# NÁBOJ junior

7 edycja

2018/19

# Rozwiązania

výfuk

UNIWERSYTET
JAGIELLOŃSKI
W KRAKOWIE

## Zadanie 1 ... aparat

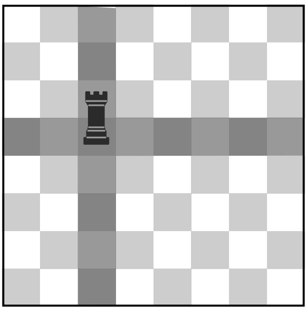
*Jola niedawno kupiła nowy aparat fotograficzny. Zapłaciła za niego* $212,3$ *złotych. Zapłaciła za niego banknotem* $500$ *zł. Jaka jest najmniejsza liczba banknotów i monet, jaką może jej wydać kasjerka?*

Kasjerka musi wydać Joli w sumie $500\,\text{zł} - 212{,}3\,\text{zł} = 287{,}7\,\text{zł}$. Najmniejszą liczbę wydanych banknotów i monet można uzyskać w następujący sposób: zaczynamy od największych nominałów i schodzimy do coraz niższych. W konsekwencji okazuje się, że kasjerka wyda Joli banknoty $200\,\text{zł}$, $50\,\text{zł}$, $20\,\text{zł}$ i $10\,\text{zł}$ oraz monety $5\,\text{zł}$, $2\,\text{zł}$, $50\,\text{gr}$, $20\,\text{gr}$. W sumie Jola otrzyma łącznie 8 banknotów i monet.

## Zadanie 2 ... szachy

*Wieża została umieszczona na jednym z pól pustej szachownicy o wymiarach* $8 \times 8$*. Ile jest pól, na które możemy przenieść wieżę wykonując jeden ruch? Wieża może poruszać się tylko w pionie lub w poziomie.*

Bez względu na to, gdzie wieża była umieszczona na początku, możemy ją przenieść w dowolne miejsce w tej samej kolumnie lub wierszu. Wiersz i kolumna mają jedno wspólne pole, co oznacza, że mamy $2 \cdot 8 - 1 = 15$ miejsc w które możemy przenieść wieżę. Ponieważ jedno z pól jest początkowo zajęte przez wieżę to możemy ją przenieść na jedno z 14 pól.



## Zadanie 3 ... wakacje

*Adam wraca z wakacji. Jedzie samochodem do miasta, które jest oddalone o* $250\,\text{km}$*. Przez pierwszą godzinę porusza się ze średnią prędkością* $50\,\text{km/h}$*. Z jaką prędkością powinien przejechać resztę drogi, aby średnia prędkość całej podróży podwoiła się w stosunku do średniej prędkości z pierwszej godziny? Wynik zaokrąglij w dół, do pełnych* $\text{km/h}$*.*

Policzmy najpierw czas podróży Adama, jeżeli jego średnia prędkość wynosiła $100\,\text{km/h}$. Dzieląc odległość przez prędkość otrzymujemy czas $250\,\text{km}/(100\,\text{km/h}) = 2{,}5\,\text{h}$. Ponieważ Adam przejechał już $50\,\text{km}$ w czasie pierwszej godziny, pozostało mu do pokonania $200\,\text{km}$ w ciągu $1{,}5\,\text{h}$. Zatem jego średnia prędkość przez resztę podróży musi być równa $200\,\text{km}/1{,}5\,\text{h} = 133\,\text{km/h}$.

## Zadanie 4 ... ciężarki

*Piotr sprawdzał wagę swoich ciężarków. Najpierw zważył na raz trzy z nich, o masach odpowiednio* 0,03 t, 200 000 g *i* 15 kg. *Potem wziął inne trzy ciężarki o masach* 0,01 t 35 000 g *i* 200 kg. *Jaka jest różnica mas pomiędzy dwiema grupami, które ważył Piotr?*

Możemy zapisać masy ciężarków w tych samych jednostkach. Najlepszą strategią jest zamienienie wszystkich z nich na jednostkę masy układu SI — kilogramy. Ciężarki Piotra z pierwszego ważenia mają masy równe kolejno 0,03 t = 30 kg, 200 000 g = 200 kg i 15 kg. Łącznie ważą 245 kg.

Ciężarki z drugiego ważenia mają masy równe odpowiednio 0,01 t = 10 kg, 35 000g = 35 kg i 200 kg. Po zsumowaniu otrzymujemy ponownie, że ich łączna masa wynosi 245 kg. Różnica między masami poszczególnych ważeń wynosi więc 0 kg.

## Zadanie 5 ... krople wody

*Kran w łazience Radka przecieka. Zmierzył on, że co dwie sekundy spada jedna kropla. Po tym, jak Radek naprawił kran, krople wody spadają już tylko co dziewięć sekund. Oblicz stosunek częstotliwości spadania kropli przed i po naprawieniu kranu.*

Na początku krople z kranu spadały z okresem czasu $T_1 = 2\,\mathrm{s}$. Po tym jak Radek naprawił kran okres spadania kropli zwiększył się do $T_2 = 9\,\mathrm{s}$. Częstotliwość jest zdefiniowana jako odwrotność wartości czasu spadania kropli, tj. $f_1 = 1/2\,\mathrm{s}^{-1}$ i $f_2 = 1/9\,\mathrm{s}^{-1}$. Stosunek częstotliwości przed i po naprawieniu kranu wynosi $f_1/f_2 = 9/2 = 4{,}5$.

## Zadanie 6 ... Fahrenheit versus Celsjusz

*Krzyś spędza wakacje w Nowym Orleanie w USA. Pewnego razu udał się na wycieczkę do Miami i był ciekawy jakiej różnicy temperatur w stopniach Celsjusza powinien się spodziewać. Według prognozy pogody temperatura w Nowym Orleanie wynosiła* $86°\,\mathrm{F}$, *a w Miami* $104°\,\mathrm{F}$. *Pomóż Krzysiowi obliczyć różnicę temperatur, znając zależność pomiędzy temperaturą w skali Celsjusza a temperaturą w skali Fahrenheita:* $T[°\mathrm{C}] = (T[°\mathrm{F}] - 32) \cdot 5/9$.

Rozwiązujemy problem poprzez podstawienie danych do wzoru. Temperatura w Nowym Orleanie to

$$T_{\mathrm{NO}} = (86 - 32) \cdot \frac{5}{9}\,°\mathrm{C} = 30\,°\mathrm{C},$$

a w Miami

$$T_{\mathrm{M}} = (104 - 32) \cdot \frac{5}{9}\,°\mathrm{C} = 40\,°\mathrm{C}.$$

Różnica temperatur między miastami to $T_{\mathrm{M}} - T_{\mathrm{NO}} = 10\,°\mathrm{C}$.

## Zadanie 7 ... śmieszne liczby

*Liczbę naturalną nazwiemy „śmieszną“, jeśli składa się jedynie z cyfr* 1, 2 *lub* 3. *Ile jest śmiesznych liczb mniejszych od* 1 000*?*

Śmieszne liczby, które mniejsze od 1 000 mogą być jednocyfrowe, dwucyfrowe lub trzycyfrowe.

Są tylko 3 jednocyfrowe śmieszne liczby (1, 2 i 3). Dwucyfrowych liczb śmiesznych jest zdecydowanie więcej gdyż każda cyfra spośród 1, 2 i 3 może być cyfrą jedności a także cyfrą dziesiątek. Stąd mamy $3 \cdot 3 = 9$ dwucyfrowych śmiesznych liczb. Podobnie każda z cyfr 1, 2 , może być cyfrą jedności, dziesiątek i setek w przypadku trzycyfrowych liczb śmiesznych. Mamy $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ takich liczb.

W sumie istnieje $3 + 9 + 27 = 39$ takich liczb.

## Zadanie 8 ... oporniki

*Opór elektryczny metalowego kabla zależy od jego długości oraz niebezpośrednio od pola jego przekroju. Paweł zmierzył opór $R_\mathrm{P}$ swojego kabla. Gaweł zauważył, że jego kabel jest zrobiony z tego samego materiału co kabel Paweł, ale jego długość i średnica są dwa razy większe. Jaki jest stosunek oporów $R_\mathrm{G}/R_\mathrm{P}$ kabli Gawła i Paweł ?*

Jeśli kabel Gawła byłby tylko dwa razy dłuższy niż Pawła, to jego opór byłby dwa razy większy (tj. wynosiłby $2R_\mathrm{P}$), ponieważ opór zależy liniowo od długości.

Jeżeli kabel Gawła miałby tylko dwukrotnie większą średnicę niż Pawła, to dwukrotnie większy byłby także jego promień. Pole przekroju jest proporcjonalne do kwadratu promienia (co wynika z wzoru na pole koła), więc pole przekroju tego kabla byłoby cztery razy większe niż kabla Pawła (tj. $R_\mathrm{P}/4$).

Aby uwzględnić oba czynniki (podwojoną długość oraz średnicę) jednocześnie musimy tylko przemnożyć oba współczynniki uzyskując

$$R_\mathrm{G} = 2 \cdot \frac{1}{4} R_\mathrm{P} = \frac{R_\mathrm{P}}{2}, \quad \Rightarrow \quad \frac{R_\mathrm{G}}{R_\mathrm{P}} = \frac{1}{2}.$$

Opór kabla Gawła jest więc połową oporu kabla Pawła, tj. stosunek ich oporów jest równy 1/2.

## Zadanie 9 ... pierwiastek kwadratowy

*Ile jest takich liczb naturalnych $n$ , że odległość na osi liczbowej pomiędzy liczbą 7 a $\sqrt{n}$ jest mniejsza od 2?*

Ograniczenie odległości od liczby 7 mówi, że $\sqrt{n}$ leży pomiędzy liczbą 5 a liczbą 9. Dlatego możemy napisać nierówności $5 < \sqrt{n} < 9$. Możemy podnieść ją do kwadratu, ponieważ wszystkie liczby są nieujemne. Otrzymujemy $25 < n < 81$. Jest 55 liczb naturalnych spełniających obie te nierówności.

