7. ročník

2018/19

Vzorová řešení

Milí příznivci matematiky a fyziky,

letos se vám opět do rukou dostává brožurka týmové matematicko-fyzikální soutěže Náboj Junior, ve které naleznete zadání soutěžních úloh i jejich řešení. V roce 2018 soutěž probíhala současně v Česku, v Polsku a na Slovensku, a to celkem na 52 místech. Na Českou republiku z tohoto počtu připadá 18 míst. Dohromady se klání zúčastnilo více než 4000 žáků základních škol a víceletých gymnázií. Veškeré informace o průběhu soutěže, včetně mezinárodních výsledků, jsou k nalezení na internetové stránce `junior.naboj.org`.

Pokud vás tato soutěž zaujala, jistě budete potěšeni zprávou, že další ročník Náboje Junior proběhne tradičně v listopadu 2019. A pokud byste chtěli uspořádat Náboj Junior i ve vašem městě a zvýšit tak přístupnost soutěže v regionu, budeme velice potěšeni a rádi s vámi navážeme spolupráci. V případě zájmu nám napište na kontaktní e-mail.

Spoluvyhlašovateli soutěže jsou Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy České republiky a Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy. Na přípravě soutěžních úloh, této brožurky a na samotné organizaci soutěže v České republice se podíleli zejména organizátoři a příznivci korespondenčního semináře Výfuk, který zastřešuje Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy, ve spolupráci s organizátory v jednotlivých organizačních místech. Na Slovensku organizaci zabezpečilo občanské sdružení Trojsten a v Polsku studenti Jagellonské univerzity v Krakově.

Přejeme vám příjemné rozjímání nad příklady.

Organizátoři
`info-cz@junior.naboj.org`

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ FAKULTA
Univerzita Karlova

Úloha 1 ... fotoaparát

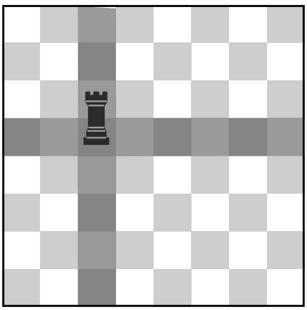
Vilma si před nedávnem koupila nový foťák. Pořizovací cena byla 2 123 Kč. Celou částku platila jednou bankovkou s nominální hodnotou 5 000 Kč. Jaký je nejmenší počet mincí a bankovek, které jí pokladní mohla vrátit?

Pokladní Vilmě vydala celkem 5 000 Kč − 2 123 Kč = 2 877 Kč. Nejmenší počet vydaných bankovek a mincí získáme tak, že začneme sumu skládat z bankovek a mincí s co nejvyšší hodnotou. Pokladní tak Vilmě vydala bankovky s hodnotami 2 000 Kč, 500 Kč, 200 Kč a 100 Kč a mince s hodnotou 50 Kč, 20 Kč, 5 Kč a 2 Kč. Dohromady tedy Vilmě mohla vydat nejméně 8 bankovek a mincí.

Úloha 2 ... věž

Na libovolné pole prázdné šachovnice postavíme věž. Na kolik různých políček může vést další tah touto věží? Šachovnice má rozměr 8 × 8 polí a věž se může pohybovat pouze vodorovně nebo svisle.

Bez ohledu na vybranou pozici se figurka může přesunout na libovolné pole ve svém řádku nebo svém sloupci. Řádek a sloupec mají jedno pole společné, celkem tedy představují $2 \cdot 8 - 1 = 15$ polí. A protože políčko na křížení sloupce a řádku právě zabírá věž, může tah vést na 14 různých polí.



Úloha 3 ... chalupa

Jakub jede z chalupy do města vzdáleného 250 km*. První hodinu cesty jede průměrnou rychlostí* 50 km/h*. Jakou rychlostí má jet po zbytek cesty, aby byla jeho výsledná průměrná rychlost dvojnásobná?*

Nejprve si spočítáme, za jakou dobu se musí Jakub dostat z chalupy do města, aby byla jeho výsledná průměrná rychlost 100 km/h. K tomu nám stačí vydělit celkovou dráhu průměrnou rychlostí, čímž dostaneme čas 250 km/ (100 km/h) = 2,5 h. Protože Jakub za první hodinu ujel 50 km, za zbývající čas 1,5 h musí ujet ještě 200 km, tudíž musí být jeho rychlost rovna 200 km/1,5 h $\doteq$ 133 km/h.

Úloha 4 ... hmotnosti

Vážný Petr vážil svá závaží. Nejprve na misku vah položil tři závaží o hmotnostech $0{,}03\,\mathrm{t}$, $200\,000\,\mathrm{g}$ *a* $15\,\mathrm{kg}$. *Poté je nahradil závažími o hmotnostech* $0{,}01\,\mathrm{t}$, $35\,000\,\mathrm{g}$ *a* $200\,\mathrm{kg}$. *Jaký je rozdíl hmotností, které Petr naměřil v prvním a druhém případě?*

Hmotnosti všech závaží si musíme převést na stejné jednotky, a to nejlépe na koligramy jakožto základní jednotky. Petrova závaží z prvního vážení mají hmotnosti $0{,}03\,\mathrm{t} = 30\,\mathrm{kg}$, $200\,000\,\mathrm{g} = 200\,\mathrm{kg}$ a $15\,\mathrm{kg}$. Po sečtení dostaneme hmotnost $245\,\mathrm{kg}$.

Závaží z druhého vážení mají hmotnosti $0{,}01\,\mathrm{t} = 10\,\mathrm{kg}$, $35\,000\,\mathrm{g} = 35\,\mathrm{kg}$ a $200\,\mathrm{kg}$. Po sečtení dostaneme rovněž $245\,\mathrm{kg}$. Rozdíl hmotností je tedy $0\,\mathrm{kg}$.

Úloha 5 ... kohoutek

Kohoutek v Mirkově koupelně kape. Každé dvě sekundy dopadne do umyvadla jedna kapka. Poté, co Mirek kohoutek utáhne, spadne do umyvadla kapka už jen každých devět sekund. Vypočítejte, kolikrát vyšší byla frekvence kapání před utažením vůči frekvenci po utažení.

Na začátku z kohoutku kape voda s časovou periodou $T_1 = 2\,\mathrm{s}$, po utažení se prodlouží na $T_2 = 9\,\mathrm{s}$. Frekvence je definována jako převrácená hodnota periody, a tedy $f_1 = 1/2\,\mathrm{s}^{-1}$ a $f_2 = 1/9\,\mathrm{s}^{-1}$. Hledaný poměr frekvencí před a po utažení je $f_1/f_2 = 9/2 = 4{,}5$.

Úloha 6 ... imperiální

Jindra byl o prázdninách v americkém městě New Orleans. Jednou chtěl zaletět o víkendu do Miami a zajímalo ho, o kolik stupňů Celsia tam bude tepleji. Z předpovědi v televizi se dozvěděl, že v New Orleans je $86^\circ\,\mathrm{F}$ *a v Miami* $104^\circ\,\mathrm{F}$. *Pomozte Jindrovi určit teplotní rozdíl, jestliže pro Celsiovy a Fahrenheitovy stupně platí převodní vztah* $T[^\circ\mathrm{C}] = (T[^\circ\mathrm{F}] - 32) \cdot 5/9$.

Úlohu vyřešíme prostým dosazením do převodního vzorce. V New Orleans je teplota

$$T_{\mathrm{NO}} = (86 - 32) \cdot \frac{5}{9}\,^\circ\mathrm{C} = 30\,^\circ\mathrm{C},$$

v Miami

$$T_{\mathrm{M}} = (104 - 32) \cdot \frac{5}{9}\,^\circ\mathrm{C} = 40\,^\circ\mathrm{C}.$$

Rozdíl teplot v obou městech je $T_{\mathrm{M}} - T_{\mathrm{NO}} = 10\,^\circ\mathrm{C}$.

Úloha 7 ... zábavné číslo

Přirozené číslo nazveme zábavným právě tehdy, když obsahuje pouze číslice 1, 2 *anebo* 3. *Kolik zábavných čísel menších než* 1 000 *existuje?*

Zábavná čísla menší než 1 000 mohou být jedno, dvoj anebo trojciferná.

Jednociferná zábavná čísla jsou tři (1, 2 a 3). Dvouciferných je více: na místě jednotek, a stejně tak na místě desítek, může být libovolná ze třech cifer 1, 2, 3. Dvouciferných zábavných čísel tedy je $3 \cdot 3 = 9$. Podobně i v případě trojciferních čísel: libovolná ze tří cifer může být na místě jednotek, desítek a stovek. Jejich počet tedy je $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

Dohromady je hledaných zábavných čísel $3 + 9 + 27 = 39$.

Úloha 8 ... vodiče

Elektrický odpor kovového vodiče je přímo úměrný délce a nepřímo úměrný průřezu (ploše) vodiče. David změřil, že jeho vodič má odpor R_D. Radek zase zjistil, že jeho vodič je vyrobený ze stejného kovu jako Davidův, ale jeho délka i průměr jsou oproti Davidovu vodiči dvojnásobné. Jaký je poměr odporů $R_\mathrm{R}/R_\mathrm{D}$ Radkova a Davidova vodiče?

Pokud by měl Radkův vodič pouze dvojnásobnou délku oproti Davidovu, jeho odpor by byl dvojnásobný (tj. $2R_\mathrm{D}$), neboť odpor vodiče je přímo úměrný jeho délce.

Pokud by ale měl Radkův vodič pouze dvojnásobný průměr, ve srovnání s Davidovým vodičem by měl také dvojnásobně velký poloměr. Jelikož ale obsah průřezu válcového vodiče závisí na druhé mocnině poloměru (to vyplývá ze vztahu pro výpočet obsahu kruhu), obsah průřezu Radkova vodiče by byl čtyřnásobně větší a odpor kvůli nepřímé úměře čtyřnásobně menší (tj. $R_\mathrm{D}/4$).

