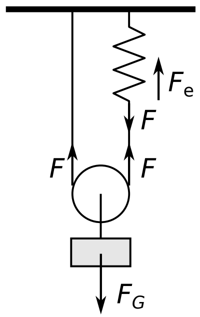
$$R_{\mathsf{AB}} = \frac{2 \cdot 3R_\text{š}R_\text{š}}{2 \cdot 3R_\text{š} + R_\text{š}} = \frac{6R_\text{š}^2}{7R_\text{š}} \quad \Rightarrow \quad R_\text{š} = \frac{7}{6}R_{\mathsf{AB}} = 7\,\Omega\,.$$

Odpor šedého rezistoru je $7\,\Omega$.

Úloha 41 ... napružená

O akú vzdialenosť klesne voľná kladka, pokiaľ na ňu zavesíme závažie o hmotnosti 1,5 kg *(viď obrázok)? Dĺžka nezaťaženej pružiny je* 20 cm *a jej tuhosť je* 25 N/m.





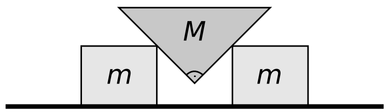
Zamyslime sa najskôr nad silami, ktoré pôsobia na kladku. Smerom nadol kladku ťahá tiažová sila závažia $F_G = 1{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} = 15\,\mathrm{N}$. Naopak, smerom nahor pôsobí z oboch strán ťahová sila lana F. Pokiaľ má byť sústava v rovnováhe, musí byť celková sila pôsobiaca na kladku nulová. Pre veľkosť sily F teda musí platiť $F = F_G/2 = 7{,}5\,\mathrm{N}$.

Sila F sa natiahnutým lanom prenáša až k pružine, ktorú naťahuje z pokojovej dĺžky o x. Proti naťahovaniu sa pružina „bráni“ elastickou silou $F_\mathrm{e} = kx$, kde $k = 25\,\mathrm{N/m}$ je jej tuhosť. Z rovnosti $F = F_\mathrm{e}$ teda vypočítame, že $x = F/k = 0{,}3\,\mathrm{m} = 30\,\mathrm{cm}$. Zavesením závažia sa teda pružina natiahne o 30 cm.

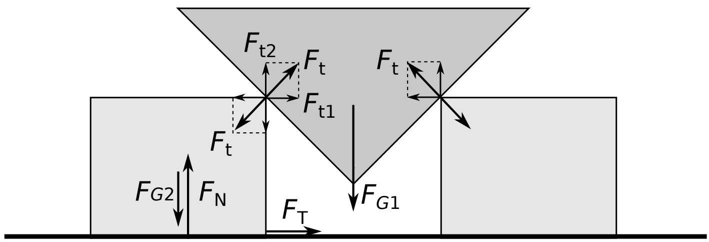
Samotná kladka ale klesne menej než o túto dĺžku. Je jednoduché si prísť na to,[4] že predĺžením lana o x kladka poklesne iba o $x/2$, teda v našom prípade o 15 cm.

Úloha 42 ... klin

Justínka našla doma dva drevené kvádre o hmotnosti m, medzi ktoré vsunula pravouhlý klin (viď obrázok). Trenie medzi kvádrami a podložkou je popísané nenulovým koeficientom trenia f, trenie medzi kvádrami a klinom neuvažujte. Akú najväčšiu hmotnosť M (v závislosti na f) môže mať klin, aby sa kvádre nerozbehli?



Aby sa kvádre nepohybovali, musí platiť, že výsledná sila na ne pôsobiaca je nulová. Inými slovami, trecia sila a reakcia od podložky musia vykompenzovať silu, ktorou na kváder pôsobí klin.



