NÁBOJ junior

7. ročník

2018/19

Vzorové riešenia

výfuk

Trojsten

Ahojte,

práve sa Vám do rúk dostala brožúrka zadaní a riešení úloh súťaže Náboj Junior 2018. Náboj Junior je matematicko-fyzikálna súťaž pre štvorčlenné tímy žiakov druhého stupňa základných škôl a žiakov prímy až kvarty osemročných gymnázií. Súťaž trvá 120 minút, počas ktorých sa tímy snažia vyriešiť čo najviac úloh zameraných nielen na znalosti z matematiky a fyziky, ale aj na schopnosť pristupovať k úlohám inovatívne a s dôvtipom.

Dňa 23. novembra 2018 prebieha 7. ročník Náboja Junior v 24 mestách na Slovensku, v 18 mestách v Českej republike a v 10 mestách v Poľsku. Na Slovensku sa tento rok zúčastní súťaže vyše 500 tímov. V slovenských mestách je súťaž organizovaná šikovnými stredoškolákmi, ktorí venujú svoj čas a energiu tomu, aby umožnili mladším žiakom z regióna zasúťažiť si a preveriť svoje vedomosti. Cieľom Náboja Junior je rozvíjať nadanie detí v oblasti matematiky a fyziky a ukázať širokému spektru žiakov, že tieto prírodné vedy ukrývajú množstvo zaujímavostí, výziev a príležitostí. Ďalším cieľom je rozvíjanie organizačných schopností stredoškolákov, ktorí majú počas prípravy súťaže možnosť na vlastnej koži zažiť zábavné, ale aj náročné aspekty práce v tíme.

Súťaž Náboj Junior vznikla ako spoločný projekt občianskeho združenia Trojsten a korešpondenčného seminára MFF UK Výfuk. Členovia organizácií sú vysokoškolskí študenti Fakulty matematiky, fyziky a informatiky UK v Bratislave alebo Matematicko-fyzikální fakulty UK v Prahe, ktorí sa snažia o rozvoj nadania študentov a záujmu o prírodné vedy.

Prajeme veľa šťastia pri počítaní,

o. z. Trojsten

Úloha 1 ... nová gitara

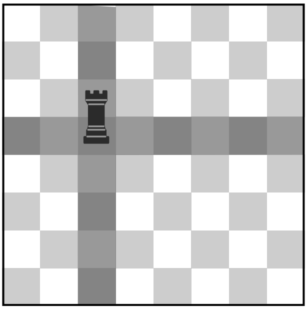
Maťko si prednedávnom kupoval novú gitaru. Jej cena bola 212,3 €. Celú čiastku platil jednou bankovkou s nominálnou hodnotou 500 €. Aký je najmenší počet mincí a bankoviek, ktoré mu pokladníčka mohla vydať?

Pokladníčka Maťkovi vydala celkom 500 € − 212,3 € = 287,7 €. Najmenší počet vydaných bankoviek a mincí získame tak, že začneme sumu skladať z bankoviek a mincí s čo najvyššou hodnotou. Pokladníčka tak Maťkovi vydala bankovky s hodnotami 200 €, 50 €, 20 €, 10 € a 5 € a mince s hodnotou 2 €, 0,5 € a 0,2 €. Spolu teda Maťkovi mohla vydať najmenej 8 bankoviek a mincí.

Úloha 2 ... veža

Na ľubovoľné políčko prázdnej šachovnice postavíme vežu. Na koľko rôznych políčok môže viesť ďalší ťah touto vežou? Šachovnica má rozmer 8×8 polí a veža sa môže pohybovať iba vodorovne alebo zvislo.

Šachovnica je tvorená 8×8 políčkami, vežu postavíme na jedno z nich. Nehľadiac na vybranú pozíciu sa figúrka môže presunúť na ľubovoľné políčko vo svojom riadku alebo svojom stĺpci. Riadok a stĺpec majú jedno políčko spoločné, celkom teda predstavujú $2 \cdot 8 - 1 = 15$ políčok. A pretože políčko na krížení stĺpca a riadku práve zaberá veža, môže ťah viesť na 14 rôznych políčok.