Uvážime-li dvakrát tak velký i tlustý vodič, výše uvedené poměry se jednoduše vynásobí a pro odpor Radkova vodiče dostáváme

$$R_\mathrm{R} = 2 \cdot \frac{1}{4} R_\mathrm{D} = \frac{R_\mathrm{D}}{2}, \quad \Rightarrow \quad \frac{R_\mathrm{R}}{R_\mathrm{D}} = \frac{1}{2}.$$

Odpor Radkova vodiče je poloviční oproti odporu Davidova vodiče a jejich poměr je roven $1/2$.

Úloha 9 ... číselná osa

Kolik existuje přirozených čísel n takových, že vzdálenost měřená na číselné ose mezi číslem 7 a $\sqrt{n}$ je menší než 2?

Podmínka maximální vzdálenosti od čísla 7 jednoduše říká, že číslo $\sqrt{n}$ se musí nacházet mezi čísly 5 a 9, tj. lze napsat dvojitou nerovnost $5 < \sqrt{n} < 9$. Tuto nerovnost lze umocnit na druhou, neboť čísla v ní jsou nezáporná. Dostaneme tedy nerovnost $25 < n < 81$. Přirozená čísla, která nerovnost splňují, se tedy nachází mezi 26 a 80 včetně a takových čísel je celkem 55.

Úloha 10 ... brambory

Petr jezdí každoročně na podzim k babičce vyorat na pole brambory. Ví, že sám celé pole zorá za 4 hodiny. Po 2 hodinách se Verče Petra zželelo a šla mu na pole pomoct. Sama by celé pole zorala za 6 hodin. Za jak dlouho od začátku práce bude celé pole zorané?

Ze zadání okamžitě vidíme, že po prvních 2 hodinách Petr zoral polovinu pole.

Poté se k němu přidala Verča a pole orali společně. Jelikož Petr zorá za jednu hodinu práce $1/4$ pole a Verča $1/6$ pole, společnou prací za hodinu zorají $1/4+1/6 = 5/12$ pole. Polovinu pole tak zorají za $1/2 : 5/12 = 6/5 = 1{,}2$ hodin. Celkem tedy bude orba trvat $2\,\mathrm{h} + 1{,}2\,\mathrm{h} = 3{,}2\,\mathrm{h}$.

Úloha 11 ... výkonné stroje

Rychlovarná konvice vykonala za čas $t_1 = 2\,\mathrm{min}$ práci $W_1 = 120\,\mathrm{kJ}$, zdroj high-end počítače vykonal práci $W_2 = 14{,}4\,\mathrm{MJ}$ za $t_2 = 8\,\mathrm{h}$. Které zařízení je výkonnější? Udejte jako poměr výkonů P_1/P_2.

Výkon definujeme jako práci W vykonanou za daný čas t, $P = W/t$. Poměr výkonů konvice P_1 a počítače P_2 lze tedy zapsat ve tvaru

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{W_1}{t_1} \bigg/ \frac{W_2}{t_2} = \frac{W_1}{W_2} \cdot \frac{t_2}{t_1} = \frac{120\,\mathrm{kJ}}{14\,400\,\mathrm{kJ}} \cdot \frac{480\,\mathrm{min}}{2\,\mathrm{min}} = 2\,.$$

Konvice je dvakrát výkonnější než zdroj počítače.

Úloha 12 ... draci

V pohádkovém království žijí jednom zelení a modří draci. Každý modrý drak má 6 hlav, 8 nohou a 2 ocasy. Každý zelený drak má 8 hlav, 6 nohou a 4 ocasy. Udatní rytíři v království napočítali celkem 44 dračích ocasů. Také se jim povedlo zjistit, že zelených nohou je v království o 6 méně než je počet modrých hlav. Kolik modrých draků žije v pohádkovém království?

Označme počet zelených draků Z a počet modrých draků M. Pomocí těchto veličin lze pak snadno přeměnit vědomosti rytířů na rovnice. Pro součet ocasů platí $44 = 2M + 4Z$. Pro srovnání zelených noh a modrých hlav lze psát $6Z + 6 = 6M$.

Z druhé rovnice ihned plyne $Z + 1 = M$, tj. v království žije jenom o jednoho modrého draka víc, než je zelených draků. Rovnici upravíme do tvaru $Z = M - 1$ a dosadíme za Z do první rovnice. Dostáváme

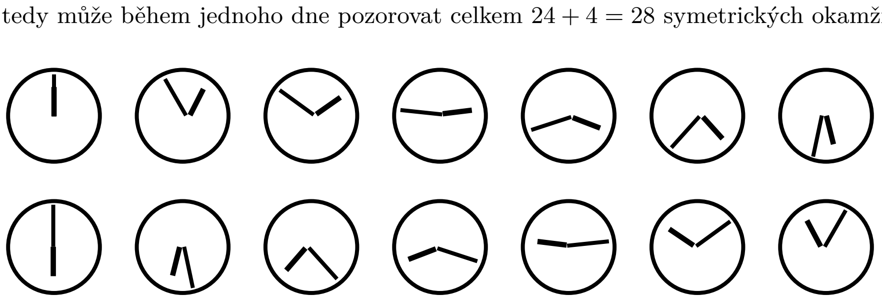
$$44 = 2M + 4Z = 2M + 4\,(M-1) = 6M - 4, \quad \Rightarrow \quad 6M = 48, \quad \Rightarrow \quad M = 8.$$

V pohádkovém království žije 8 modrých draků.

Úloha 13 ... symetrie

Klára si pořídila nové ručičkové hodiny. Protože má ráda symetrii, pozorovala okamžiky, kdy je hodinová a minutová ručička umístěna symetricky vůči svislé ose spojující čísla 12 a 6 na ciferníku. Kolik takových okamžiků může Klára pozorovat během jednoho dne?

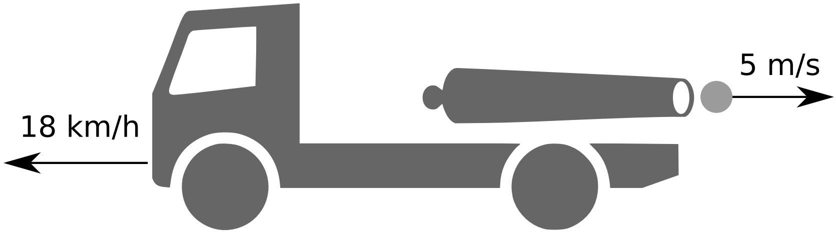
Speciální symetrické pozice, kdy se hodinová a minutová ručička nachází přímo na ose symetrie, nastanou za den celkem čtyři: 0:00, 6:00, 12:00 a 18:00. K dalším symetrickým pozicím dojde vždy jednou během jednoho oběhu minutové ručičky (tj. v časech přibližně 0:55, 1:50, atd.). Protože minutová ručička udělá za den 24 oběhů, dojde i ke vzniku 24 symetrických pozic. Klára tedy může během jednoho dne pozorovat celkem $24 + 4 = 28$ symetrických okamžiků.



Všechny symetrické pozice ručiček pro prvních 12 hodin

Úloha 14 ... výstřel

Nákladní vůz jede rovně stálou rychlostí 18 km/h. *Z jeho korby vystřelíme vodorovně a proti směru jízdy míček rychlostí* 5 m/s. *Ten pak letí* 0,6 s, *dokud nedopadne na zem. Vypočítejte, jak daleko od místa dopadu míčku se bude v okamžiku dopadu nacházet korba nákladního vozu.*



Rychlost nákladního vozu lze převést na metry za sekundu. Snadno zjistíme, že $18\,\mathrm{km/h} = 5\,\mathrm{m/s}$, což je stejně velká rychlost, jako je rychlost výstřelu míčku! Kanon tedy sice vystřelí míček v protisměru jízdy, ale protože se spolu s nákladním vozem pohybuje stejně velkou rychlostí, tyto dvě rychlosti se vzájemně odečtou. Pozorovatel stojící na silnici tak bude vidět, že míček z auta padne svisle dolů.[1]

Jelikož míček dopadne přesně pod místo výstřelu, stačí nám vypočíst, jak daleko se během pádu míčku (0,6 s) vzdálil nákladní vůz. Protože známe jeho rychlost (5 m/s), lze ihned říct, že vůz se od místa dopadu míčku nacházel ve vzálenosti $5\,\mathrm{m/s} \cdot 0{,}6\,\mathrm{s} = 3\,\mathrm{m}$.

Úloha 15 ... kapři

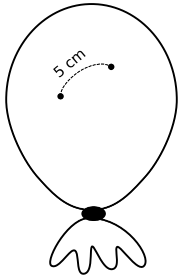
V kádi s vodou je dohromady 5 *vánočních kaprů s různými hmotnostmi. Průměrná hmotnost jednoho kapra je* 2 kg. *Po vylovení jednoho z kaprů poklesne průměrná hmotnost zbylých čtyř kaprů na* 1,6 kg. *Kolik váží vylovený kapr?*

Z počtu kaprů a jejich průměrné hmotnosti lze určit součet hmotností všech kaprů jako $5 \cdot 2\,\mathrm{kg} = 10\,\mathrm{kg}$. Po vylovení jednoho z kaprů v kádi zůstanou 4 kapři, přičemž součet jejich hmotností je $4 \cdot 1{,}6\,\mathrm{kg} = 6{,}4\,\mathrm{kg}$. Rozdíl těchto součtů určuje hmotnost vyloveného kapra, která je $10\,\mathrm{kg} - 6{,}4\,\mathrm{kg} = 3{,}6\,\mathrm{kg}$.