## Zadanie 10 ... pole ziemniaków

*Jaś często odwiedza dziadków jesienią, aby pomóc im orać ich pole z ziemniakami. Jaś wie, że pielenie pola zajmuje mu 4 h. Po dwóch godzinach od rozpoczęcia pracy Małgosia postanowiła mu pomóc. Gdyby Małgosia sama orała pole zajęłoby jej to 6 h. Po jakim czasie (od rozpoczęcia prac) pole zostanie zaorane?*

Zauważmy,że po dwóch godzinach Jaś zaora połowę pola. Po tym Małgosia dołącza do niego, aby mu pomóc. Podczas godziny Jaś ora 1/4 pola a Małgosia 1/6 (w tym samym czasie), więc wspólnie w ciągu godziny orzą oni 5/12 pola. Czyli połowę pola orzą w $1/2 : 5/12 = 6/5 = 1{,}2$ godziny. Czyli w sumie pole zostało zaorane w $2\,\mathrm{h} + 1{,}2\,\mathrm{h} = 3{,}2\,\mathrm{h}$.

## Zadanie 11 ... konkurs mocy

*Czajnikowi kuchennemu dostarczono pracę o wartości $W_1 = 120\,\mathrm{kJ}$ w czasie $t_1 = 2\,\mathrm{min}$. Źródło prądu wysokiej klasy komputera wykonuje pracę $W_2 = 14{,}4\,\mathrm{MJ}$ w czasie $t_2 = 8\,\mathrm{h}$. Które urządzenie ma większą moc? Odpowiedź podaj jako stosunek mocy $P_1/P_2$.*

Zdefiniujmy moc $P$ jako średnią pracę w czasie $t$, tj. $P = W/t$. Stosunek mocy czajnika $P_1$ oraz mocy komputera $P_2$ możemy wyrazić jako

$$P_1/P_2 = \frac{W_1}{t_1}\Big/\frac{W_2}{t_2} = \frac{W_1}{W_2}\cdot\frac{t_2}{t_1} = \frac{120\,\mathrm{kJ}}{14\,400\,\mathrm{kJ}}\cdot\frac{480\,\mathrm{min}}{2\,\mathrm{min}} = 2\,.$$

Czajnik ma dwa razy większą moc niż komputer.

## Zadanie 12 ... smoki

*W Krainie Czarów żyją niebieskie i zielone smoki. Każdy niebieski smok ma 6 głów, 8 nóg oraz 2 ogony. Każdy zielony smok ma 8 głów, 6 nóg oraz 4 ogony. Podczas swojej wyprawy dzielny Rycerz Zygmunt widział: 44 smocze ogony, zaś zielonych nóg o 6 mniej niż niebieskich głów. Ile niebieskich smoków spotkał Rycerz Zygmunt podczas swojej wyprawy?*

Oznaczmy przez $Z$ liczbę zielonych, a przez $N$ liczbę niebieskich smoków spotkanych przez Rycerza Zygmunta. Układamy układ równań korzystając ze zmiennych $Z$ i $N$. Wiemy, że łączna liczba ogonów to $44 = 2N + 4Z$. Znamy również różnicę pomiędzy zielonymi nogami i niebieskimi głowami $6Z + 6 = 6B$.

Z drugiego równania otrzymujemy, że $Z = N - 1$ i wstawiamy do pierwszego równania, co nam daje

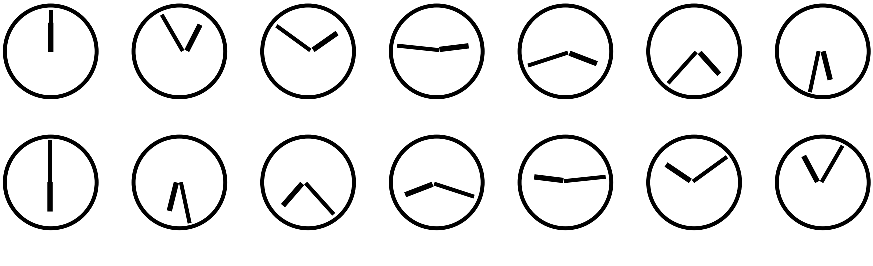
$$44 = 2N+4Z, \quad \Rightarrow \quad 44 = 2N+4\,(N-1)\,, \quad \Rightarrow \quad 44 = 6N-4, \quad \Rightarrow \quad 6N = 48, \quad \Rightarrow \quad N = 8.$$

Rycerz Zygmunt widział 8 niebieskich smoków.

## Zadanie 13 ... symetria

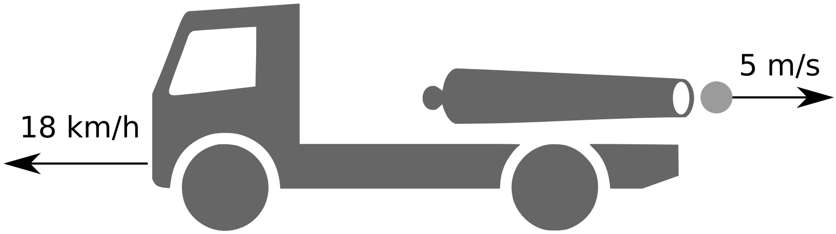
*Kasia kupiła nowy zegar. Ponieważ lubi symetrię, obserwuje wszystkie momenty, w których wskazówki minutowa i godzinowa tworzą układ symetryczny względem osi przechodzącej przez liczby 12 i 6. Ile takich momentów Kasia zaobserwuje w ciągu jednego dnia?*

Po pierwsze zauważmy, że istnieją cztery szczególne symetrie, tj.: gdy obie wskazówki leżą na pionowej osi symetrii zegara: 0:00, 6:00, 12:00 i 18:00. Inne pozycje symetryczne występują raz na każdy pełen obrót wskazówki minutowej (tj. około 0:55, 1:50 itd.). Ponieważ wskazówka minutowa wykonuje 24 pełnych obrotów w ciągu dnia, będą to 24 takie momenty. W związku z tym Kasia zaobserwuje $24 + 4 = 28$ symetrycznych momentów w ciągu jednego dnia.



## Zadanie 14 ... ciężarówka

*Ciężarówka jedzie ze stałą prędkości* 18 km/h. *Nagle, z tyłu ciężarówki, poziomo w tył, zostaje wystrzelona piłeczka tenisowa, z prędkością* 5 m/s. *Piłeczka leci przez* 0,6 s *zanim dotknie ziemi. Policz odległość pomiędzy ciężarówką, a piłeczką w chwili, gdy dotknie ona ziemi.*




Zamieniając jednostki prędkości możemy stwierdzić, że prędkość ciężarówki wynosi $18\,\mathrm{km/h} = 5\,\mathrm{m/s}$, czyli dokładnie tyle samo co prędkość piłeczki! Ponieważ piłeczka zostaje wystrzelona przeciwnie do ruchu ciężarówki, obie prędkości się zniosą. Stojący obserwator zobaczy, że piłeczka spada pionowo w dół.[1]

Ponieważ piłeczka nie porusza się w kierunku poziomym musimy tylko policzyć jak daleko przejedzie ciężarówka w czasie spadania piłeczki (0,6 s). Ponieważ prędkość ciężarówki jest znana (5 m/s) możemy łatwo policzyć pokonaną odległość, która wynosi $5\,\mathrm{m/s} \cdot 0{,}6\,\mathrm{s} = 3\,\mathrm{m}$.

## Zadanie 15 ... karp

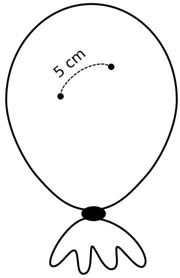
*W akwarium pływa 5 bożonarodzeniowych karpi o różnych wagach. Średnia waga jednego karpia wynosi* 2 kg. *Po wyjęciu jednego z karpi ze zbiornika średnia masa pozostałych karpi zmieniła się na* 1,6 kg. *Karpia o jakiej wadze wybraliśmy?*

Użyjemy liczby karpi i ich średniej masy do obliczenia łącznej masy karpi. Wynosi ona $5 \cdot 2\,\mathrm{kg} = 10\,\mathrm{kg}$. Po usunięciu jednego z karpi pozostały tylko 4, a więc ich łączna masa wynosi $4 \cdot 1{,}6\,\mathrm{kg} = 6{,}4\,\mathrm{kg}$. Różnica między tymi masami to waga karpia wyciągniętego ze zbiornika. Wynosi ona $10\,\mathrm{kg} - 6{,}4\,\mathrm{kg} = 3{,}6\,\mathrm{kg}$.

## Zadanie 16 ... balon

*Basia ma balon o objętości* $1\,\ell$ *i kształcie sfery. Wzięła go i narysowała na nim dwa punkty, które znajdują się w odległości* 5*cm od siebie. Należy zauważyć, że odległość ta jest mierzona na zakrzywionej powierzchni balonu. Jaka będzie odległość dzieląca te punkty po tym, jak Basia napompuje balon do objętości* $8\,\ell$*?*

[1] Ten efekt zostal zaobserwowany doświadczalnie, w programie Pogromcy Mitów, zobacz: `https://youtu.be/BLuI118nhzc`.




Nadmuchanie balonu przez Basię do dwukrotności jego pierwotnego promienia odpowiada sytuacji, w której obserwowalibyśmy ten sam balon pod szkłem powiększającym o powiększeniu równym dwa.

Powiększenie to spowoduje podwojenie wszystkich długości. Ogólnie rzecz biorąc poprzez zwiększenie promienia balonu o współczynnik $k$ wszystkie długości (również na powierzchni balonu) wzrosną $k$ razy.