Úloha 3 ... pomaly dlhšie ideš

Miška ide z chalupy do mesta vzdialeného 250 km. *Prvú hodinu cesty ide priemernou rýchlosťou* 50 km/h. *Akou rýchlosťou má ísť po zvyšok cesty, aby bola jej výsledná priemerná rýchlosť dvojnásobná?*

Najskôr si spočítame, za akú dobu sa musí Miška dostať z chalupy do mesta, aby bola jej výsledná priemerná rýchlosť 100 km/h. K tomu nám stačí vydeliť celkovú dráhu priemernou rýchlosťou, čím dostaneme čas $250\,\mathrm{km}/(100\,\mathrm{km/h}) = 2{,}5\,\mathrm{h}$. Pretože Miška za prvú hodinu už prešla 50 km, za zostávajúci čas 1,5 h musí prejsť ešte 200 km. Jej rýchlosť teda musí byť $200\,\mathrm{km}/1{,}5\,\mathrm{h} \doteq 133\,\mathrm{km/h}$.

Úloha 4 ... ťažké?

Maťo vážil svoje závažia. Najprv na misku váh položil tri závažia o hmotnostiach 0,03 t, 200 000 g *a* 15 kg. *Potom ich nahradil závažiami o hmotnostiach* 0,01 t, 35 000 g *a* 200 kg. *Aký je rozdiel hmotností, ktoré Maťo nameral v prvom a druhom prípade?*

Hmotnosti všetkých závaží si musíme previesť do rovnakých jednotiek, a to najlepšie do základnej jednotky, kilogramov. Maťove závažia z prvého váženia majú hmotnosti $0{,}03\,\mathrm{t} = 30\,\mathrm{kg}$, $200\,000\,\mathrm{g} = 200\,\mathrm{kg}$ a $15\,\mathrm{kg}$. Po sčítaní dostaneme hmotnosť $245\,\mathrm{kg}$.

Závažia z druhého váženia majú hmotnosti $0{,}01\,\mathrm{t} = 10\,\mathrm{kg}$, $35\,000\,\mathrm{g} = 35\,\mathrm{kg}$ a $200\,\mathrm{kg}$. Po sčítaní dostaneme taktiež $245\,\mathrm{kg}$. Rozdiel hmotností je teda $0\,\mathrm{kg}$.

Úloha 5 ... cool kohútik

Všetkým je jasné, že Miro je cool. Napríklad v kúpeľni mu tečie z modrého kohútika cool voda. Lenže okrem toho, že je Miro cool, je aj slabý, a tak cool kohútik často zle utiahne. Napríklad naposledy utiahol kohútik tak slabo, že každé dve sekundy dopadla do umývadla jedna kvapka. Po tom čo Miro napol svaly na maximum a kohútik dotiahol, spadla kvapka do umývadla už iba každých deväť sekúnd. Vypočítajte, koľkokrát vyššia bola frekvencia kvapkania pred dotiahnutím voči frekvencii po dotiahnutí.

Na začiatku z kohútiku kvapká voda s časovou periódou $T_1 = 2\,\mathrm{s}$, po dotiahnutí sa predĺži na $T_2 = 9\,\mathrm{s}$. Frekvencia je definovaná ako prevrátená hodnota periódy, a teda $f_1 = 1/2\,\mathrm{s}^{-1}$ a $f_2 = 1/9\,\mathrm{s}^{-1}$. Hľadaný pomer frekvencií pred a po dotiahnutí je $f_1/f_2 = 9/2 = 4{,}5$.

Úloha 6 ... z regiónov

Kubo bol cez prázdniny v americkom meste New Orleans. Raz si chcel na víkend zaletieť do Miami a zaujímalo ho, o koľko stupňov Celzia tam bude teplejšie. Z predpovede v televízii sa dozvedel, že v New Orleans je $86°$ F *a v Miami* $104°$ F. *Pomôžte Kubovi určiť teplotný rozdiel, pokiaľ pre Celziove a Fahrenheitove stupne platí prevodný vzťah* $T[°\mathrm{C}] = (T[°\mathrm{F}] - 32) \cdot 5/9$.