Úloha 16 ... balónek

Radka má kulový balónek s objemem $1\,\ell$. *Nakreslila na něj fixou dva body, které jsou od sebe vzdálené* 5 cm. *Vzdálenost měříme po povrchu. Jakou vzájemnou vzdálenost budou body mít, dofoukne-li Radka balónek na objem* $8\,\ell$*? Protože jde o kvalitní balónek, při nafukování se jeho tvar nemění.*

[1] Experimentálně byl tento jev pozorován v známém seriálu Bořiči mýtů, viz `https://youtu.be/BLuI118nhzc`.



Nafoukneme-li Radčin balónek z původní velikosti na dvojnásobný poloměr, je to stejné, jako bychom se na původní balónek podívali pod lupou s dvojnásobným zvětšením.

To znamená, že nafouknutím se všechny délky a vzdálenosti zdvojnásobí. Obecněji řečeno, zvětšíme-li poloměr balónku k-krát, všechny vzdálenosti (i na povrchu balónku) se také zvětší k-krát.

Samotný povrch balónku je ovšem úměrný druhé mocnině poloměru (je-li poloměr balónku r, jeho povrch je roven $4\pi r^2$), takže balónek s k-krát větším poloměrem má k^2-krát větší plochu. Podobně je zase objem balónku úměrný třetí mocnině poloměru (neboť objem je roven $4\pi r^3/3$), takže balónek s k-krát větším poloměrem má k^3-krát větší objem.

Radka nafoukla svůj balón z objemu $1\,\ell$ na objem $8\,\ell$, tzn. jeho objem vzrostl osminásobně. V našem případě tedy platí $k^3 = 8$, a tedy $k = \sqrt[3]{8} = 2$. Poloměr Radčina balónku se tedy zdvojnásobil a rovněž se zdvojnásobila i vzdálenost mezi body nakreslenými na balónku.

Body jsou teď od sebe vzdáleny $2 \cdot 5\,\mathrm{cm} = 10\,\mathrm{cm}$.

Úloha 17 ... hodiny

Jak dlouho musíme po poledni čekat na okamžik, kdy budou hodinová a minutová ručička na sebe kolmé?

Hodinová ručička opíše plných $360°$ za $12\,\mathrm{h} = 720\,\mathrm{min}$. Její „rychlost“ tedy můžeme definovat jako $u = 360°/720\,\mathrm{min} = 0{,}5°/\mathrm{min}$. Minutová ručička se otáčí rychlostí $v = 360°/60\,\mathrm{min} = 6°/\mathrm{min}$, neboť plný kruh opíše za jednu hodinu.

V poledne se obě ručičky překrývají. Časem se ale od sebe „oddálí“. Tím teď myslíme to, že úhel jimi opsaný se začne měnit. Rychlost tohoto oddalování není nic jiného než rozdíl rychlostí $v - u = 5{,}5°/\mathrm{min}$. Ručičky budou na sebe kolmé tehdy, když bude rozdíl opsaných úhlů roven $\alpha = 90°$.

Tento rozdíl ručičky hodin nabydou za čas

$$\frac{\alpha}{v-u} = \frac{90°}{5{,}5°/\mathrm{min}} = \frac{180}{11}\,\mathrm{min} \doteq 16{,}4\,\mathrm{min}.$$

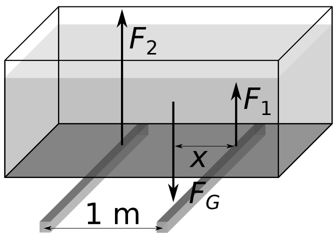
Na kolmou pozici hodinových ručiček si musíme počkat asi $16{,}4\,\mathrm{min}$ ($16\,\mathrm{min}$ a $22\,\mathrm{s}$).

Úloha 18 ... akvárium

Paťo chce umístit $2\,\mathrm{m}$ *široké a* $100\,\mathrm{kg}$ *těžké akvárium netradičně na dvě podpěry na zdi, které jsou od sebe vzdálené* $1\,\mathrm{m}$. *První podpěra má nosnost* $90\,\mathrm{kg}$, *druhá je ale špatně uchycená a její nosnost je pouze* $10\,\mathrm{kg}$. *Podpěry tedy udrží akvárium pouze tehdy, když se mezi nimi* *zátěž správně rozloží. Nalezněte toto umístění a vypočítejte, jak velká musí být vodorovná vzdálenost mezi těžištěm akvária a slabší z podpěr.*

Aby akvárium na podpěrách drželo, musí být v rovnováze nejen působící síly, ale i momenty sil. Označme F_1 a F_2 síly, kterými podpěry působí na akvárium (síly působí proti tíhové síle) a x hledanou vzdálenost. Jelikož je akvárium v pokoji (nijak se nepohybuje), rovnost momentů sil musí platit pro libovolně zvolený bod otáčení. Zvolme si tedy za tento pod slabší z podpěr. Protože síla F_1 působí přímo v tomto bodě, její moment je nulový. V rovnováze jsou tak zbylé momenty sil F_2, která působí ve vzdálenosti 1 m od našeho bodu otáčení, a F_G, která působí ve vzdálenosti x:

$$F_2 \cdot 1\,\mathrm{m} = F_G x, \quad \Rightarrow \quad x = \frac{F_2 \cdot 1\,\mathrm{m}}{mg} = \frac{900\,\mathrm{N} \cdot 1\,\mathrm{m}}{100\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2}} = 0{,}9\,\mathrm{m}.$$



Hledaná vzdálenost mezi těžištěm akvária a slabší z podpěr je tedy $0{,}9\,\mathrm{m} = 90\,\mathrm{cm}$.

Úloha 19 ... limonáda

Bětka v létě často pije svoji oblíbenou limonádu s ledem. Pořád ji ale rozčiluje, jak kostičky ledu plovou na hladině nápoje. Vezme proto brčko a jednu z nich zcela bez okolků a násilně zatlačí pod hladinu. Jak velkou silou musí Bětka působit, aby kostičku udržela zcela pod hladinou? Kostička má hustotu $900\,\mathrm{kg/m^3}$ *a hmotnost* $10\,\mathrm{g}$*, hustota vody je* $1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$*.*

Plove-li kostička ledu na hladině limonády, znamená to, že tíhová síla, která působí na led směrem kolmo dolů, je v rovnováze se vztlakovou silou, která působí přesně opačným směrem. Jelikož vztlaková síla závisí na ponořeném objemu ledové kostičky, rovnováha sil stanoví, jaká část ledu bude pod hladinou.

Pokud pak Bětka na kostičku zatlačí a zcela ji ponoří, zvětší tím ponořený objem a tedy i velikost vztlakové síly. Vzlak a tíha již nejsou více v rovnováze a Bětka proto musí brčkem působit na led dodatečnou silou F, která opět nastolí rovnováhu sil. Je zřejmé, že Bětka musí na kostičku působit ve směru opačném, než působí (zvětšená) vztlaková síla F_{vz}, tj. v stejném směru, jako působí tíhová síla F_G.

Pro rovnováhu sil tak lze setavit rovnici $F + F_G = F_{\mathrm{vz}}$ a jednotlivé síly rozepsat. Pro F_G platí $F_G = mg$, kde $m = 10\,\mathrm{g} = 0{,}01\,\mathrm{kg}$ je hmtonost ledové kostky a g je tíhové zrychlení. Pro F_{vz} zase platí $F_{\mathrm{vz}} = \varrho V g$, kde $\varrho = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$ je hustota vody a V je objem ledové kostičky (ponořená je celá kostka). Tento objem lze pomocí hmotnosti m a hustoty ledu $\varrho_{\mathrm{l}} = 900\,\mathrm{kg/m^3}$ vyjádřit jako $V = m/\varrho_{\mathrm{l}}$.

Pokud z původní rovnice vyjádříme F a dosadíme postupně všechny výše uvedené vztahy, dostaneme

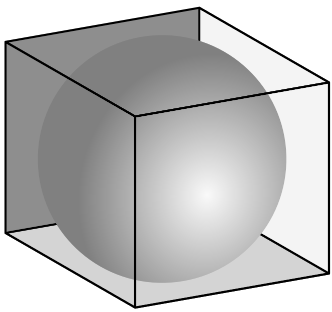
$$F = F_{\mathrm{vz}} - F_G = \varrho V g - mg = \varrho \frac{m}{\varrho_l} g - mg = mg\left(\frac{\varrho}{\varrho_l} - 1\right) =$$
$$= 0{,}01\,\mathrm{kg}\cdot 10\,\mathrm{m/s^2}\left(\frac{1\,000\,\mathrm{kg/m^3}}{900\,\mathrm{kg/m^3}} - 1\right) = \frac{1}{90}\,\mathrm{N} \doteq 11\,\mathrm{mN}.$$

Bětka musela na kostku ledu tlačit silou asi $11\,\mathrm{mN}$.

Úloha 20 ... koule v krychli

Jaký objem má největší koule, jež jde vepsat do krychle o objemu $6\,\mathrm{m^3}$*?*

Největší koule, kterou lze vepsat do krychle, je koule vepsaná a dotýká se všech stěn krychle. Poloměr této koule je polovina délky hrany krychle. Tuto délku získáme jako třetí odmocninu objemu krychle: $\sqrt[3]{6\,\mathrm{m^3}} = \sqrt[3]{6}\,\mathrm{m}$. Poloměr koule je tedy $r = \left(\sqrt[3]{6}/2\right)\,\mathrm{m}$.