Všetky sily, ktoré na sústavu pôsobia, sú uvedené na obrázku. Na klin pôsobí tiažová sila $F_{G1} = Mg$ a dvakrát reakcia tlakovej sily F_t, ktorou klin tlačí na kváder. Keďže je hranol pravouhlý, táto sila pôsobí pod uhlom 45° vzhľadom k vodorovnému smeru. Keď rozložíme túto silu na jej vodorovnú a zvislú zložku (viď obrázok), vytvoria spolu pravouhlý trojuholník, v ktorom obe odvesny zvierajú s preponou uhol 45°. Toto samozrejme spĺňa jedine rovnoramenný pravouhlý trojuholník, takže platí, že veľkosť vodorovnej ($F_{\mathrm{t}1}$) a zvislej ($F_{\mathrm{t}2}$) zložky je rovnaká.

[4] Predstavme si opačný prípad, kedy kladku nadvihneme o nejakú vzdialenosť a. Tým sa uvoľní lano o dĺžke a na oboch stranách kladky, takže lano vieme skrátiť o dĺžku $2a$. Naopak, pokiaľ sa lano predĺži o dĺžku b, musíme toto predĺženie rozdeliť na obe strany kladky. Teda kladka poklesne iba o $b/2$.

Vodorovné zložky pôsobia v navzájom opačnom smere a vyrušia sa. Naopak, zvislé zložky pôsobia v rovnakom smere oproti sile F_{G1}.

Rovnováhu síl pôsobiacich na klin tak vieme zapísať ako:

$$F_{G1} = 2F_{\mathrm{t}2} \quad \Rightarrow \quad F_{\mathrm{t}2} = F_{\mathrm{t}1} = \frac{F_{G1}}{2} = \frac{Mg}{2}\,.$$

Teraz sa podrobnejšie pozrime na sily pôsobiace na kvádre. Keďže je situácia symetrická, stačí sa zamerať iba na jeden z kvádrov, napríklad na ľavý. Na tento kváder pôsobia tiež sily $F_{\mathrm{t}1}$ a $F_{\mathrm{t}2}$, a to ako tlakové sily. Sila $F_{\mathrm{t}1}$ pôsobí spolu s tiažovou silou $F_{G2} = mg$ smerom kolmo nadol. Proti týmto silám pôsobí reakčná sila podložky F_{N} (inak by sa kvádre „prepadli“ cez podložku). Platí teda $F_{\mathrm{N}} = F_{G2} + F_{\mathrm{t}1}$.

Vo vodorovnom smere pôsobí na kváder iba dve navzájom opačné sily, a to tlaková sila $F_{\mathrm{t}2}$ a trecia sila F_{T}, ktorá tlakovú silu od klinu kompenzuje. Pokiaľ bude hmotnosť klinu rásť, bude rásť aj veľkosť trecej sily (nesmieme zabúdať, že trecia sila je veľká iba tak, aby vykompenzovala všetky sily, ktoré sa snažia posúvať telesom), a to až po jej maximálnu hodnotu fF_{N}, kde f je koeficient trenia. Podmienku nepohybovania vieme teda napísať ako $F_{\mathrm{T}} = fF_{\mathrm{N}} \geq F_{\mathrm{t}2}$.

Do tejto nerovnice dosadíme známe vzťahy pre F_{N}, $F_{\mathrm{t}1}$, $F_{\mathrm{t}2}$ a obe tiažové sily. Dostávame:

$$f\left(F_{G2} + F_{\mathrm{t}1}\right) \geq F_{\mathrm{t}2} \quad \Rightarrow \quad f\left(mg + \frac{Mg}{2}\right) \geq \frac{Mg}{2}\,.$$

Rovnicu upravíme do tvaru $fmg \geq (1-f)\,Mg/2$ a zamyslíme sa. Ak bude $f > 1$, člen $(1-f)$ bude záporný, rovnako ako celá pravá strana nerovnice, nezávisle na M, a nerovnica bude platiť vždy. Fyzikálne to znamená, že sa kvádre nepohnú pri *ľubovoľnej* hmotnosti $M \geq 0$.