Úlohu vyriešime prostým dosadením do prevodného vzorca. V New Orleans je teplota

$$T_{\mathrm{NO}} = (86 - 32) \cdot \frac{5}{9}\,°\mathrm{C} = 30\,°\mathrm{C},$$

v Miami

$$T_{\mathrm{M}} = (104 - 32) \cdot \frac{5}{9}\,°\mathrm{C} = 40\,°\mathrm{C}.$$

Rozdiel teplôt v oboch mestách je $T_{\mathrm{M}} - T_{\mathrm{NO}} = 10\,°\mathrm{C}$.

Úloha 7 ... zábavné čísla

Prirodzené číslo nazveme zábavným práve vtedy, keď obsahuje iba číslice 1, 2 *alebo* 3. *Koľko zábavných čísel menších než* 1 000 *existuje?*

Zábavné čísla menšie než 1 000 môžu byť jedno, dvoj alebo trojciferné.

Jednociferné zábavné čísla sú tri (1, 2 a 3). Dvojciferných je viac: na mieste jednotiek, a rovnako i na mieste desiatok, môže byť ľubovoľná z troch cifier 1, 2, 3. Dvojciferných zábavných čísel teda je $3 \cdot 3 = 9$. Podobne, ľubovoľná z troch cifier môže byť na mieste jednotiek, desiatok a stoviek v prípade trojciferných čísel. Ich počet teda je $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$.

Spolu je hľadaných zábavných čísel $3 + 9 + 27 = 39$.

Úloha 8 ... ženské starosti

Hanka zmerala, že jej vodič má odpor R_H. Sveťa zas zistila, že jej vodič je vyrobený z rovnakého kovu ako Hankin, ale jeho dĺžka i priemer sú oproti Hankinmu vodiču dvojnásobné. Aký je pomer odporov $R_\mathrm{S}/R_\mathrm{H}$ Svetinho a Hankinho vodiča?

Elektrický odpor kovového vodiča je priamo úmerný dĺžke a nepriamo úmerný prierezu (ploche) vodiča.

Pokiaľ by mal Svetin vodič iba dvojnásobnú dĺžku ako Hanin, jeho odpor by bol dvojnásobný (teda $2R_\mathrm{H}$), pretože odpor vodiča je priamo úmerný jeho dĺžke.

Pokiaľ by ale mal Svetin vodič iba dvojnásobný priemer, v porovnaní s Haniným vodičom by mal tiež dvojnásobne veľký polomer. Keďže ale obsah prierezu valcového vodiča závisí na druhej mocnine polomeru (to vyplýva zo vzťahu pre výpočet obsahu kruhu), obsah Svetinho prierezu vodiča by bol až štvornásobne väčší a odpor kvôli nepriamej úmere štvornásobne menší (teda $R_\mathrm{H}/4$).

Ak uvážime dvojnásobne veľký aj hrubý vodič, vyššie uvedené pomery sa jednoducho vynásobia a pre odpor Svetinho vodiča dostávame

$$R_\mathrm{S} = 2 \cdot \frac{1}{4} R_\mathrm{H} = \frac{R_\mathrm{H}}{2}, \quad \Rightarrow \quad \frac{R_\mathrm{S}}{R_\mathrm{H}} = \frac{1}{2}.$$

Odpor Svetinho vodiča je polovičný oproti odporu Haninho vodiča a ich pomer je rovný 1/2.

Úloha 9 ... číselná os

Koľko existuje prirodzených čísel n takých, že vzdialenosť meraná na číselnej osi medzi číslom 7 a $\sqrt{n}$ je menšia než 2?

Podmienka maximálnej vzdialenosti od čísla 7 jednoducho hovorí, že číslo $\sqrt{n}$ sa musí nachádzať medzi číslami 5 a 9, teda vieme napísať dvojitú nerovnosť $5 < \sqrt{n} < 9$. Túto nerovnosť slobodno umocniť na druhú, nakoľko čísla v nej sú nezáporné. Dostaneme teda nerovnosť $25 < n < 81$. Prirodzené čísla, ktoré nerovnosť spĺňajú, sa teda nachádzajú medzi 26 a 80 vrátane a takých čísel je celkom 55.