Záměrně poloměr nevyčíslujeme jako desetinné číslo, protože ho hned dosadíme do vztahu pro objem koule, čímž dostáváme

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt[3]{6}}{2}\,\mathrm{m}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{6}{2^3}\,\mathrm{m^3} = \pi\,\mathrm{m^3}.$$

Objem vepsané koule je tedy $\pi\,\mathrm{m^3} \doteq 3{,}14\,\mathrm{m^3}$.

Úloha 21 ... krabice

Dostali jsme za úkol přesunout bednu o hmotnosti $10\,\mathrm{kg}$ *po rovné ploše o deset metrů dále. Pokud budeme bednu tlačit, budeme se potýkat s odporovou silou* $50\,\mathrm{N}$*. Alternativou je bednu hodit. Aby doletěla tam, kam potřebujeme, je potřeba jí udělit počáteční rychlost* $10\,\mathrm{m/s}$*. Určete, ve kterém případě vynaložíme méně energie a o kolik. Výsledek udejte v joulech.*

Pokud budeme bednu tlačit po dráze $10\,\mathrm{m}$, vykonáme při jejím přesunu práci $W_1 = 50\,\mathrm{N}\cdot 10\,\mathrm{m} = 500\,\mathrm{J}$. Pokud bednu hodíme, dodáme jí kinetickou energii $W_2 = 10\,\mathrm{kg}\cdot(10\,\mathrm{m/s})^2/2 = 500\,\mathrm{J}$. Zřejmě platí $W_2 - W_1 = 0\,\mathrm{J}$, tj. oba postupy vyžadují stejné množství práce.

Úloha 22 ... oceán

Sépii nejlépe vyhovuje tlak, který je v hloubce $90\,\mathrm{m}$ *pod hladinou oceánu. Do jaké hloubky by se musela sépie uchýlit, kdyby oceány byly tvořeny rostlinným olejem místo vody? Počítejte s hustotou vody* $\varrho_{\mathrm{v}} = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$ *a hustotou oleje* $\varrho_{\mathrm{o}} = 900\,\mathrm{kg/m^3}$*. Také předpokládejte, že sépie dokáže v oleji přežít. Atmosférický tlak je* $p_0 = 100\,\mathrm{kPa}$*.*

V hloubce $h_1 = 90\,\mathrm{m}$ vodního oceánu je tlak

$$p = p_0 + h_1 \cdot \varrho_{\mathrm{v}} \cdot g = 100\,\mathrm{kPa} + 900\,000\,\mathrm{Pa} = 1\,000\,\mathrm{kPa}\,.$$

Nyní chceme dosáhnout stejného tlaku v oceánu z oleje, tedy

$$p = p_0 + h_2 \cdot \varrho_{\mathrm{o}} \cdot g\,,$$

kde jsme označili hledanou hloubku jako h_2. Tu z rovnice vyjádříme a dostáváme

$$h_2 = \frac{p - p_0}{\varrho_{\mathrm{o}} g}\,.$$

Po dosazení známých hodnot nalezneme hloubku v olejovém oceánu $h_2 = 100\,\mathrm{m}$.

Úloha 23 ... náhoda

Michaela si náhodně vybrala 8 *různých přirozených čísel nepřevyšujících* 2 018 *(nulu nepovažujeme za přirozené číslo). Jaká je pravděpodobnost, že ve vybraných číslech najde dvojici čísel, jejichž rozdíl je dělitelný sedmi?*

Každé číslo, které si Michaela vytáhne, bude mít nějaký zbytek po dělení sedmi. Vytáhne-li si dvě čísla se stejným zbytkem, jejich rozdíl bude mít zbytek rovný nule, a tudíž bude dělitelný sedmi.

Podívejme se na úlohu z opačného konce a zkusme zjistit pravděpodobnost, že *žádná* dvojice čísel nebude mít rozdíl dělitelný sedmi, tj. Michaela si vytáhne čísla se vzájemně různými zbytky. Zde ale narážíme na problém – možné zbytky jsou v rozmezí 0 až 6, tedy k dispozici máme pouze 7 různých zbytků a Michaela si tahá až 8 čísel. Nechť je její výběr libovolný, nutně si *pokaždé* vytáhne alespoň dvě čísla se stejným zbytkem.

Jelikož pokaždé lze mezi osmi čísly najít dvojici čísel se stejným zbytkem po dělení sedmi, pokaždé je mezi osmi čísly i dvojice čísel s rozdílem dělitelným sedmi. Hledaná pravděpodobnost je tedy $100\,\%$.

Úloha 24 ... vosa

Na jednom konci rovné cesty dlouhé $2\,\mathrm{km}$ *stojí Tomáš, na druhém konci Jakub. Zamávají na sebe a rozeběhnou se naproti sobě rychlostmi* $20\,\mathrm{km/h}$ *(Tomáš) a* $15\,\mathrm{km/h}$ *(Jakub). Ve stejný okamžik od Tomáše vyletí vosa rychlostí* $35\,\mathrm{km/h}$*, až doletí k Jakubovi. Ten ji rukou odežene, vosa se proto ihned otočí a letí nazpět, doletí k Tomášovi, tam se zase otočí atd. Jakou vzdálenost vosa nalétá do okamžiku, kdy se kluci potkají?*

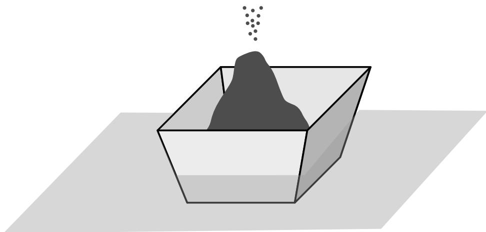
Důležité je si uvědomit, že vosa létá po celý čas konstantní rychlostí $u = 35\,\mathrm{km/h}$, což znamená, že pro zjištění prolétané dráhy nám stačí vědět pouze čas, za který se kluci setkají.

Ten nejjednodušeji zjistíme z pohledu jednoho z kluků, například Tomáše. Z jeho pohledu (z jeho *vztažné soustavy*) se mu zdá, že Jakub se k němu přibližuje ze vzdálenosti $s = 2\,\mathrm{km}$ rychlostí $20\,\mathrm{km/h} + 15\,\mathrm{km/h} = 35\,\mathrm{km/h}$, takže se potkají za čas $t = s/v$.

Vosa za tento čas uletí vzdálenost $ut = us/v$. Jelikož jsou ale rychlosti u a v stejně velké, tak platí $ut = s$ a vosa takto nalétá vzdálenost $s = 2\,\mathrm{km}$.

Úloha 25 ... miska

Tenkostěnná miska s hmotností $200\,\mathrm{g}$ *a objemem* $1\,\ell$ *plove na vodní hladině. Bětka do ní začne přisypávat písek s hustotou* $1\,600\,\mathrm{kg/m^3}$ *stálým „průtokem“* $10\,\mathrm{cm^3/s}$. *Jak dlouho bude trvat, než se miska s pískem celá zanoří pod hladinu?*



Aby se miska s pískem potopila, musí její hustota být alespoň shodná jako hustota vody. Tehdy je totiž velikost vztlakové síly v případě ponoření celého objemu misky menší, než její tíhová síla a miska se nutně potopí.

Protože je objem misky $1\,\ell$, její celková hmotnost (hmotnost misky a písku v ní) musí být alespoň $1\,\mathrm{kg}$, neboť hustota vody je $1\,000\,\mathrm{kg/m^3} = 1\,\mathrm{kg}/\ell$. Protože hmotnost misky je $200\,\mathrm{g} = 0{,}2\,\mathrm{kg}$, potřebujeme doplnit ještě $m = 800\,\mathrm{g}$ písku, jehož objem V zjistíme pomocí hustoty písku $\varrho = 1\ 600\mathrm{kg/m^3} = 1{,}6\,\mathrm{kg}/\ell$ jako $V = m/\varrho = 0{,}5\,\ell$.

Při průtoku $q = 10\,\mathrm{cm^3/s} = 0{,}01\,\ell/\mathrm{s}$ lze do misky sypat písek po dobu $t = V/q = 50\,\mathrm{s}$.

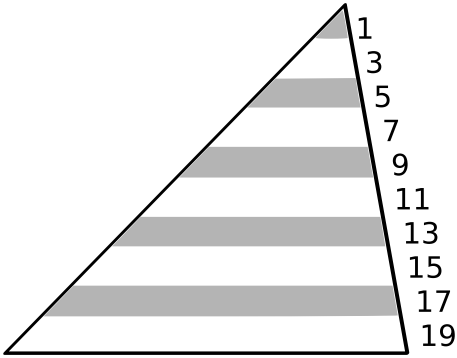
Úloha 26 ... trojúhelník

Sada úseček rovnoběžných s podstavou trojúhelníku rozděluje jeho ramena na 10 *stejných částí. Jaká část z celkového obsahu trojúhelníku je obarvena šedě?*

Označme obsah malého šedého trojúhelníku S. Teď k trojúhelníku přidejme první bílý pás. Dostaneme opět trojúhelník, který je s původním trojúhelníkem *podobný*, neboť se shodují jejich všechny tři vnitřní úhly.[2] Protože ramena jsou rozdělena na stejně dlouhé části, přidáním jednoho pásu se délka ramen zdvojnásobila. Z podobnosti pak vyplývá, že dvojnásobné jsou všechny délky, tedy i délka základny a výška. Protože obsah trojúhelníku závisí na součinu délky základny a výšky, platí, že obsah tohoto trojúhelníku je čtyřnásobný oproti obsahu S. Z toho okamžitě plyne i to, že obsah prvního bílého pásu je $4S - S = 3S$.