Powierzchnia samego balonu jest proporcjonalna do kwadratu promienia (ponieważ dla danego promienia $r$ powierzchnia jest równa $4\pi r^2$), co oznacza, że $k$ razy większy balon będzie miał $k^2$ razy większą powierzchnię. Podobnie objętość jest proporcjonalna do sześcianu promienia balonu (objętość równa się $4\pi r^3/3$), a zatem $k$ razy większy balon ma $k^3$ razy większą objętość.

Basia nadmuchała balon o objętości $1\,\ell$ do $8\,\ell$, tj. objętość jej balonu zwiększyła się o ośmiokrotnie. Oznacza to, że $k^3 = 8$, a co za tym idzie $k = \sqrt[3]{8} = 2$. Promień balonu Basi wzrósł dwukrotnie. Oznacza to, że odległość między narysowanymi punktami zwiększyła się o tyle samo.

Punkty narysowane przez Basię znajdują się teraz w odległości $2 \cdot 5\,\mathrm{cm} = 10\,\mathrm{cm}$ od siebie.

## Zadanie 17 ... zegar

*Jak długo musimy czekać od południa, aby wskazówki minutowa i godzinowa były do siebie prostopadłe?*

Wskazówka godzinowa zakreśla kąt pełny $360\,^\circ$ w ciągu $12\,\mathrm{h} = 720\,\mathrm{min}$. Jej „prędkość“ można zdefiniować jako $u = 360\,^\circ/720\,\mathrm{min} = 0{,}5^\circ/\mathrm{min}$. Podobnie wskazówka minutowa obraca się z prędkością $v = 360\,^\circ/60\,\mathrm{min} = 6\,^\circ/\mathrm{min}$, ponieważ zakreśla pełny kąt w ciągu godziny.

Dokładnie w południe wskazówki pokrywają się. Jednak z czasem będą się one od siebie oddalać. Przez oddalanie mamy na myśli to, że kąt między nimi zacznie się zwiększać. Prędkość z jaką będzie się to działo jest po prostu różnicą prędkości wskazówek $v - u = 5{,}5\,^\circ/\mathrm{min}$. Wskazówki będą prostopadłe gdy $\alpha = 90\,^\circ$.

Zależność różnicy kąta od czasu wyraża się jako:

$$\frac{\alpha}{v-u} = \frac{90\,^\circ}{5{,}5\,^\circ/\mathrm{min}} = \frac{180}{11}\,\mathrm{min} \doteq 16{,}4\,\mathrm{min}.$$

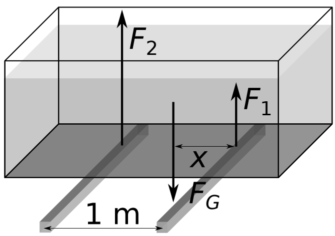
Wskazówki godzinowa i minutowa będą prostopadłe do siebie ok. $16{,}4\,\mathrm{min}$ ($16\,\mathrm{min}$ i $22\,\mathrm{s}$) od południa.

## Zadanie 18 ... akwarium

*Łukasz chce postawić swoje akwarium o masie* 100 kg *używając dwóch podpór, zamocowanych na stałe w ścianie i odległych o* 1 m *od siebie. Pierwsza podpora jest w stanie utrzymać masę* 90 kg*. Druga jest niepoprawnie zamocowana i maksymalna masa, którą może utrzymać to jedynie* 10 kg*. W związku z tym podpory mogą utrzymać akwarium tylko jeżeli jego ciężar jest odpowiednio rozłożony. Znajdź to ustawienie i oblicz odległość pomiędzy środkiem akwarium a słabszą z podpór.*

Warunkiem koniecznym spoczynku akwarium na podporach jest równowaga działających na nie sił, tj. ich suma musi być równa zero. Oznaczmy przez $F_1$ i $F_2$ siły działające na akwarium (ich zwrot jest przeciwny do zwrotu siły ciężkości), a przez $x$ szukaną odległość. Akwarium pozostaje w spoczynku, zatem w szczególności się nie obraca. Moment siły działający względem dowolnej osi musi więc być równy 0. Wybierzmy słabszą podporę jako naszą oś obrotu. Ponieważ $F_1$ działa dokładnie w tym punkcie to pochodzący od niej moment siły wynosi 0. Pozostają nam więc dwa momenty: siły $F_2$, której punkt przyłożenia jest odległy o 1 m oraz siły ciężkości, przyłożonej w odległości $x$. Zatem:

$$F_2 \cdot 1\,\mathrm{m} = F_G x, \quad \Rightarrow \quad x = \frac{F_2 \cdot 1\,\mathrm{m}}{mg} = \frac{900\,\mathrm{N} \cdot 1\,\mathrm{m}}{100\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2}} = 0{,}9\,\mathrm{m}.$$




Odległość $x$ pomiędzy środkiem masy akwarium oraz słabszą podporą wynosi $0{,}9\,\mathrm{m} = 90\,\mathrm{cm}$.

## Zadanie 19 ... lemoniada

*Alicja lubi pić mrożoną lemoniadę. Nie lubi jednak, gdy kostki lodu pływają po powierzchni napoju. Bierze wtedy słomkę i wpycha jedną z kostek lodu pod powierzchnię. Z jaką siłą Alicja musi popchnąć kostkę, aby cała się zanurzyła? Gęstość lodu wynosi* $900\,\mathrm{kg/m^3}$*, masa kostki to* 10 g*, a gęstość wody* $1000\,\mathrm{kg/m^3}$*.*

Fakt, że kostka pływa po powierzchni oznacza, że ciągnąca ją w dół siła ciężkości oraz działająca w przeciwnym kierunku siłą wyporu muszą się równoważyć, czyli mieć tę samą wartość. Siła wyporu zależy między innymi od objętości zanurzonej części kostki, możemy więc wyznaczyć ją z bilansu sił.

Wpychając całą kostkę do lemoniady objętość zanurzonej części kostki wzrasta, a wraz z nią wzrasta wartość siły wyporu. Bilans sił nie jest zachowany i Alicja musi używać dodatkowej siły $F$, która go przywraca. Oczywiście siła którą działa Alicja musi być zwrócona przeciwnie do siły wyporu $F_{vz}$, tj. tak samo jak siła ciężkości $F_G$.

Możemy zapisać bilans sił jako $F + F_G = F_{\mathrm{vz}}$ i następnie rozwinąć wyrażenia na siły. Wiemy, że $F_G = mg$, gdzie $m = 10\,\mathrm{g} = 0{,}01\,\mathrm{kg}$ to masa kostki, a $G$ to przyspieszenie ziemskie. Dla $F_{\mathrm{vz}}$ mamy$F_{\mathrm{vz}} = \varrho V g$, gdzie $\varrho = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$ to gęstość wody, a $V$ to objętość kostki. Może być ona wyrażona przez masę kostki i gęstość lodu $\varrho_{\mathrm{l}} = 900\,\mathrm{kg/m^3}$ jako $V = m/\varrho_{\mathrm{l}}$.

Możemy teraz wyznaczyć $F$ z równania bilansu sił i stopniowo używając wprowadzonych zmiennych i równań otrzymamy

$$F = F_{\mathrm{vz}} - F_G = \varrho V g - mg = \varrho \frac{m}{\varrho_{\mathrm{l}}} g - mg = mg\left(\frac{\varrho}{\varrho_{\mathrm{l}}} - 1\right) =$$
$$= 0{,}01\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2}\left(\frac{1\,000\,\mathrm{kg/m^3}}{900\,\mathrm{kg/m^3}} - 1\right) = \frac{1}{90}\,\mathrm{N} \doteq 11\,\mathrm{mN}.$$

Żeby wepchnąć kostkę lodu do lemoniady Alicja użyła siły o wartości $11\,\mathrm{mN}$.

## Zadanie 20 ... kula w sześcianie

*Jaka jest największa możliwa objętość kuli, która zmieści się w sześcianie o objętości $6\,\mathrm{m^3}$?*

Największa kula, która się mieści w sześcianie, to kula styczna do wszystkich ścian sześcianu, zwana kulą wpisaną. Kula wpisana w sześcian jest styczna do jego ścian w punktach będących środkami ścian, dlatego promień kuli wpisanej jest połową krawędzi sześcianu. Długość krawędzi obliczamy jako pierwiastek sześcienny z objętości sześcianu: $\sqrt[3]{6\,\mathrm{m^3}} = \sqrt[3]{6}\,\mathrm{m}$. Stąd promień naszej kuli to $r = \left(\sqrt[3]{6}/2\right)\,\mathrm{m}$.

Wstawiamy tę wartość do wzoru na objętość kuli:

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt[3]{6}}{2}\,\mathrm{m}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{6}{2^3}\,\mathrm{m^3} = \pi\,\mathrm{m^3}.$$

Objętość wpisanej kuli wynosi $\pi\,\mathrm{m^3} \doteq 3{,}14\,\mathrm{m^3}$.

## Zadanie 21 ... pudełko

*Zostaliśmy poproszeni o przesunięcie pudełka o masie $10\,\mathrm{kg}$ wzdłuż płaskiej powierzchni o $10\,\mathrm{m}$. Jeśli chcielibyśmy pchać pudełko po ziemi musielibyśmy pokonać siłę tarcia o wartości $50\,\mathrm{N}$. Inną możliwością jest rzucenie pudełka. W celu rzucenia go wystarczająco daleko musimy przyspieszyć je do prędkości początkowej równej $10\,\mathrm{m/s}$. Zdecyduj, w której sytuacji potrzebna jest mniejsza energia i o ile. Wynik podaj w Joulach.*

Pchając pudełko na drodze $10\,\mathrm{m}$ wykonalibyśmy pracę $W_1 = 50\,\mathrm{N} \cdot 10\,\mathrm{m} = 500\,\mathrm{J}$. Aby rzucić pudełko musimy natomiast nadać mu energię kinetyczną $W_2 = 10\,\mathrm{kg} \cdot (10\,\mathrm{m/s})^2/2 = 500\,\mathrm{J}$. Tak więc $W_2 - W_1 = 0\,\mathrm{J}$, t.j. oba podejścia wymagają wykonania dokładnie takiej samej pracy.