Úloha 10 ... budú hranolky

Jonáš každoročne na jeseň chodieva k babičke vyorať zemiaky. Vie, že sám celé pole zorie za 4 hodiny. Po 2 hodinách sa Paulínka nad Jonášom uľútostila a išla mu ako správna sestra na pole pomôcť. Vie, že sama by celé pole poorala za 6 hodín. Po akej dlhej dobe od začiatku práce bude celé pole poorané?

Zo zadania okamžite vidíme, že po prvých 2 hodinách Jonáš zoral polovicu poľa.

Potom sa k nemu pridala Paulínka a pole orali spoločne. Keďže Jonáš poorie za jednu hodinu práce 1/4 poľa a Paulínka 1/6 poľa, spoločnou prácou za hodinu zorajú $1/4 + 1/6 = 5/12$ poľa. Polovicu poľa tak zorajú za $1/2 : 5/12 = 6/5 = 1{,}2$ hodín. Celkom teda bude orba trvať $2\,\mathrm{h} + 1{,}2\,\mathrm{h} = 3{,}2\,\mathrm{h}$.

Úloha 11 ... výkonné stroje

Rýchlovarná kanvica vykonala za čas $t_1 = 2\,\mathrm{min}$ *prácu* $W_1 = 120\,\mathrm{kJ}$*, zdroj high-end počítača vykonal prácu* $W_2 = 14{,}4\,\mathrm{MJ}$ *za* $t_2 = 8\,\mathrm{h}$*. Ktoré zariadenie je výkonnejšie? Uveďte ako pomer výkonov* P_1/P_2*.*

Výkon definujeme ako prácu W vykonanú za daný čas t, $P = W/t$. Pomer výkonov kanvice P_1 a počítača P_2 možno teda zapísať v tvare

$$P_1/P_2 = \frac{W_1}{t_1}\Big/\frac{W_2}{t_2} = \frac{W_1}{W_2}\cdot\frac{t_2}{t_1} = \frac{120\,\mathrm{kJ}}{14\,400\,\mathrm{kJ}}\cdot\frac{480\,\mathrm{min}}{2\,\mathrm{min}} = 2\,.$$

Kanvica je dvakrát výkonnejšia než zdroj počítača.

Úloha 12 ... o farbách drakov

V rozprávkovom kráľovstve žijú iba zelené a modré draky. Každý modrý drak má 6 hláv, 8 nôh a 2 chvosty. Každý zelený drak má 8 hláv, 6 nôh a 4 chvosty. Udatný rytier Andrej v kráľovstve napočítal celkom 44 dračích chvostov. Klebetná princezná Róberta od šľachtičien vyzvedela, že zelených nôh je v kráľovstve o 6 menej než je počet modrých hláv. Koľko modrých drakov žije v rozprávkovom kráľovstve?

Označme počet zelených drakov Z a počet modrých drakov M. Pomocou týchto veličín ďalej vieme jednoducho premeniť poznatky obyvateľov zámku na rovnice. Pre súčet chvostov platí $44 = 2M + 4Z$. Pre porovnanie zelených nôh a modrých hláv píšme $6Z + 6 = 6M$.

Z druhej rovnice ihneď plynie $Z + 1 = M$, teda v kráľovstve žije iba o jedného modrého draka viac, než je zelených drakov. Rovnicu upravíme do tvaru $Z = M - 1$ a dosadíme za Z z prvej rovnice. Dostávame

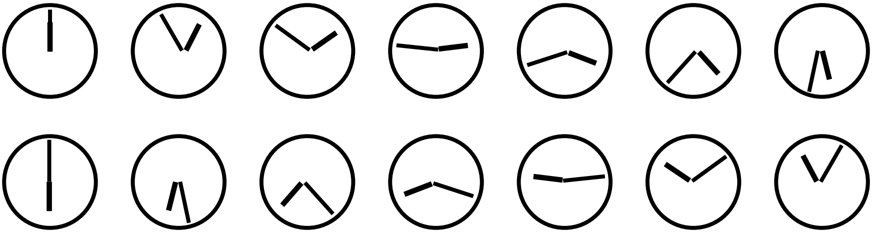
$$44 = 2M + 4Z = 2M + 4\,(M-1) = 6M - 4, \quad \Rightarrow \quad 6M = 48, \quad \Rightarrow \quad M = 8.$$

V rozprávkovom kráľovstve žije 8 modrých drakov.