Přidáním dalšího (šedého) pásu dostáváme opět podobný trojúhelník, který má teď trojnásobné délky stran a tedy devítinásobný obsah. Obsah přidaného pásu je pak $9S - 4S = 5S$. Budeme-li přidávat další a další pásy, zjistíme, že jejich obsahy jsou postupně $S, 3S, 5S, \ldots, 19S$, viz obrázek.

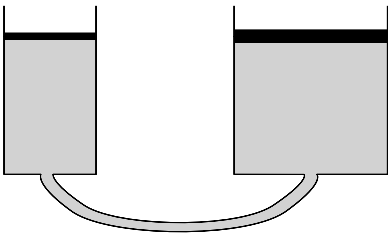
[2] Jedná se o podobnost typu *uuu*.



Sečteme-li obsahy šedých pásů, dostaneme celkem obsah $45S$. Obsah bílých pásů je $55S$ (obsah celého trojúhelníku je součtem obsahů všech pásů, tj. $45S + 55S = 100S$), takže šedě je zabarveno 45 % plochy trojúhelníku.

Úloha 27 ... píst

Mějme spojené nádoby, které jsou uzavřeny písty o obsahu $25\,\mathrm{cm}^2$ *a* $350\,\mathrm{cm}^2$*. Chceme docílit takového stavu, ve kterém soustava zůstává v klidu. Menší píst má hmotnost* $1\,\mathrm{kg}$ *a větší má hmotnost* $5\,\mathrm{kg}$*. Jakou silou musíme působit na větší píst?*



Síla působící na první píst je přímo úměrná síle působící na druhý píst a poměru obsahů plochy pístů. Aby soustava zůstala v rovnováze, výslednice sil působících na každý z pístů musí být nulová. Nebude-li se hýbat jeden z pístů, nebude se pohybovat ani ten druhý, a tedy stačí zajistit, aby se nepohyboval jeden z nich.

Na větší z pístů působí svislým směrem dolů tíhová síla $F_2 = 5\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} = 50\,\mathrm{N}$ a naše hledaná síla F. Opačným směrem působí síla vytlačující píst nahoru. Tato síla je přenášená kapalinou od menšího pístu a je rovna $F_1 \cdot (S_2/S_1)$, kde $F_1 = 1\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} = 10\,\mathrm{N}$ a $S_2/S_1 = 14$ je poměr ploch pístů. Rovnováhu sil tedy můžeme napsat jako

$$F_1 \frac{S_2}{S_1} = F_2 + F, \quad \Rightarrow \quad F = \frac{S_2}{S_1} F_1 - F_2 = 140\,\mathrm{N} - 50\,\mathrm{N} = 90\,\mathrm{N}.$$

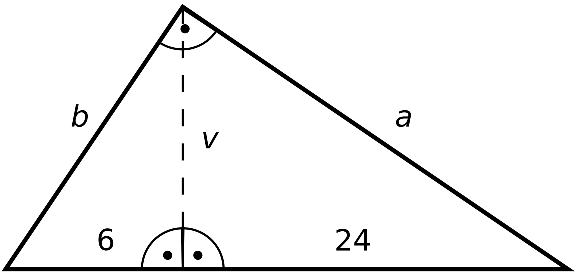
K dosažení rovnovážného stavu je potřeba, aby na větší z pístů shora působila síla o velikosti $90\,\mathrm{N}$.

Úloha 28 ... přepona

Výška pravoúhlého trojúhelníku dělí přeponu na dvě části s délkami 6 a 24. Jaký je obsah tohoto trojúhelníku?

Z dobře nakreslené ilustrace snadno sestavíme soustavu tří rovnic plynoucích z Pythagorových vět. Označíme-li a, b velikosti odvěsen a v výšku trojúhelníku (viz obrázek), tato soustava rovnic je

$$\begin{aligned} 24^2 + v^2 &= a^2\,, \\ 6^2 + v^2 &= b^2\,, \\ a^2 + b^2 &= (24+6)^2 = 30^2\,. \end{aligned}$$



Řešení této soustavy je celkem jednoduché, neboť všechny proměnné jsou zde v druhých mocninách. Stačí tedy označit $A = a^2$, $B = b^2$ a $V = v^2$ a soustavu rovnic o jednoduchých neznámých vyřešit. Dostaneme $A = 720$, $B = 180$ a $V = 144$.

Obsah trojúhelníku spočítáme jako polovinu součinu strany a příslušné výšky. V našem případě si můžeme vybrat, který z rozměrů použijeme. Nejsnáze zjistíme výšku trojúhelníku $v = \sqrt{V} = 12$, proto obsah S vypočítáme pomoci ní a přepony, jejíž délka je $c = 24 + 6 = 30$:

$$S = \frac{v \cdot c}{2} = \frac{12 \cdot 30}{2} = 180.$$

Obsah trojúhelníku je 180.

Úloha 29 ... kvádr

Stěnové uhlopříčky kvádru mají délky 13, 15 *a* $\sqrt{106}$. *Jaký je objem tohoto kvádru?*

Délky stěnových uhlopříček jsou s délkami hran propojeny pomocí Pythagorových vět. Označíme-li tyto délky a, b, c, tak bez újmy na obecnosti bude platit

$$a^2 + b^2 = 13^2 = 169, \tag{1}$$

$$b^2 + c^2 = 15^2 = 225, \tag{2}$$

$$a^2 + c^2 = 106. \tag{3}$$

Naším cílem je tuto soustavu rovnic vyřešit, tj. zjistit, čemu se rovná a, b a c. Existuje několik způsobů řešení rovnic, my si ukážeme jeden z nich. Tento postup je založen na tvrzení, že součet levých a pravých stran dvou rovnic vede opět na platnou rovnici.

Konkrétně, sečteme-li rovnice (2) a (3) a odečteme rovnici (1),[3] dostaneme

$$\left(b^2+c^2\right)+\left(a^2+c^2\right)-\left(a^2+b^2\right)=2c^2=106+225-169=162.$$

Výslednou rovnici zjednodušíme na $c^2=81$, ze které snadno vyplývá, že $c=9$.

Podobně zjistíme i délky zbylých hran. Pro $(1+2-3)$ dostáváme $2b^2=288$, tj. $b^2=144$ a $b=12$. Pro $(1+3-2)$ dostáváme zase $2a^2=50$, tj. $a^2=25$ a $a=5$.

Objem kvádru vypočteme jednoduše jako $abc=5\cdot 12\cdot 9=540$.

Úloha 30 ... jisté číslo

Jisté přirozené číslo má právě čtyři dělitele, jejichž součet je 176. Určete toto číslo, víte-li, že součet všech jeho číslic je 12.

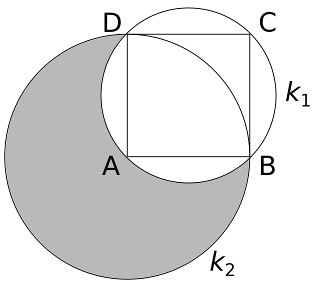
Označme hledané číslo x. Dva dělitele, které má každé přirozené číslo větší než jedna, jsou 1 a x. Z toho plyne, že x lze rozložit na součin dvou dalších prvočinitelů $x=c\cdot d$. V opačném případě by číslo x mělo více než 4 dělitele.

Dělitelé čísla x jsou tedy 1, c, d a $x=cd$. Pro jejich součet platí $1+c+d+cd=$ $=(1+c)\cdot(1+d)=176$. Číslo 176 lze zapsat jako součin dvou čísel pouze čtyřmi způsoby: $11\cdot 16$, $22\cdot 8$, $44\cdot 4$ anebo $88\cdot 2$. Naši hledaní činitelé zmenšení o 1 musí být prvočísla. Tuto podmínku splňuje pouze součin $44\cdot 4$, a tedy $c=43$ a $d=3$.

Hledané číslo x je tedy $43\cdot 3=129$.

Úloha 31 ... měsíc

Kateřina chtěla nakreslit dokonalý měsíc. Narýsovala proto čtverec ABCD *s délkou strany* 2 cm *a dvě kružnice. První kružnice k_1 je čtverci* ABCD *opsaná a druhá kružnice k_2 má střed v bodě* A *a poloměr* |AB|. *Tím vznikl Kateřinin měsíc, viz obrázek. Jaký obsah má Kateřinin měsíc, tj. jaká je plocha šedé oblasti na obrázku?*



Kružnice k_1, která je čtverci opsaná, má poloměr r_1 roven polovině úhlopříčky čtverce. Délku úhlopříčky u vypočítáme z Pythagorovy věty:

$$u^2=2^2+2^2, \quad\Rightarrow\quad u=\sqrt{8}\,\text{cm}=2\sqrt{2}\,\text{cm}.$$

Protože $r_1=u/2$, pak obsah kruhu k_1 je $S_1=\pi\cdot r_1^2=2\pi\,\text{cm}^2$. Poloměr r_2 kružnice k_2 je rovný délce strany čtverce, tedy $r_2=2\,\text{cm}$ a obsah tohoto kruhu je $S_2=\pi r_2^2=4\pi\,\text{cm}^2$.

[3] Tyto operace zapišme jako $(2+3-1)$.

Celkový obsah měsíce S je roven $3/4$ velkého kruhu k_2, od kterého odečteme ještě dva kusy kruhu k_1, které přetékají přes čtverec. Obsah čtyř těchto kusů lze vypočítat jako $S_1 - S_\square$, kde $S_\square = (2\,\mathrm{cm})^2 = 4\,\mathrm{cm}^2$ je obsah čtverce, obsah dvou kusů bude polovina tohto rozdílu.