## Zadanie 22 ... ocean

*Kałamarnica najlepiej czuje się $90\,\mathrm{m}$ poniżej poziomu oceanu i często przebywa na tej głębokości. Znajdź głębokość, która najbardziej spodoba się kałamarnicy po tym jak woda oceaniczna zostanie zastąpiona olejem roślinnym. Przyjmij gęstość wody $\varrho_{\mathrm{w}} = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$ i gęstość oleju $\varrho_{\mathrm{o}} = 900\,\mathrm{kg/m^3}$. Załóżmy, że kałamarnica przetrwa w olejnym oceanie. Ciśnienie atmosferyczne wynosi w przybliżeniu $p_0 = 100\,\mathrm{kPa}$.*

Ciśnienie na głębokości $h_1 = 90\,\mathrm{m}$ w wodzie oceanicznej wynosi

$$p = p_0 + h_1 \cdot \varrho_\mathrm{v} \cdot g = 100\,\mathrm{kPa} + 900\,000\,\mathrm{Pa} = 1\,000\,\mathrm{kPa}\,.$$

Pod warunkiem, że takie samo ciśnienie występuje w oceanie olejowym, mamy

$$p = p_0 + h_2 \cdot \varrho_\mathrm{o} \cdot g\,,$$

gdzie przez $h_2$ oznaczamy szukaną głębokość. Wyznaczamy ją z równania i otrzymujemy

$$h_2 = \frac{p - p_0}{\varrho_\mathrm{o} g}\,.$$

Po wstawieniu znanych nam wartości otrzymujemy, że najlepsza głębokość w oceanie wynosi $h_2 = 100\,\mathrm{m}$.

## Zadanie 23 ... szansa

*Michalina wybrała losowo 8 różnych liczb naturalnych, które są nie większe niż 2 018 (zero nie jest liczbą naturalną!). Jakie jest prawdopodobieństwo, że wśród nich można znaleźć parę liczb, której różnica jest podzielna przez siedem?*

Dowolną liczbę wybraną przez Michalinę możemy scharakteryzować patrząc na jej resztę z dzielenia przez 7. Jeżeli dwie liczby mają taką samą resztę, to ich różnica jest podzielna przez 7.

Najpierw spróbujmy znaleźć prawdopodobieństwo, że w zestawie liczb wylosowanych przez Michalinę nie będzie pary liczb, których różnica jest podzielna przez 7 . Wychodzi na to, że Michalina musi wybrać liczby które mają różne reszty z dzielenia przez siedem, ale mamy tylko reszty od 0 do 6, a Michalina wybiera 8 liczb. Oznacza to, że niezależnie od wyboru przynajmniej dwie liczby wylosowane przez Michalinę będą miały taką samą resztę, a więc zawsze znajdzie się taka para liczb której różnica jest podzielna przez 7. A więc prawdopodobieństwo wynosi $100\,\%$.

## Zadanie 24 ... osa

*Tymek i Natalia stoją na końcach długiej, prostej ścieżki oddaleni od siebie* $2\,\mathrm{km}$. *Po sygnale jednocześnie zaczynają biec do siebie, Tymek ze średnią prędkością* $20\,\mathrm{km/h}$, *a Natalia* $15\,\mathrm{km/h}$. *W tej samej chwili osa zaczyna lecieć od Tymka do Natalii ze średnią prędkością* $35\,\mathrm{km/h}$. *Kiedy doleci do Natalii, jest przez nią natychmiast przeganiana i leci z powrotem do Tymka. On robi to samo i osa znów leci do Natalii. Jaką drogę przeleci osa do czasu, zanim Tymek i Natalia się spotkają?*

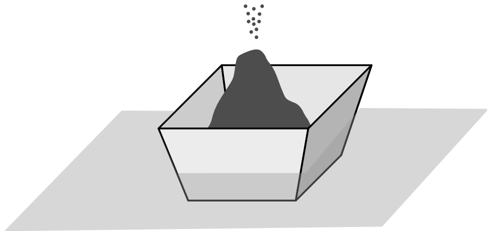
Istotne jest to, że osa leci ze stałą prędkością $u = 35\,\mathrm{km/h}$. W celu obliczenia drogi, jaką pokonała, potrzebujemy tylko znać czas po jakim Tymek i Natalia się spotkali.

Prostą metodą policzenia tego czasu jest spojrzenie z punktu widzenia Tymka. Na początku Natalia jest oddalona od niego o $s = 2\,\mathrm{km}$ i zbliża się z prędkością $v = 20\,\mathrm{km/h} + 15\,\mathrm{km/h} = 35\,\mathrm{km/h}$, stąd spotkają się po czasie $t = s/v$.

Osa pokona w tym czasie drogę $ut = us/v$. Skoro $u$ i $v$ mają tę samą wartość, to zachodzi $ut = s$. To znaczy, że osa pokona drogą $s = 2\,\mathrm{km}$.

## Zadanie 25 ... miska

*Cienkościenna miska o wadze* 200 g *i objętości* 1 ℓ *unosi się na powierzchni wody. Beata powoli wsypuje do miski piasek o gęstości* $1\,600\,\mathrm{kg/m^3}$ *i przy „natężeniu przepływu" o wartości* $10\,\mathrm{cm^3/s}$. *Ile czasu minie, zanim miska zatonie?*



Aby miska zanurzyła się, jej średnia gęstość musi być równa co najmniej gęstości wody. W tym przypadku wartość siły wyporu (biorąc pod uwagę całkowitą objętość miski, gdy jest zatopiona) będzie nieco mniejsza niż siła grawitacji i w konsekwencji miska zatonie.

Ponieważ objętość miski wynosi $1\,\ell$, jej całkowita masa (łącznie z piaskiem) musi wynosić co najmniej 1 kg (gdyż gęstość wody wynosi $1\,000\mathrm{kg/m^3} = 1\,\mathrm{kg}/\ell$). Z podanej masy miski $200\,\mathrm{g} = 0{,}2\,\mathrm{kg}$ możemy wywnioskować, że musimy wypełnić ją $m = 800\,\mathrm{g}$ piasku. Objętość $V$ tego piasku można uzyskać korzystając z jego gęstość $\varrho = 1\,600\mathrm{kg/m^3} = 1{,}6\,\mathrm{kg}/\ell$, stąd $V = m/\varrho = 0{,}5\,\ell$.

Dla natężenia przepływu równego $q = 10\,\mathrm{cm^3/s} = 0{,}01\,\ell/\mathrm{s}$ można napełniać miskę piaskiem przez $t = V/q = 50\,\mathrm{s}$ zanim zacznie ona tonąć.

## Zadanie 26 ... trójkąt

*Zbiór prostych równoległych do jednego z boków trójkąta dzieli dwa pozostałe boki na* 10 *równych części, tak jak na obrazku. Jaki procent całego pola trójkąta jest zamalowany na szaro?*

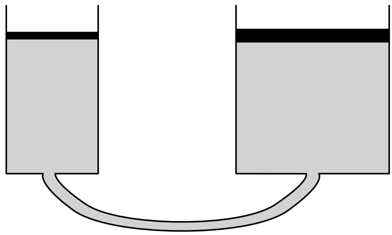
Zauważmy, że zaczynając od małego szarego trójkąta u góry, a następnie dokładając na zmianę biały i szary pasek, zawsze otrzymujemy trójkąt podobny do początkowego, gdyż mają takie same kąty. Oznaczmy $S_1, S_2, \dots, S_{10}$ pola trójkątów składających się odpowiednio z 1, 2, ..., 10 pasków. Pola szarych pasków począwszy od największego, to $S_9-S_8$, $S_7-S_6$, $S_5-S_4$, $S_3-S_2$, $S_1$. Z podobieństwa trójkątów wynika, że $S_1 = 0{,}1\cdot 0{,}1\cdot S_{10} = 0{,}01S_{10}$, $S_2 = 0{,}2\cdot 0{,}2\cdot S_{10} = 0{,}04\cdot S_{10}$, $S_3 = 0{,}3\cdot 0{,}3\cdot S_{10} = 0{,}09\cdot S_{10}, \dots, S_9 = 0{,}9\cdot 0{,}9\cdot S_{10} = 0{,}81\cdot S_{10}$. Obliczmy, jaką cześć całego pola trójkąta stanowi szara część:

$$\frac{S_9 - S_8 + S_7 - S_6 + S_5 - S_4 + S_3 - S_2 + S_1}{S_{10}}$$
$$= \frac{0{,}81S_{10} - 0{,}64S_{10} + 0{,}49S_{10} - 0{,}36S_{10} + 0{,}25S_{10} - 0{,}16S_{10} + 0{,}09S_{10} - 0{,}04S_{10} + 0{,}01S_{10}}{S_{10}}$$
$$= 0{,}81 - 0{,}64 + 0{,}49 - 0{,}36 + 0{,}25 - 0{,}16 + 0{,}09 - 0{,}04 + 0{,}01 = 0{,}45.$$

Oznacza to, że 45 procent całego pola trójkąta jest zamalowane na szaro.

## Zadanie 27 ... tłok

*Rozważmy dwa połączone pojemniki wraz z dwoma tłokami, o powierzchniach wynoszących odpowiednio* $25\,\mathrm{cm}^2$ *oraz* $350\,\mathrm{cm}^2$*. Chcemy ustawić układ w stanie równowagi, ponieważ masa mniejszego tłoka wynosi* $1\,\mathrm{kg}$*, a większego* $5\,\mathrm{kg}$*. Z jaką siłą musimy działać na większy tłok, aby stan równowagi był utrzymywany?*



Siła działająca na pierwszy tłok jest proporcjonalna do siły działającej na drugi tłok i stosunku powierzchni tłoków. Aby system znajdował się w stanie równowagi siły działające na oba tłoki muszą się równoważyć. Jeżeli jeden z tłoków pozostaje w spoczynku to drugi także, dlatego musimy zapewnić równowagę sił działających na jeden z nich.