Pokiaľ bude platiť $f < 1$, nerovnicu vieme ďalej upraviť a vyjadriť M. Stačí ju vynásobiť kladným výrazom $2/g\,(1-f)$:

$$\frac{2fmg}{g\,(1-f)} \geq M \quad \Rightarrow \quad M \leq \frac{2fm}{(1-f)}\,.$$

Ak bude platiť $f < 1$, je hmotnosť Justínkinho klinu obmedzená ako $M \leq 2fm/\,(1-f)$. Naopak pre $f > 1$ je maximálna hmotnosť klinu neobmedzená.

Náboj Junior 2017

Brno – *Fakulta stroj. inženýrství VUT*
České Budějovice – *Gymnázium Jírovcova*
Česká Lípa – *Gymnázium Žitavská*
Frýdlant nad Ostravicí – *Gymnázium Frýdlant*
Hradec Králové – *Univerzita Hradec Králové*
Kadaň – *Sluníčková základní škola Kadaň*
K. Vary – *První české gymnázium v K. Varech*
Olomouc – *Gymnázium Olomouc-Hejčín*
Ostrava – *Gymnázium O. Havlové*
Písek – *SPŠ a VOŠ Písek*
Plzeň – *Gymnázium Mikulášské náměstí*
Praha – *Gymnázum Ch. Dopplera*
Praha – *Gymnázium Voděradská*
Sokolov – *Gymnázium a KVC Sokolov*
Třebíč – *Katolické gymnázium*
Ústí n. Labem – *Fak. soc. ekonomická UJEP*
Zlín – *Gymnázium Zlín-Lesní čtvrť*

Bánovce n. Bebr. – *Gymnázium J. Jesenského*
Banská Bystrica – *Gymnázium A. Sládkoviča*
Bratislava – *UPeCe sv. Jozefa Freinandemetza*
Brezno – *Gymnázium J. Chalupku*
Hlohovec – *Gymnázium I. Kupca*
Košice – *Gymnázium Alejová*
Levice – *Gymnázium A. Vrábla*
Lipt. Mikuláš – *Gymnázium M. M. Hodžu*
Lučenec – *CVČ Magnet*
Michalovce – *Gymnázium P. Horova*
Námestovo – *Gymnázium A. Bernoláka*
Nitra – *Gymnázium Párovská*
Partizánske – *Gymnázium Komenského*
Piešťany – *Gymnázium P. de Coubertina*
Poprad – *Gymnázium Kukučínova*
Prešov – *Gymnázium J. A. Raymana*
Prievidza – *Gymnázium V. B. Nedožerského*
Púchov – *Gymnázium Púchov*
Sučany – *Bilingválne gymnázium M. Hodžu*
Šurany – *Gymnázium Bernolákova*
Trenčín – *Piar. gymnázium J. Braneckého*
Trnava – *ZŠ s MŠ Spartakovská*
Trstená – *Gymnázium M. Hattalu*
Zvolen – *Gymnázium Ľ. Štúra*

Kraków – *Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński*

Námety úloh

Alžběta Andrýsková, Beata Czernecka, Martina Daňková, Jindřich Dušek, Lukáš Fusek, Simona Gabrielová, Robert Gemrot, Miroslav Jarý, Radek Kusek, Karolína Letochová, Viktor Materna, David Němec, Kateřina Rosická, Pavla Rudolfová, Jakub Sláma, Daniel Slezák, Petra Štefaníková, Kateřina Stodolová, Patrik Švančara, Pavla Trembulaková a Julie Weisová

Autori zadaní a riešení úloh

Petra Hrubcová, Simona Gabrielová, David Němec, Jakub Sláma, Petr Šimůnek, Radka Štefaníková, Petra Štefaníková, Patrik Švančara a Pavla Trembulaková

Prekladatelia

Beata Czernecka, Jakub Hluško, Katarína Marčeková, Radek Kusek, Mikuláš Polák a Karolina Szulc

Recenzenti

RNDr. Zdenka Baxová, PaedDr. Ľubomír Konrád a Tomáš Kremel