Takže

$$S = \frac{3}{4}S_2 - \frac{S_1 - S_\square}{2} = \frac{3}{4}4\pi\,\mathrm{cm}^2 - \frac{2\pi\,\mathrm{cm}^2 - 4\,\mathrm{cm}^2}{2} = 3\pi\,\mathrm{cm}^2 - \pi\,\mathrm{cm}^2 + 2\,\mathrm{cm}^2 = (2\pi + 2)\ \mathrm{cm}^2.$$

Obsah Kateřinina měsíce je $(2\pi + 2)\ \mathrm{cm}^2 \doteq 8{,}28\,\mathrm{cm}^2$.

Úloha 32 ... pojistka

Do stejnosměrného elektrického vedení je při napětí $220\,\mathrm{V}$ *paralelně připojeno* 7 *žárovek. Každá z nich má příkon* $110\,\mathrm{W}$. *Nejméně kolika ampérovou pojistku je třeba zapojit pro ochranu takovéhoto obvodu?*

Nejdříve vypočítáme proud, který proteče jednou žárovkou. Protože známe příkon žárovky (součin napětí a proudu) a napětí v síti (napětí v paralelním zapojení je stejné pro všechny větve), pro proud I platí $I = 110\,\mathrm{W}/220\,\mathrm{V} = 0{,}5\,\mathrm{A}$.

Protože každou ze žárovek prochází proud I a protože žárovky jsou zapojeny paralelně, celkový proud procházející pojistkou je součtem jednotlivých proudů. Musíme tedy použít pojistku na alespoň $7I = 7 \cdot 0{,}5\,\mathrm{A} = 3{,}5\,\mathrm{A}$.

Úloha 33 ... mořská sůl

Kolik soli bychom museli nasypat do Severního moře, aby mělo stejnou slanost jako Rudé moře? Uvažujte, že rozhloha Severního moře je $550\,000\,\mathrm{km}^2$ *a jeho střední hloubka je* $100\,\mathrm{m}$. *Průměrná slanost Severního moře je* $35\,‰$ *a Rudého moře* $40\,‰$ *(*$1\,‰$ *představuje* $1\,\mathrm{g}$ *soli na* $1\,\ell$ *vody).*

Objem V vody v Severním moři vypočítáme snadno jako součin jeho rozlohy a průměrné hloubky. Rozlohu v km^2 si ale musíme převést na m^2: jelikož $1\,\mathrm{km} = 1\,000\,\mathrm{m}$, tak $1\,\mathrm{km}^2 = (1\,000)^2\ \mathrm{m}^2 = 10^6\ \mathrm{m}^2$:

$$V = 550\,000\,\mathrm{km}^2 \cdot 100\,\mathrm{m} = 550\,000 \cdot 10^6\ \mathrm{m}^2 \cdot 100\,\mathrm{m} = 55 \cdot 10^{12}\ \mathrm{m}^3.$$

Osolit tedy musíme skutečne hodně vody. Ze zadání rovnou vidíme, že na to, abychom dosáhli slanost Rudého moře, musíme slanost Severního moře zvednout o $5\,‰$. Jinak řečeno, každý litr mořské vody musíme dosolit $5\,\mathrm{g}$ soli. Protože platí $1\,\mathrm{m}^3 = 1\,000\,\ell$ a zároveň $1\,\mathrm{kg} = 1\,000\,\mathrm{g}$, lze také říct, že každý metr krychlový třeba osolit $m = 5\,\mathrm{kg}$ soli. Takže celková hmotnost potřebné soli je $mV = 5 \cdot 55 \cdot 10^{12}\,\mathrm{kg} = 275 \cdot 10^{12}\,\mathrm{kg} = 2{,}75 \cdot 10^{14}\,\mathrm{kg}$.

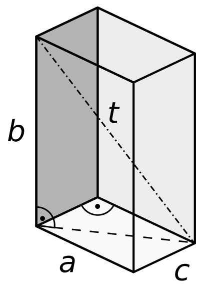
Pro zajímavost, při průměrné světové výrobě soli (220 milonů tun ročně) bychom na osolení Severního moře potřebovali zhruba 1250 let.

Úloha 34 ... kvádr podruhé

Stěnové uhlopříčky kvádru mají délky $11\,\mathrm{cm}$, $19\,\mathrm{cm}$ *a* $20\,\mathrm{cm}$. *Jak dlouhá je tělesová uhlopříčka tohoto kvádru?*

Délky stěnových uhlopříček jsou s délkami hran propojeny pomocí Pythagorových vět. Označíme-li tyto délky a, b, c, tak ve vší obecnosti bude platit

$$a^2 + b^2 = (11\,\mathrm{cm})^2 = 121\,\mathrm{cm}^2,$$
$$b^2 + c^2 = (19\,\mathrm{cm})^2 = 361\,\mathrm{cm}^2,$$
$$a^2 + c^2 = (20\,\mathrm{cm})^2 = 400\,\mathrm{cm}^2.$$



Naším cílem je vypočítat tělesovou uhlopříčku t, viz obrázek. Z obrázku je zřejmé, že tělesová uhlopříčka je přeponou pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami u_{ac} (stěnová uhlopříčka na stěně ac) a b. Platí tedy další Pythagorova věta

$$t^2 = u_{ac}^2 + b^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Druhou rovnost jsme mohli zapsat, protože Pythagorova věta platí i pro u_{ac}.

Součet $a^2 + b^2 + c^2$ získáme sečtením všech Pythagorovych vět výše (sečteme levou i pravou stranu zvlášť a obě strany pak vydělíme dvěma), čímž dostáváme

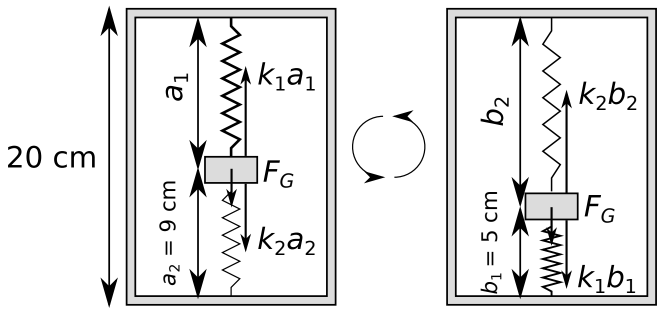
$$t^2 = a^2 + b^2 + c^2 = \frac{121\,\mathrm{cm}^2 + 361\,\mathrm{cm}^2 + 400\,\mathrm{cm}^2}{2} = 441\,\mathrm{cm}^2, \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{441\,\mathrm{cm}^2} = 21\,\mathrm{cm}.$$

Délka tělesové uhlopříčky je 21 cm.

Úloha 35 ... pružiny v rámu

David našel v šuplíku dvě pružiny s různými tuhostmi a nulovou klidovou délkou. Mezi pružiny upevnil malé závaží a pak pružiny natáhl do rámu s výškou 20 cm. *Když rám postavil svisle, závaží se nacházelo ve výšce* 9 cm *nad spodním okrajem rámu. Když rám otočil vzhůru nohama, závaží se ustálilo ve výšce* 5 cm. *Jaký je poměr tuhostí Davidových pružin?*

Obě pružiny mají nulovou klidovou délku, takže po jejich natažení do rámu budou obě působit na závaží silou, která se pokouší pružiny stáhnout opět do klidového stavu. V původním uspořádání má horní pružina délku (zde je délka to samé jako prodloužení) $a_1 = 20\,\mathrm{cm} - 9\,\mathrm{cm} = 11\,\mathrm{cm}$, dolní pružina má délku $a_2 = 9\,\mathrm{cm}$. Po otočení rámu vzhůru nohama budou prodloužení pružin $b_1 = 5\,\mathrm{cm}$ a $b_2 = 20\,\mathrm{cm} - 5\,\mathrm{cm} = 15\,\mathrm{cm}$.



V obou případech se závaží nepohybuje, tudíž jsou síly působící na závaží v rovnováze. V původním uspořádání platí (viz obrázek vlevo)

$$F_G + k_2a_2 = k_1a_1,$$

kde jsme označili F_G tíhovou sílu závaží a k_1, k_2 tuhosti pružin. Po otočení rámu dostaneme podobnou rovnici

$$F_G + k_1b_1 = k_2b_2,$$

ze které lze vyjádřit F_G jako $F_G = k_2b_2 - k_1b_1$ a dosadit do předchozí rovnice. Tím dostaneme rovnici

$$\begin{aligned} k_2b_2 - k_1b_1 + k_2a_2 &= k_1a_1, \\ k_2\left(a_2 + b_2\right) &= k_1\left(a_1 + b_1\right), \\ \frac{k_1}{k_2} &= \frac{a_2 + b_2}{a_1 + b_1} = \frac{9\,\mathrm{cm} + 15\,\mathrm{cm}}{11\,\mathrm{cm} + 5\,\mathrm{cm}} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Poměr tuhostí Davidových pružin je tedy 3 : 2.

Úloha 36 ... podivné číslo

Najděte nenulová jednociferná čísla A a B taková, aby platilo $ABBA = (AA)^2 + (BB)^2$. Symboly A a B zde představují číslice, tedy pokud např. $A = 5$ a $B = 3$, potom AB je číslo 53.

Rovnici ze zadání můžeme upavit do tvaru $(BB)^2 = ABBA - (AA)^2$. Jelikož čísla na pravé straně rovnice jsou shodně sudá nebo lichá[4] a tedy i číslo $(BB)^2$ je sudé. Možné hodnoty čísla B tedy jsou $B \in \{2, 4, 6, 8\}$.