Rozważmy większy z tłoków. Siła działające w dół to siła ciężkości $F_2 = 5\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s}^2 = 50\,\mathrm{N}$ i nieznana siła $F$. Siła działająca do góry to siła przekazywana przez ciecz, pochodząca od mniejszego tłoka i jej wartość wynosi $F_1 \cdot (S_2/S_1)$, gdzie $F_1 = 1\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s}^2$ a $S_2/S_1 = 14$ to stosunek powierzchni tłoków. Z równania na równowagę sił otrzymujemy

$$F_1 \frac{S_2}{S_1} = F_2 + F, \quad \Rightarrow \quad F = \frac{S_2}{S_1} F_1 - F_2 = 140\,\mathrm{N} - 50\,\mathrm{N} = 90\,\mathrm{N}.$$

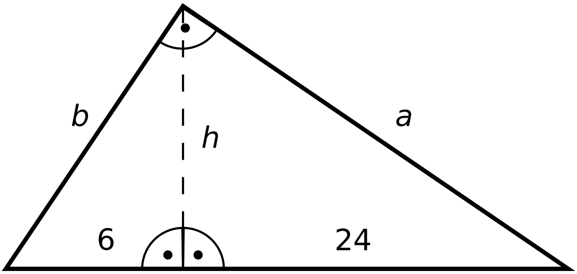
W celu utrzymania tłoków w spoczynku, musimy pchać większy tłok z dodatkową siłą o wartości $90\,\mathrm{N}$.

## Zadanie 28 ... przeciwprostokątna

*Wysokość trójkąta prostokątnego dzieli jego przeciwprostokątną na dwa odcinki o długościach* 6 *i* 24*. Jakie jest pole tego trójkąta?*

Będziemy korzystali z twierdzenia Pitagorasa na trzy różne sposoby. Oznaczmy długości boków trójkąta jako $a$, $b$ i wysokość jako $h$. Mamy następujące równości:

$$\begin{aligned} 24^2 + h^2 &= a^2\,, \\ 6^2 + h^2 &= b^2\,, \\ a^2 + b^2 &= (24+6)^2 = 30^2\,. \end{aligned}$$




Możemy łatwo rozwiązać te równanie, ponieważ otrzymaliśmy jedynie kwadraty szukanych zmiennych. Oznaczmy więc $A = a^2$, $B = b^2$ i $H = h^2$. Rozwiązujemy prosty układ równań i dostajemy: $A = 720$, $B = 180$ i $H = 144$.

Pole trójkąta to długość boku razy wysokość opuszczona na ten bok dzielone przez dwa. Możemy zdecydować w jaki sposób policzymy pole (pole można policzyć na kilka różnych sposobów). Na przykład długość wysokości opuszczonej na przeciwprostokątną to $h = \sqrt{H} = 12$. Liczymy pole $S$ używając przeciwprostokątnej, której długość wynosi: $c = 24 + 6 = 30$:

$$S = \frac{h \cdot c}{2} = \frac{12 \cdot 30}{2} = 180.$$

Pole trójkąta wynosi 180.

## Zadanie 29 ... prostopadłościan

*Przekątne ścian prostopadłościanu wynoszą kolejno* 13*,* 15 *i* $\sqrt{106}$*. Jaka jest objętość tego prostopadłościanu?*

Długość przekątnej danej ściany prostopadłościanu wraz z jej bokami tworzy trójkąt prostokątny, stąd możemy skorzystać z twierdzenia Pitagorasa. Oznaczmy krawędzie jako $a$, $b$, $c$. Otrzymujemy równości:

$$a^2 + b^2 = 13^2 = 169, \tag{1}$$

$$b^2 + c^2 = 15^2 = 225, \tag{2}$$

$$a^2 + c^2 = 106. \tag{3}$$

Naszym celem jest rozwiązanie tych równań, tj. znalezienie wartości dla $a$, $b$ i $c$. Istnieje kilka sposobów rozwiązywania takich układów równań, pokażemy jedno z nich. Opiera się ono na stwierdzeniu, że suma lewej i prawej strony dwóch równań daje równość.

W szczególności możemy zsumować równości (2) i (3) oraz odjąć równość (1),[2] wówczas otrzymujemy

$$\left(b^2 + c^2\right) + \left(a^2 + c^2\right) - \left(a^2 + b^2\right) = 2c^2 = 106 + 225 - 169 = 162.$$

Możemy uprościć to równanie do $c^2 = 81$. Wynika z tego, że $c = 9$.

Długość pozostałych boków znajdziemy w analogiczny sposób. Na przykład z operacji (1+2−3) otrzymujemy $2b^2 = 288$, tj. $b^2 = 144$, czyli $b = 12$. Z $(1 + 3 - 2)$ mamy $2a^2 = 50$, czyli $a^2 = 25$, więc $a = 5$.

Objętość rozważanego prostopadłościanu to po prostu $abc = 5 \cdot 12 \cdot 9 = 540$.

[2] Oznaczmy tę operację jako $(2 + 3 - 1)$.

## Zadanie 30 ... liczba X

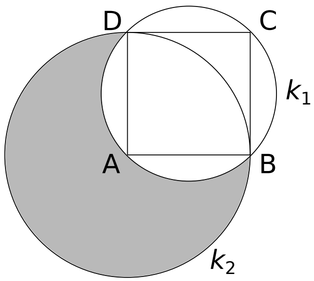
*Pewna liczba naturalna ma dokładnie cztery dzielniki, których suma jest równa* 176. *Znajdź tę liczbę, wiedząc, że suma jej cyfr wynosi* 12.

Oznaczmy przez $x$ liczbę, której szukamy. Każda liczba naturalna większa niż jeden, ma dwa dzielniki: 1 i $x$. Wynika z tego, że można przedstawić liczbę $x$ jako iloczyn dwóch liczb pierwszych $x = p \cdot q$. W przeciwnym razie liczba $x$ miałaby więcej niż 4 dzielniki.

Podsumowując, dzielniki $x$ to 1, $p$, $q$ i $x = pq$. Czyli ich suma wynosi $1 + p + q + pq = (1 + p) \cdot (1 + q) = 176$. Liczba 176 może zostać rozłożona na dwa czynniki tylko na cztery sposoby: $11 \cdot 16$, $22 \cdot 8$, $44 \cdot 4$ lub $88 \cdot 2$. Zauważmy, że szukamy pary liczb, które po zmniejszeniu o 1 są liczbami pierwszymi. Ten warunek jest spełniony tylko dla liczb $44 \cdot 4$, a więc $p = 43$ i $q = 3$. Wtedy liczba $x$ to $43 \cdot 3 = 129$.

## Zadanie 31 ... Księżyc

*Marek chciałby narysować idealny szkic Księżyca. Narysował zatem kwadrat* ABCD *o bokach długości* 2 cm *oraz dwa okręgi. Pierwszy z nich* $k_1$ *jest opisany na kwadracie* ABCD. *Środkiem drugiego jest* A, *a jego promieniem* |AB|. *Szkic Księżyca Marka to szare pole. Jakie jest pole tego Księżyca, tj. szarej figury?*




Okrąg $k_1$ jest opisany na kwadracie. Jego promień $r_1$ jest połową przekątnej kwadratu. Długość $d$ przekątnej kwadratu może zostać obliczona przy użyciu twierdzenia Pitagorasa:

$$d^2 = 2^2 + 2^2, \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{8}\,\mathrm{cm} = 2\sqrt{2}\,\mathrm{cm}.$$

Skoro $r_1 = d/2$, to pole koła $k_1$ wynosi $S_1 = \pi \cdot r_1^2 = 2\pi\,\mathrm{cm}^2$. Promień $r_2$ koła $k_2$ jest równy długości boku kwadratu, $r_2 = 2\,\mathrm{cm}$; jego pole to $S_2 = \pi r_2^2 = 4\pi\,\mathrm{cm}^2$.

Pole $S$ szarej figury to 3/4 pola koła $k_2$ minus dwa małe kawałki koła $k_1$, które są poza kwadratem. Można policzyć sumaryczne pole czterech takich kawałków $S_1 - S_\square$, gdzie $S_\square = (2\,\mathrm{cm})^2 = 4\,\mathrm{cm}^2$ jest polem kwadratu. Pole dwóch kawałków jest połową takiej różnicy pól.

Zatem

$$S = \frac{3}{4}S_2 - \frac{S_1 - S_\square}{2} = \frac{3}{4}4\pi\,\mathrm{cm}^2 - \frac{2\pi\,\mathrm{cm}^2 - 4\,\mathrm{cm}^2}{2} = 3\pi\,\mathrm{cm}^2 - \pi\,\mathrm{cm}^2 + 2\,\mathrm{cm}^2 = (2\pi + 2)\ \mathrm{cm}^2.$$

Zatem pole Księżyca Marka wynosi $(2\pi + 2)\ \mathrm{cm}^2 \doteq 8{,}2\,\mathrm{cm}^2$.

## Zadanie 32 ... bezpiecznik

*7 żarówek jest podłączonych równolegle do sieci elektrycznej prądu stałego o napięciu* $220\,\mathrm{V}$*. Każda żarówka ma moc* $110\,\mathrm{W}$*. Jak duży prąd musi tolerować bezpiecznik używany do ochrony układu?*

Policzmy najpierw natężenie prądu płynącego przez każdą żarówkę. Znana jest zarówno moc pojedynczej żarówki (równa iloczynowi napięcia i natężenia) oraz napięcie (napięcie w każdej gałęzi układu równoległego jest takie samo), możemy wyznaczyć szukane natężenie. Będzie ono wynosić $I = 110\,\mathrm{W}/220\,\mathrm{V} = 0{,}5\,\mathrm{A}$.