Číslo $ABBA$ lze dále matematicky zapsat i jako $1001A + 110B$, neboť cifra A se nachází na místě jednotek a tisíců a cifra B na místě stovek a desítek. Stejně tak lze rozepsat $(AA)^2 = (11A)^2 = 121A^2$ a $(BB)^2 = 121B^2$. Rovnici ze zadání tak lze přepsat do tvaru

$$1001A + 110B = 121A^2 + 121B^2, \quad \Rightarrow \quad 3A - B = 11A^2 + 11B^2 - 88A - 11B.$$

Rovnici jsme upravili tak, aby byly na pravé straně všechny členy dělitelné jedenácti. Poněvadž jde o rovnici, 11 musí dělit i levou stranu rovnice (anebo jsou obě strany nulové, což není pro

[4] Je-li A sudá cifra, i číslo AA je sudé a jeho druhá mocnina je taky sudá (součin sudých čísel je vždy sudý). Je-li A liché, je liché i číslo AA, stejně tak jako jeho druhá mocnina (součin dvou lichých čísel je lichý).

nás zajímavé řešení). Dostáváme tak možnosti $3A - B = 0$, $3A - B = 11$ nebo $3A - B = 22$ (vyšší rozdíly nelze pro jednociferná A, B dosáhnout).

Z první rovnosti plyne $A = B/3$, tj. B je dělitelné třemi. To z možných hodnot pro B splňuje jenom $B = 6$ a tedy $A = 2$. Požadovaná rovnost $2662 = 22^2 + 66^2$ ovšem neplatí.

Z druhé rovnosti plyne $A = (11 + B)/3$. Celočíselnou hodnotu pro A získáme jenom pro $B = 4$, a to $A = 5$. Opět ale neplatí $5445 = 55^2 + 44^2$.

Konečně pro třetí rovnost nacházíme $A = (22 + B)/3$. Celočíselnou hodnotu pro cifru A najdeme pro $B = 2$, a to $A = 8$. Zde se můžeme přesvědčit, že skutečně platí $8228 = 88^2 + 22^2$. Hledaná dvojice čísel A, B je tedy 8 a 2.

Úloha 37 ... černá díra

Představte si, že se nacházíte ve vesmírné lodi obíhající kolem černé díry. Momentálně jste v oblasti, kde na vás působí gravitační zrychlení $81g$ a rádi byste se dostali do vzdálenosti, kde na vás bude působit zrychlení nejvýše g. Víme, že gravitační zrychlení klesá s druhou mocninou vzdálenosti. Kolik oběhů musíme během vzdalování vykonat, jestliže se s každým oběhem vzdálíme od díry o stejně velkou vzdálenost, rovnou polovině počáteční vzdálenosti?

Aby tíhové zrychlení, které pociťujeme, kleslo 81-krát, musíme svoji vzdálenost od černé díry zvýšit $\sqrt{81} = 9$-krát, jak plyne z kvadratické závislosti gravitačního zrychlení na vzdálenosti od černé díry. Nechť se tedy začínáme od díry vzdalovat ze vzdálenosti r_1 a chceme se dostat do vzdálenosti $r_2 = 9r_1$. Při spirálovitém pohybu se po každém obletu vzdálíme o $d = r_1/2$, po n otáčkách se vzdálíme o nd. Počet otáček potřebný k přesunu do požadované vzdálenosti je tedy

$$n = \frac{r_2 - r_1}{d} = \frac{8r_1}{r_1/2} = 16.$$

Abychom se dostali do vzdálenosti, kde pociťujeme zrychlení o velikosti g, musíme vykonat 16 obletů.

Úloha 38 ... mince

Pirátský poklad obsahuje přesně 300 *mincí. Jedna mince, na pohled stejná jako všechny ostatní, je ovšem falešná a váží o trochu méně než pravé mince. Pro srovnávání hmotností mincí máme k dispozici pouze rovnoramenné váhy bez závaží. Kolik nejméně vážení je zapotřebí k tomu, abychom s určitostí zjistili, která mince je falešná?*

Rovnoramennými vahami bez závaží lze pouze srovnávat, zda má n mincí stejnou hmotnost jako kupka n jiných mincí. Je zřejmé, že odvažovat mince po dvojicích není velmi efektivní strategie, neboť na bezpečné určení falešné mince bychom potřebovali alespoň 150 vážení.

Můžeme se tedy pokusit kupky mincí dělit na poloviny a srovnávat celkové hmotnosti kupiček. Lehčí kupička bude totiž vždy obsahovat falešnou minci a počet „podezřelých“ mincí každým vážením snížíme na polovinu původního počtu.

Existuje ale ještě efektivnější postup! Mince lze rozdělovat také na tři stejné kupičky, přičemž srovnávat budeme hmotnosti libovolných dvou. V případě stejných hmotností víme, že falešnou minci obsahuje zbylá (nevážená) kupička. Tuto kupičku pak nazveme *podezřelá* a použijeme ji na další vážení. Rozdělovat mince na více kupiček ale zase není optimální, protože odvážení dvou kupiček nám pak nic neřekne o tom, která ze zbylých kupiček je podezřelá.

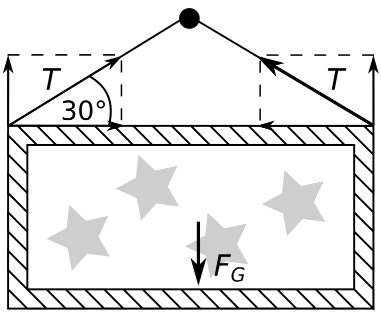
Původních 300 mincí tedy rozdělíme na kupičky po 100 a odvážíme libovolnou dvojici z nich (1. vážení). Podezřelou kupičku rozdělíme na 33, 33 a 34 mincí a odvážíme první dvě kupičky (2. vážení). Podle výsledku vážení může podezřelá kupička obsahovat buď 33 anebo 34 mincí. Takže ji buď rozdělíme na tři kupičky po 11 anebo na dvě kupičky po 11 a jednu po 12 mincích a odvážíme dvě kupičky se stejným počtem mincí (3. vážení). Teď podezřelá kupička obsahuje buď 11 anebo 12 mincí. Ty rozdělíme na 4, 4 a 3 mince anebo na tři kupičky po 4 mincích a srovnáme kupičky obsahující 4 mince (4. vážení). Opět, podezřelá kupička může obsahovat buď 3 anebo 4 mince, které lze rozdělit v prvním případě na tři jednotlivé mince a 5. vážením odhalit falešnou minci. Ve druhém případě ze 4 podezřelých mincí odvážíme libovolné dvě (pořád 5. vážení) a buď určíme falešnou minci, anebo označíme za podezřelé zbylé dvě mince. Pomocí 6. vážení pak definitivně určíme, která mince je v pokladu falešná.

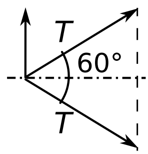
Na bezpečné určení falešné mince tak potřebujeme alespoň 6 vážení.

Úloha 39 ... obrázek

Petra si v obchodě koupila obraz a teď si ho chce pověsit. Vzala si tedy hřebík a kus provázku, který ale praskne, pokud je na něj vyvíjena síla větší než 120 N. *Provaz a obraz svírají úhel* 30°, *viz obrázek. Jaký nejtěžší obdélníkový obraz si Petra může zavěsit na stěnu?*

Na obraz působí síla $\boldsymbol{F}_G = mg$, kde m je hmotnost obrazu a g je tíhové zrychlení. Navíc zde působí i dvě síly $\boldsymbol{T}$ v šikmém směru. Rozložíme-li tyto síly do vodorovné a svislé složky (viz obrázek), vidíme, že vodorovné složky působí proti sobě, mají stejnou velikost a tudíž se vyruší. Proti tíze obrazu budou tedy působit pouze svislé složky těchto sil.





Velikost svislé složky určíme tak, že si do obrázku rozkladu sil symetricky dokreslíme i spodní trojúhelník. Tento trojúhelník má vnitřní úhly rovné 60°, je tedy rovnostranný. Proto z osové symetrie tohoto trojúhelníku lze určit, že dvojnásobek velikosti svislé síly musí být rovný velikosti samotné síly T. Jedna polovina provázku tedy „drží“ obraz silou $T/2$. Hmotnost obrazu je tedy

$$F_G = mg = T, \quad \Rightarrow \quad m = \frac{T}{g} = \frac{120\,\mathrm{N}}{10\,\mathrm{m/s^2}} = 12\,\mathrm{kg}.$$

Petřin obraz tedy může vážit maximálně 12 kg.

Úloha 40 ... lup

255 zbojníků se dělí o lup. Postup je následovný: všichni stojí v kruhu a říkají postupně čísla od 1 výše. Když nějaký zbojník řekne sudé číslo, vezme si podíl lupu, opustí kruh a počítání pokračuje dál. Zbojníci počítají až do té doby, dokud všichni neřeknou sudé číslo.

Na Alibabu se usmálo štěstí, protože ze hry vypadl jako poslední. Jaké číslo řekl Alibaba jako svoje první?

Z popisu postupu dělení lupu plyne, že při počítání každý druhý zbojník vypadne. V prvním kole (tj. do okamžiku, když první zbojník řekne další číslo) vypadne každý, kdo stojí na sudé pozici. Můžeme si tedy rozmyslet, že po prvním kole zbyde v kruhu polovina, tj. 128 zbojníků. V druhém kole také vypadne polovina zbojníků a zbyde jich 64. V každém dalším se situace bude opakovat, až zbyde jen Alibaba.

Zamysleme se nyní nad tím, jaké číslo jako poslední dostane Alibaba. Pro snažší představu mějme situaci s pouze pěti zbojníky. Při čísle 2 zbydou čtyři zbojníci, při čísle 4 zbydou tři, až při čísle 8 zbyde jeden a při čísle 10 vypadne i poslední. Pokud budeme mít na začátku lichý počet zbojníků, budeme se muset dopočítat dvojnásobku jejich počátečního počtu (to mj. proto, že jen polovina čísel způsobuje vypadnutí zbojníka).

V našem případě máme 255 zbojníků a na Alibabu, jelikož vypadne jako poslední, padne číslo $2 \cdot 255 = 510$. Teď můžeme postupovat od konce a zjišťovat, v jakých kolech měl Alibaba jaké číslo. Nejdříve si ale připomeňme počty zbojníků po jednotlivých kolech. Po prvním kole zbyde 128 zbojníků, po druhém 64, po třetím 32, po čtvrtém 16, po pátém 8, po šestém 4, po sedmém 2, po osmém 1 a po devátém 0. Teď tedy víme, že Alibaba vypadl s číslem 510, a to po devátém kole. Zároveň se nacházel ve všech kolech předchozích a v každém z nich měl liché číslo. Od čísla 510 proto budeme postupně odčítat počty zbojníků a tím zjistíme, jaké měl Alibaba v daném kole číslo. Po osmém kole to bylo 509, po sedmém 507, po šestém 503 atd. Po započítání všech kol až do prvního kola zjišťujeme, že Alibaba měl v tomto kole číslo 255, takže stál vedle zbojníka, který počítání začal.

Úloha 41 ... tramvaje

Tramvaje jezdí mezi dvěma zastávkami A a B rovnoměrnou rychlostí a v pravidelných časových intervalech. Petr kráčí (jinou a menší) rovnoměrnou rychlostí od zastávky A k zastávce B. Přitom změřil, že každých 18 min *ho předjede tramvaj. Pak se Petr otočil a kráčel stejnou rychlostí z B do A a všiml si, že teď ho protijedoucí tramvaje míjely každých* 12 min.

Jaký je skutečný časový interval mezi tramvajemi, tj. jak často by Petra míjely tramvaje, kdyby u tramvajové trati pouze stál?

Kráčí-li Petr od zastávky A k zastávce B, pak interval, ve kterém míjí tramvaje, je

$$t_1 = \frac{s}{v_\mathrm{t} - v_\mathrm{p}} = 18\,\mathrm{min}\,,$$

kde s je vzdálenost mezi zastávkami, v_t je rychlost tramvají a v_p je Petrova rychlost. Naopak, když jde ze zastávky B k zastávce A, tak míjí tramvaje v intervalu

$$t_2 = \frac{s}{v_\mathrm{t} + v_\mathrm{p}} = 12\,\mathrm{min}\,.$$

Nás zajímá interval tramvají změřený stojícím Petrem, tedy $t = s/v_\mathrm{t}$. Nejprve ze vztahu pro t_1 vyjádříme

$$v_\mathrm{p} = v_\mathrm{t} - \frac{s}{t_1}$$

a poté dosadíme do druhé rovnice, čímž získáme

$$t_2 = \frac{s}{2v_\mathrm{t} - \frac{s}{t_1}} \,.$$

Zlomek na pravé straně zkrátíme s a provedeme nahrazení $v_\mathrm{t}/s = 1/t$, tedy

$$t_2 = \frac{1}{\frac{2}{t} - \frac{1}{t}} \,.$$

Zbývá už jen vyjádřit hledaný časový interval

$$t = \frac{2}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}} = 14{,}4\,\mathrm{min}\,.$$

Poznamenejme, že nalezený výraz je tzv. harmonickým průměrem časů t_1 a t_2. Pokud by dráhy s v původních vztazích byly různé, objevily by se jako váhy u převrácených hodnot dílčích časů.

Úloha 42 ... šťastná sedmička

Mirek napsal k-ciferné číslo, které obsahovalo pouze sedmičky (777 . . . 7). Ke svému překvapení zjistil, že ciferný součet sedminásobku napsaného čísla je přesně 777. Jaký je počet cifer k Mirkova čísla?

Mirkovo číslo lze napsat pomocí mocnin desítek jako

$$777\cdots 7 = 7\left(1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{k-1}\right).$$

Sedminásobek tohoto čísla je jednoduše

$$7 \cdot 7\left(1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{k-1}\right) = 49\left(1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{k-1}\right).$$

Činitel 49 lze opět rozdělit na mocniny desítek jako $4 \cdot 10 + 9 \cdot 1$, a výraz výše rozepsat jako

$$4\left(10 + 10^2 + \cdots + 10^{k}\right) + 9\left(1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{k-1}\right).$$

Spojíme-li obě závorky podle odpovídajících mocnin 10, dostaneme

$$9 \cdot 1 + (4+9) \cdot 10 + (4+9) \cdot 10^2 + \cdots + (4+9) \cdot 10^{k-1} + 4 \cdot 10^k.$$

Člen v závorce lze opět přepsat jako $10 + 3$ a každou závorku rozdělit na dvě mocniny desítky. Po spojení stejných mocnin konečně dostáváme

$$9 \cdot 1 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 10^2 + \cdots + 4 \cdot 10^{k-1} + 5 \cdot 10^k.$$

Sedminásobek Mirkova čísla lze tedy napsat jako $5444\cdots 439$, přičemž se jedná o $k{+}1$ ciferné číslo[5] a obsahuje tedy $k-2$ čtyřek. K tomuto závěru lze poněkud méně obecněji dospět tak, že budeme pomocí násobení pod sebou počítat postupně $7 \cdot 7 = 49$, $77 \cdot 7 = 539$, $777 \cdot 7 = 5439$, $7777 \cdot 7 = 54\,439$ a nahlédneme, jak musí vypadat výsledné číslo pro libovolné k.

Pro ciferný součin tedy platí jednoduchá rovnice $777 = 5 + 4\,(k-2) + 3 + 9$, kterou vyřešíme a získáme $k = 192$.

[5] Počet cifer zjistíme jednoduše: například $10^6 = 1\,000\,000$ je sedmiciferní číslo, takže $k+1$ ciferné číslo má nejvyšší mocninu 10^k.

Náboj Junior 2018

Bánovce nad Bebravou – Gymnázium Janka Jesenského • **Banská Bystrica** – Gymnázium Andreja Sládkoviča • **Białystok** – Liceum Ogólnokształcące Politechniki Białostockiej • **Bielsko-Biała** – V Liceum Ogólnokształcące • **Bratislava** – UPeCe sv. Jozefa Freinademetza • **Brezno** – Gymnázium Jána Chalupku • **Brno** – Gymnázium Matyáše Lercha • **Česká Lípa** – Gymnázium Žitavská • **České Budějovice** – Gymnázium Jírovcova • **Frýdlant nad Ostravicí** – Gymnázium Frýdlant • **Grodzisk Mazowiecki** – Szkoła Podstawowa nr 5 im. Leonida Teligi • **Hlohovec** – Gymnázium Ivana Kupca • **Hradec Králové** – Univerzita Hradec Králové, Přírodovědecká fakulta • **Kadaň** – Sluníčková základní škola Kadaň • **Karlovy Vary** – První české gymnázium v Karlových Varech • **Košice** – Gymnázium Alejová • **Kraków** – Uniwersytet Jagielloński, Wydział Matematyki i Informatyki • **Krosno** – I LO z Oddz. Dwujęzycznymi im. Mikołaja Kopernika • **Levice** – Gymnázium Andreja Vrábla • **Liberec** – Doctrina – Podještědské gymnázium • **Liptovský Mikuláš** – Gymnázium Michala Miloslava Hodžu • **Łódź** – I Liceum Ogólnokształcąceim. Mikołaja Kopernika • **Lučenec** – CVČ Magnet • **Michalovce** – Gymnázium Pavla Horova • **Námestovo** – Gymnázium Antona Bernoláka • **Nitra** – Gymnázium Párovská • **Olomouc** – Gymnázium Olomouc-Hejčín • **Ostrava** – Gymnázium Olgy Havlové • **Piešťany** – Gymnázium Pierra de Coubertina • **Písek** – SPŠ a VOŠ Písek • **Plzeň** – Gymnázium Mikulášské náměstí • **Poprad** – Gymnázium Kukučínova • **Praha** – Gymnázium Voděradská • **Praha** – Gymnázum Christiana Dopplera • **Prešov** – Gymnázium Jána Adama Raymana • **Prievidza** – Gymnázium Vavrinca Benedikta Nedožerského • **Púchov** – Gymnázium Púchov • **Šahy** – Gymnázium Mládežnícka • **Sokolov** – Gymnázium a KVC Sokolov • **Sosnowiec** – IV LO z Oddz. Dwujęzycznymi im. Stanisława Staszica • **Sučany** – Bilingválne gymnázium Milana Hodžu • **Šurany** – Gymnázium Bernolákova • **Tarnów** – III Liceum Ogólnokształcące im. Adama Mickiewicza • **Třebíč** – Katolické gymnázium • **Trenčín** – Gymnázium Ľudovíta Štúra • **Trnava** – SOŠ Trnava • **Trstená** – Gymnázium Martina Hattalu • **Ústí nad Labem** – Univerzita Jana Evangelisty Purkyně, Fakulta sociálně ekonomická • **Warszawa** – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica • **Wrocław** – XV Liceum Ogólnokształcące im. mjr. Piotra Wysockiego • **Zlín** – Gymnázium Zlín-Lesní čtvrť • **Zvolen** – Gymnázium Ľudovíta Štúra

Náměty úloh

Beata Czernecka • Miroslav Hanzelka • Tomáš Kremel • Radek Kusek • Katarína Marčeková • David Němec • Kateřina Stodolová • Patrik Švančara • Pavla Trembulaková

Autoři zadání a řešení úloh

Miroslav Hanzelka • David Němec • Kateřina Stodolová • Patrik Švančara

Překladatelé

Beata Czernecka • Jakub Hluško • Radek Kusek • Anna Łeń • Karolina Szulc

Recenzenti

Tomáš Kremel • Jakub Sláma • Pavla Trembulaková