Prąd $I$ płynie przez każdą z gałęzi, zatem prąd całkowity będzie sumą pojedynczych natężeń. W związku z tym nasz bezpiecznik musi wytrzymywać natężenie o wartości nie mniejszej niż $7I = 7 \cdot 0{,}5\,\mathrm{A} = 3{,}5\,\mathrm{A}$.

## Zadanie 33 ... sól morska

*Jak dużo soli trzeba by rozpuścić w Morzu Północnym, aby jego zasolenie było takie, jak w Morzu Czerwonym? Przyjmij, że Morze Północne ma* $550\,000\mathrm{km}^2$ *i jego średnia głębokość to* $100\,\mathrm{m}$ *oraz że średnie zasolenie Morza Północnego to* $35\,‰$*, a Morza Czerwonego* $40\,‰$ *(*$1\,‰$ *oznacza, że* $1\,\mathrm{g}$ *soli jest rozpuszczony w* $1\,\ell$ *wody).*

Objętość $V$ wody Morza Północnego może zostać policzona jako iloczyn jego powierzchni i średniej głębokości. Jego powierzchnia dana w $\mathrm{km}^2$ musi zostać najpierw przeliczona na $\mathrm{m}^2$. Skoro $1\,\mathrm{km} = 1\,000\,\mathrm{m}$, to $1\,\mathrm{km}^2 = (1\,000)^2\ \mathrm{m}^2 = 10^6\,\mathrm{m}^2$:

$$V = 550\,000\mathrm{km}^2 \cdot 100\,\mathrm{m} = 550\,000 \cdot 10^6\,\mathrm{m}^2 \cdot 100\,\mathrm{m} = 55 \cdot 10^{12}\,\mathrm{m}^3.$$

Widzimy, że potrzebne byłoby mnóstwo soli. W celu osiągnięcia zasolenia Morza Czerwonego, należałoby zwiększyć zasolenie Morza Północnego o $5\,‰$, a więc trzeba byłoby rozpuścić $5\,\mathrm{g}$ soli na każdy litr jego wody. Skoro $1\,\mathrm{m}^3 = 1\,000\ell$ oraz $1\,\mathrm{kg} = 1\,000\mathrm{g}$, należałoby rozpuścić $m = 5\,\mathrm{kg}$ soli na każdy metr sześcienny. Stąd całkowita masa soli, która byłaby potrzebna to $mV = 5 \cdot 55 \cdot 10^{12}\,\mathrm{kg} = 275 \cdot 10^{12}\,\mathrm{kg} = 2{,}75 \cdot 10^{14}\,\mathrm{kg}$.

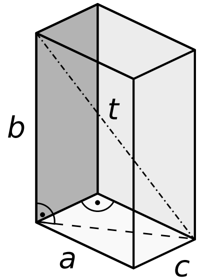
Ciekawostka: Utrzymując obecną światową produkcję soli (220 milionów ton rocznie), potrzebowalibyśmy 1250 lat, aby zebrać dostatecznie dużo soli.

## Zadanie 34 ... prostopadłościan znowu

*Przekątne ścian bocznych prostopadłościanu mają kolejno* $11\,\mathrm{cm}$*,* $19\,\mathrm{cm}$ *i* $20\,\mathrm{cm}$ *długości. Jaka jest długość przekątnej tego prostopadłościanu?*

Długość przekątnej danej ściany prostopadłościanu wraz z jej bokami tworzy trójkąt prostokątny, stąd możemy skorzystać z twierdzenia Pitagorasa. Oznaczmy kolejno krawędzie prostopadłościanu jako $a$, $b$, $c$. Otrzymujemy następujące równości:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (11\,\mathrm{cm})^2 = 121\,\mathrm{cm}^2,\\ b^2 + c^2 &= (19\,\mathrm{cm})^2 = 361\,\mathrm{cm}^2,\\ a^2 + c^2 &= (20\,\mathrm{cm})^2 = 400\,\mathrm{cm}^2. \end{aligned}$$




Naszym celem jest znalezienie długości przekątnej $t$, patrz rysunek. Z rysunku widać, że ta przekątna jest również przeciwprostokątną trójkąta prostokątnego z przyprostokątnymi równymi $u_{ac}$ (przekątna boku $ac$) i $b$. Stąd z twierdzenia Pitagorasa:

$$t^2 = u_{ac}^2 + b^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Dzięki twierdzeniu Pitagorasa dla $u_{ac}$ byliśmy w stanie przekształcić wyrażenie do drugiej równości.

Suma $a^2 + b^2 + c^2$ może być uzyskana z równości wyprowadzonych na samym początku poprzez ich zsumowanie oraz podzielenie obu stron przez dwa. Otrzymujemy więc:

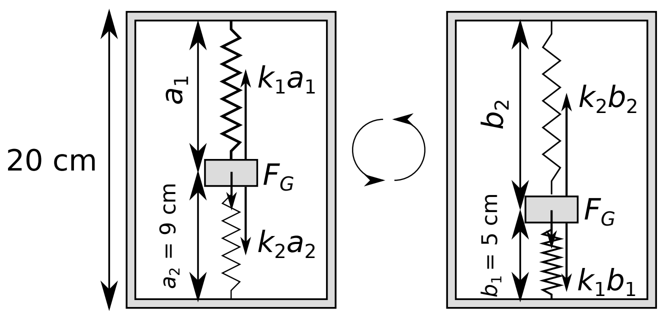
$$t^2 = a^2 + b^2 + c^2 = \frac{121\,\mathrm{cm}^2 + 361\,\mathrm{cm}^2 + 400\,\mathrm{cm}^2}{2} = 441\,\mathrm{cm}^2, \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{441\,\mathrm{cm}^2} = 21\,\mathrm{cm}.$$

Stąd długość przekątnej prostopadłościanu wynosi 21 cm.

## Zadanie 35 ... para sprężynek

*Tomek znalazł dwie sprężynki o różnych stałych sprężystości i zerowej długości swobodnej. Tomek umieścił pomiędzy nimi niewielką masę i przymocował taki system w ramce o wysokości* 20 cm, *jak na rysunku. Tomek zmierzył, że masa znajduje się* 9 cm *nad dolnym krańcem ramki, kiedy stoi ona pionowo. Po obróceniu ramki górą na dół, masa przemieściła się na wysokość* 5 cm *nad dolnym krańcem ramki. Jaki jest stosunek stałych sprężystości sprężynek Tomka?*

Obie sprężynki mają zerową długość swobodną. Wynika z tego, że po zamocowaniu ich w ramce obie będą działać na dołączoną masę siłami dążącymi do kompresji sprężyny. Długość górnej sprężyny (która jest równa wydłużeniu sprężyny) wynosi $a_1 = 20\,\mathrm{cm} - 9\,\mathrm{cm} = 11\,\mathrm{cm}$, krótsza ma długość $a_2 = 9\,\mathrm{cm}$. Po obróceniu ramki sprężyny mają długość odpowiednio $b_1 = 5\,\mathrm{cm}$ i $b_2 = 20\,\mathrm{cm} - 5\,\mathrm{cm} = 15\,\mathrm{cm}$.



W obu przypadkach masa nie porusza się, czyli zachowana jest równowaga sił. W pierwszej sytuacji można napisać (patrz rysunek po lewej)

$$F_G + k_2 a_2 = k_1 a_1,$$

gdzie $F_G$ to siła ciężkości, a $k_1$, $k_2$ to stałe sprężystości sprężynek. Przy drugiej orientacji ramki otrzymujemy podobne, ale nie takie same równanie

$$F_G + k_1 b_1 = k_2 b_2,$$

i możemy użyć go aby wyrazić $F_G$ jako $F_G = k_2 b_2 - k_1 b_1$ i podstawić do pierwszego równania. Otrzymamy wtedy:

$$\begin{aligned} k_2 b_2 - k_1 b_1 + k_2 a_2 &= k_1 a_1, \\ k_2 \left(a_2 + b_2\right) &= k_1 \left(a_1 + b_1\right), \\ \frac{k_1}{k_2} &= \frac{a_2 + b_2}{a_1 + b_1} = \frac{9\,\mathrm{cm} + 15\,\mathrm{cm}}{11\,\mathrm{cm} + 5\,\mathrm{cm}} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Stosunek stałych sprężystości sprężynek wynosi więc 3 : 2.

## Zadanie 36 ... ABBA

*Znajdź cyfry $A$ i $B$ takie, że zachodzi równość $ABBA = (AA)^2 + (BB)^2$. Uwaga: Symbole $A$ i $B$ w równości oznaczają cyfry liczby czterocyfrowej i dwóch dwucyfrowych. Przykładowo jeśli $A = 5$ i $B = 3$, to $AB$ oznacza 53.*

Równość z zadania może zostać przekształcona do równości $(BB)^2 = ABBA - (AA)^2$. Wyrazy z prawej strony równości są oba parzyste, albo oba nieparzyste, więc $(BB)^2$ jest liczbą parzystą. Stąd $B$ też jest liczbą parzystą.

Liczba $ABBA$ może być również przedstawiona jako $1001A + 110B$, natomiast pozostałe liczby możemy przedstawić w postaci $(AA)^2 = (11A)^2 = 121A^2$ oraz $(BB)^2 = 121B^2$. Rozważana równość może zostać przekształcona do

$$1001A + 110B = 121A^2 + 121B^2, \quad \Rightarrow \quad 3A - B = 11A^2 + 11B^2 - 88A - 11B.$$

W ostatniej równości prawa strona jest podzielna przez 11, więc lewa również musi być. Możliwe wartości lewej strony to: $3A - B = 0$, $3A - B = 11$ lub $3A - B = 22$, ponieważ dla jednocyfrowych liczb $A$ i $B$ zachodzi $-7 < 3A - B < 26$, a wiemy, że 11 dzieli $3A - B$.

W pierwszym przypadku $A = B/3$, a więc liczba $B$ jest podzielna przez 3, ale jest też parzysta i jednocyfrowa, więc $B = 6$, a stąd $A = 2$. Jednakże nie zachodzi $2662 = 22^2 + 66^2$, co można łatwo uzasadnić, ponieważ ostatnia cyfra lewej strony to 2, a prawej 0.

W drugim przypadku $3A = 11 + B$, ale jedynym parzystym $B$ takim, że $11 + B$ jest podzielne przez 3 jest $B = 4$, wtedy $A = 5$, ale nie zachodzi równość $5445 = 55^2 + 44^2$, tym razem ostatnia cyfra lewej strony to 5, a prawej 1.

W ostatnim przypadku $3A = 22 + B$. Prawa strona jest podzielna przez 3 zarówno dla $B = 8$, jak i dla $B = 2$. Gdyby $B = 8$, to $A = 10$, co nie jest możliwe. Dla $B = 2$ mamy $A = 8$ i faktycznie zachodzi równość $8228 = 88^2 + 22^2$. Stąd cyframi $A$ i $B$, które były szukane są odpowiednio 8 i 2.

## Zadanie 37 ... czarna dziura

*Wyobraź sobie, że orbitujesz dookoła czarnej dziury w statku kosmicznym. W tym momencie znajdujesz się w miejscu, gdzie przyspieszenie grawitacyjne wynosi $81g$, ale chcesz przenieść się do miejsca, gdzie jest ono nie większe niż $g$. Wiadomo, że przyspieszenie zmniejsza się wraz z kwadratem odległości od środka czarnej dziury. Każde okrążenie pozwala zwiększyć odległość o ten sam dystans, równy połowie wyjściowej odległości. Ile musisz wykonać okrążeń, aby znaleźć się w pożądanym miejscu?*

W celu zmniejszenia przyspieszenia grawitacyjnego 81 razy musimy zwiększyć odległość od czarnej dziury $\sqrt{81} = 9$ razy (z powodu kwadratowej odwrotnej proporcjonalności przyspieszenia i odległości). Załóżmy, że rozpoczynamy w odległości $r_1$ i chcemy znaleźć się w odległości $r_2 = 9r_1$. Ponieważ zwiększamy dystans o $d = r_{1/2}$ podczas jednego okrążenia, to liczba potrzebnych okrążeń wynosi

$$n = \frac{r_2 - r_1}{d} = \frac{8r_1}{r_1/2} = 16.$$

W celu znalezienia się w odległości na której przyspieszenie grawitacyjne wynosi $g$ musimy wykonać 16 okrążeń dookoła czarnej dziury.

## Zadanie 38 ... fałszywa moneta

*Skarb piratów zawiera dokładnie 300 monet. Jedna z monet jest fałszywa i waży mniej niż pozostałe. Mamy do dyspozycji wagę, która jedynie porównuje wagi (nie pokazuje ile dokładnie coś waży). Ile minimalnie razy musimy użyć wagi, aby znaleźć fałszywą monetę?*

Waga może być użyta tylko do porównywania, czy masy dwóch stosów $n$ monet ważą tyle samo. Oczywistym jest, że porównywanie pojedynczych par monet nie jest zbyt skuteczne, potrzebowalibyśmy wówczas nawet do 150 pomiarów, by znaleźć fałszywą monetę.

Możemy spróbować innej strategii, polegającej na podzieleniu monet na pół i porównaniu mas takich stosów. Jeśli znajdziemy stos, który jest lżejszy, to musi on zawierać fałszywą monetę. Dlatego w każdym kroku zmniejszamy liczbę podejrzanych monet o połowę .

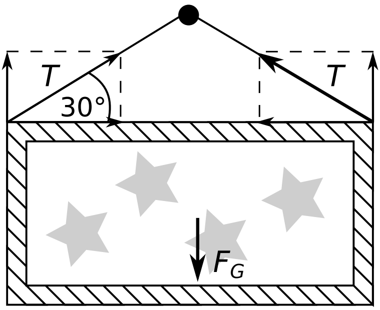
Istnieje jednak bardziej skuteczny sposób! Możemy podzielić monety na trzy równe części, oraz zawsze będziemy porównywać masę dwóch z nich. W przypadku równej masy wiemy, że trzeci stos zawiera fałszywą monetę. Nazywamy ten stos podejrzanym i ponownie dzielimy go na trzy części przed ponownym użyciem wagi. Zauważmy, że dzielenie oryginalnego stosu na więcej niż trzy stosy nie jest optymalny, dlatego, że w przypadku trafienia na dwa stosy o tej samej wadze nie jesteśmy w stanie określić, który ze stosów zawiera monetę fałszywą.

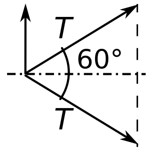
Dzielimy oryginalny stos 300 monet na trzy równe stosy, każdy po 100 monet i używamy wagi aby porównać dwa z nich (pierwszy pomiar). Następnie bierzemy podejrzany stos i dzielimy go na trzy mniejsze stosy po 33, 33 i 34 oraz porównujemy masy pierwszych dwóch (drugi pomiar). W zależności od wyniku, nowy podejrzany stos będzie się składał z 33 albo 34 monet. Dlatego podzieliliśmy go na trzy kupki po 11 monet każda lub dwa stosy po 11 monet i jeden stos po po 12 monet. Następnie porównujemy te dwa stosy, które zawierają tyle samo monet (trzeci pomiar). Ponownie nowy podejrzany stos będzie zawierał 11 lub 12 monet. Dzielimy je na stosy zawierające 4, 4 i 3 monety lub na 3 stosy zawierające po 4 monety. Porównujemy dwa stosy zawierające po 4 monety (czwarty pomiar). Teraz podejrzany stos będzie zawierał 3 lub 4 monety, które można podzielić, w pierwszym przypadku na trzy pojedyncze monety i znaleźć fałszywą monetę za pomocą piątego pomiaru). W drugim przypadku bierzemy dwie z pozostałych czterech monet i znajdujemy fałszywą (ponownie pomiar piąty). W przypadku równych mas pojedynczych monet wiemy, że fałszywa moneta jest w stosie z dwoma monetami. Porównując ich masy (szósty pomiar) znajdujemy fałszywą monetę.

## Zadanie 39 . . . obrazek

*Karolina kupiła ostatnio obrazek w ramce i zawiesiła go u siebie w salonie. W tym celu użyła gwoździa oraz sznurka, która przerywa się jeżeli ciągnąca go siła przekroczy* 120 N. *Sznurek oraz obrazek tworzą kąt* 30°, *jak na rysunku. Jaka jest maksymalna masa obrazka, który Karolina może bezpiecznie powiesić na ścianie?*

Siła ciężkości działająca na obrazek wynosi $\boldsymbol{F}_G = mg$, gdzie $m$ to masa obrazka, a $g$ to przyspieszenie ziemskie. Na obrazek działają jeszcze dwie siły. Obie oznaczymy $\boldsymbol{T}$, są one skierowane tak jak sznurek. Możemy rozłożyć siły na składowe pionowe i składowe poziome, jak na rysunku.




Widzimy, że składowe poziome działają w przeciwnych kierunkach, a także mają tę samą wartość, zatem się równoważą. W związku z tym, tylko składowe pionowe składają się na siłę ciężkości. Wartość składowych pionowych możemy otrzymać geometrycznie. Dodajmy lustrzane obrazy trzech wektorów siły. Otrzymujemy trójkąt o wszystkich kątach równych, tj. trójkąt równoboczny. Z symetrii osiowej wynika, że długość składowej pionowej jest równa połowie długości wektora $T$. Wynika z tego, że każda z dwóch pionowych sił ma wartość $T/2$. Masa obrazka jest wtedy równa

$$F_G = mg = T, \quad \Rightarrow \quad m = \frac{T}{g} = \frac{120\,\mathrm{N}}{10\,\mathrm{m/s^2}} = 12\,\mathrm{kg}.$$

Obrazek Karoliny może ważyć maksymalnie 12 kg.

## Zadanie 40 . . . łup

255 *rozbójników dzieli się łupem. Robią to według pewnej reguły: na początku wszyscy ustawiają się w kółku i kolejno wypowiadają liczby zaczynając się od* 1. *Kiedy rozbójnik mówi parzystą liczbę, opuszcza kółko, bierze swoją część łupu i odchodzi, a dzielenie łupu trwa dalej. Rozbójnicy dzielą się łupem, dopóki wszyscy nie powiedzą liczby parzystej i nie opuszczą kółka.*

*Rozbójnik, który opuścił kółko jako ostatni dostał na imię Alibaba. Jaką liczbę jako pierwszą powiedział Alibaba?*

Z opisywanego sposobu dzielenia łupów wynika, że w każdej rundzie połowa rozbójników opuszcza koło. W pierwszej rundzie (do momentu, kiedy pierwszy rozbójnik powie swoją drugą liczbę), każdy rozbójnik, który powiedział liczbę parzystą opuszcza koło. Oznacza to, że tylko 128 rozbójników pozostaje w kole po tej turze. Ta sama sytuacja powtarza się w drugiej turze, po której pozostaje tylko 64 rozbójników. Ta sytuacja będzie się powtarzać, dopóki Alibaba pozostaje w grze.

Zastanówmy się co by się stało, gdyby Alibaba powiedział liczbę jako ostatni. Dla uproszczenia rozważmy, że teraz tylko pięciu bandytów dzieli się łupem. Po powiedzeniu numeru 2 w grze pozostanie tylko czterech rozbójników, po 4 tylko trzech, a po 8 pozostanie tylko jeden rozbójnik, zaś po powiedzeniu 10 również on opuszcza koło. Dlatego jeśli początkowa liczba rozbójników jest nieparzysta, to jako ostatnia liczba w grze będzie podana dwukrotność początkowej liczby rozbójników (wynika to również z faktu, że tylko co druga liczba może „wyeliminować“ rozbójnika).

W naszym przypadku z 255 rozbójnikami możemy powiedzieć, że Alibaba opuszcza koło jako ostatni mówiąc liczbę $2 \cdot 255 = 510$. Będziemy więc szli od końca i po kolei znajdywać liczby powiedziane przez niego w poprzednich rundach. Najpierw przypomnijmy sobie liczbę rozbójników po każdej rundzie: po pierwszej rundzie było ich 128 , 64 po drugiej, 32 po trzeciej, 16 po czwartej, 8 po piątej, 4 po szóstej, 2 po siódmej, 1 po ósmej i w końcu żaden po dziewiątej rundzie.

Teraz wiemy, że Alibaba zakończył grę z liczbą 510 po dziewiątej rundzie. Równocześnie wiemy, że grał we wszystkich poprzednich rundach i za każdym razem podawał nieparzystą liczbę. Możemy w związku z tym odjąć od 510 liczby podawane przez bandytów w każdej z rund, aby znaleźć numer Alibaby w pierwszej rundzie. Wiemy, że Alibaba powiedział 509 w ósmej rundzie, 507 w siódmej rundzie, 503 w szóstej rundzie itd. Po przeliczeniu wszystkich rund okazało się, że Alibaba powiedział numer 255 w pierwszej rundzie.

## Zadanie 41 ... tramwaje

*Tramwaje jeżdżą pomiędzy dwoma przystankami: $A$ i $B$. Poruszają się ze stałą prędkością i w równych odstępach czasu. Eryk zaczął iść ze stałą prędkością (mniejszą niż prędkość tramwaju) z przystanku A w kierunku przystanku B. Zauważył, że tramwaj jadący w tym samym kierunku minął go raz w ciągu* 18 min. *Po pewnym czasie Eryk odwrócił się i zaczął iść w przeciwnym kierunku (z dokładnie taką samą prędkością). Zauważył, że tramwaj jadący z przystanku A do B minął go raz w ciągu* 12 min.

*Z jaką częstotliwością jeżdżą tramwaje (tj. co jaki czas tramwaj mijałby Eryka stojącego przy torach tramwajowych)?*

Odstęp czasu pomiędzy tramwajami w przypadku chodzenia Eryka z A do B jest prosty:

$$t_1 = \frac{s}{v_\mathrm{t} - v_\mathrm{p}} = 18\,\mathrm{min}\,,$$

gdzie $s$ oznacza odległość między przystankami, $v_\mathrm{t}$ to prędkość tramwajów i $v_\mathrm{p}$ to prędkość Eryka. W drugim przypadku, gdy Eryk idzie z B do A, odstęp czasu zmienia się na

$$t_2 = \frac{s}{v_\mathrm{t} + v_\mathrm{p}} = 12\,\mathrm{min}\,.$$

Chcielibyśmy obliczyć odstęp czasu pomiędzy tramwajami obserwowanymi przez Eryka stojącego na przystanku, tj. $T = s/v_\mathrm{t}$. Z pierwszego równania mamy

$$v_\mathrm{p} = v_\mathrm{t} - \frac{s}{t_1}$$

i wstawiamy to do drugiego równania. Dostajemy

$$t_2 = \frac{s}{2v_t - \frac{s}{t_1}}\,.$$

Pozbywamy się $s$ z prawej strony, mamy więc zależność $v_\mathrm{t}/s = 1/t$, i otrzymujemy

$$t_2 = \frac{1}{\frac{2}{T} - \frac{1}{t_1}}\,.$$

Teraz wyrażamy przedział czasu $t$ jako

$$t = \frac{2}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}} = 14{,}4\,\mathrm{min}\,.$$

Zauważmy, że końcowe wyrażenie jest przedstawione jako średnia harmoniczna czasów $t_1$ i $t_2$.

## Zadanie 42 ... szczęśliwa siódemka

*Mirek napisał liczbę $k$-cyfrową, która składa się tylko z siódemek (tj. $777\ldots7$). Okazało się, że suma cyfr siedmiokrotności jego liczby wynosi dokładnie 777. Ile wynosi $k$ - liczba cyfr liczby Mirka?*

Liczba Mirka może być zapisana jako suma potęg 10

$$777\cdots7 = 7\left(1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{k-1}\right).$$

Po przemnożeniu przez 7 otrzymujemy:

$$7 \cdot 7\left(1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{k-1}\right) = 49\left(1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{k-1}\right).$$

Czynnik 49 można przedstawić jako sumę dwóch wyrazów $4 \cdot 10 + 9 \cdot 1$.
Po pogrupowaniu dostajemy:

$$9 \cdot 1 + (4+9) \cdot 10 + (4+9) \cdot 10^2 + \cdots + (4+9) \cdot 10^{k-1} + 4 \cdot 10^k.$$

Widzimy, że wartości w nawiasach sumują się do 13, więc możemy je przedstawić jako $10+3$. Po ponownym pogrupowaniu potęg dziesiątek dostajemy:

$$9 \cdot 1 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 10^2 + \cdots + 4 \cdot 10^{k-1} + 5 \cdot 10^k.$$

Siedmiokrotność liczby Mirka to $5444\cdots439$ i jest to $k+1$ cyfrowa liczba[3]

Istnieje również inny sposób uzyskania tego wyniku. Możemy po prostu sprawdzić, czy $7\cdot7 = 49$, $77 \cdot 7 = 539$, $777 \cdot 7 = 5439$, $7777 \cdot 7 = 54\,439$, co sugeruje, jak może wyglądać wynik dla innych uv longer liczb.

Dla sumy liczb równej $777 = 5 + 4\,(k-2) + 3 + 9$. Po rozwiązaniu prostego równania otrzymujemy $k = 192$.

[3] Łatwo jest określić liczbę cyfr: na przykład $10^6 = 1\,000\,000$ ma siedem cyfr innymi słowy $k+1$-cyfrowa liczba może być przedstawiona jako suma potęg dziesiątki (najwyższą potęgą będzie $10^k$) skąd liczba ma $k-2$ cyfr.

# *Náboj Junior 2018*

**Bánovce nad Bebravou** – Gymnázium Janka Jesenského • **Banská Bystrica** – Gymnázium Andreja Sládkoviča • **Białystok** – Liceum Ogólnokształcące Politechniki Białostockiej • **Bielsko-Biała** – V Liceum Ogólnokształcące • **Bratislava** – UPeCe sv. Jozefa Freinandemetza • **Brezno** – Gymnázium Jána Chalupku • **Brno** – Gymnázium Matyáše Lercha • **Česká Lípa** – Gymnázium Žitavská • **České Budějovice** – Gymnázium Jírovcova • **Frýdlant nad Ostravicí** – Gymnázium Frýdlant • **Grodzisk Mazowiecki** – Szkoła Podstawowa nr 5 im. Leonida Teligi • **Hlohovec** – Gymnázium Ivana Kupca • **Hradec Králové** – Univerzita Hradec Králové, Přírodovědecká fakulta • **Kadaň** – Sluníčková základní škola Kadaň • **Karlovy Vary** – První české gymnázium v Karlových Varech • **Košice** – Gymnázium Alejová • **Kraków** – Uniwersytet Jagielloński, Wydział Matematyki i Informatyki • **Krosno** – I LO z Oddz. Dwujęzycznymi im. Mikołaja Kopernika • **Levice** – Gymnázium Andreja Vrábla • **Liberec** – Doctrina – Podještědské gymnázium • **Liptovský Mikuláš** – Gymnázium Michala Miloslava Hodžu • **Łódź** – I Liceum Ogólnokształcąceim. Mikołaja Kopernika • **Lučenec** – CVČ Magnet • **Michalovce** – Gymnázium Pavla Horova • **Námestovo** – Gymnázium Antona Bernoláka • **Nitra** – Gymnázium Párovská • **Olomouc** – Gymnázium Olomouc-Hejčín • **Ostrava** – Gymnázium Olgy Havlové • **Piešťany** – Gymnázium Pierra de Coubertina • **Písek** – SPŠ a VOŠ Písek • **Plzeň** – Gymnázium Mikulášské náměstí • **Poprad** – Gymnázium Kukučínova • **Praha** – Gymnázium Voděradská • **Praha** – Gymnázum Christiana Dopplera • **Prešov** – Gymnázium Jána Adama Raymana • **Prievidza** – Gymnázium Vavrinca Benedikta Nedožerského • **Púchov** – Gymnázium Púchov • **Šahy** – Gymnázium Mládežnícka • **Sokolov** – Gymnázium a KVC Sokolov • **Sosnowiec** – IV LO z Oddz. Dwujęzycznymi im. Stanisława Staszica • **Sučany** – Bilingválne gymnázium Milana Hodžu • **Šurany** – Gymnázium Bernolákova • **Tarnów** – III Liceum Ogólnokształcące im. Adama Mickiewicza • **Třebíč** – Katolické gymnázium • **Trenčín** – Gymnázium Ľudovíta Štúra • **Trnava** – SOŠ Trnava • **Trstená** – Gymnázium Martina Hattalu • **Ústí nad Labem** – Univerzita Jana Evangelisty Purkyně, Fakulta sociálně ekonomická • **Warszawa** – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica • **Wrocław** – XV Liceum Ogólnokształcące im. mjr. Piotra Wysockiego • **Zlín** – Gymnázium Zlín-Lesní čtvrť • **Zvolen** – Gymnázium Ľudovíta Štúra


*Propozycje problemów*

Beata Czernecka • Miroslav Hanzelka • Tomáš Kremel • Radek Kusek • Katarína Marčeková • David Němec • Kateřina Stodolová • Patrik Švančara • Pavla Trembulaková

*Autorzy zadań i rozwiązań*

Miroslav Hanzelka • David Němec • Kateřina Stodolová • Patrik Švančara

*Tłumacze*

Beata Czernecka • Jakub Hluško • Radek Kusek • Anna Łeń • Karolina Szulc

*Recenzenci*

Tomáš Kremel • Jakub Sláma • Pavla Trembulaková