Úloha 13 ... kreatívne fotenie

Marcel má rád zízanie na ručičkové hodiny. Pretože má rád aj symetriu, svojím novým foťákom si fotil okamihy, kedy je hodinová a minútová ručička umiestnená symetricky voči zvislej osi spájujúcej čísla 12 a 6 na ciferníku. Koľko takých okamihov môže Marcel behom jedného dňa odfotiť?

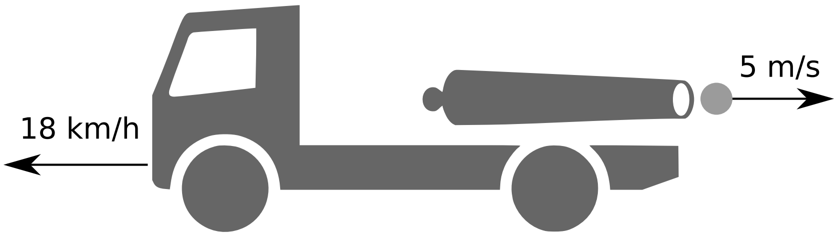
Špeciálne symetrické pozície, kedy sa hodinová a minútová ručička nachádzajú priamo na osi symetrie, nastanú za deň celkom štyri: 0:00, 6:00, 12:00 a 18:00. K ďalším symetrickým pozíciám sa dostaneme vždy raz behom jedného obehu minútovej ručičky (teda v časoch približne 0:55, 1:50, atď.). Pretože minútová ručička urobí za deň 24 obehov, dôjde i k 24 symetrickým pozíciám. Marcel teda môže behom jedného dňa odfotiť spolu $24 + 4 = 28$ symetrických okamihov.



Všetky symetrické pozície hodinových ručičiek počas prvých 12 hodín

Úloha 14 ... výstrel

Nákladné auto ide rovno stálou rýchlosťou 18 km/h. *Z jeho korby vystrelíme vodorovne a proti smeru jazdy loptičku rýchlosťou* 5 m/s. *Tá potom letí* 0,6 s, *dokiaľ nedopadne na zem. Vypočítajte ako ďaleko od miesta dopadu sa bude v okamihu dopadu nachádzať korba nákladného auta.*



Rýchlosť nákladného auta možno previesť na metre za sekundu. Jednoducho zistíme, že $18\,\mathrm{km/h} = 5\,\mathrm{m/s}$, čo je rovnako veľká rýchlosť, ako je rýchlosť výstrelu loptičky! Kanón teda síce vystrelí loptičku proti smeru jazdy, ale pretože sa spolu s nákladným autom pohybuje rovnako veľkou rýchlosťou, tieto dve rýchlosti sa vzájomne odčítajú. Pozorovateľ stojaci na ceste tak bude vidieť, že loptička z auta padne zvislo nadol.[1]

Keďže loptička dopadne presne pod miesto výstrelu, stačí nám vypočítať, ako ďaleko sa behom pádu loptičky (0,6 s) vzdiali nákladné auto. Pretože poznáme jeho rýchlosť (5 m/s), môžeme ihneď povedať, že auto sa od miesta dopadu loptičky nachádza vo vzialenosti $5\,\mathrm{m/s} \cdot 0{,}6\,\mathrm{s} = 3\,\mathrm{m}$.

Úloha 15 ... podkovičky

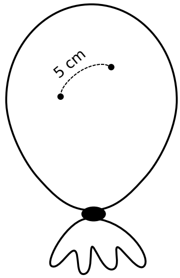
V kadi s vodou je spolu 5 *vianočných kaprov s rôznymi hmotnosťami. Priemerná hmotnosť jedného kapra je* 2 kg. *Po vylovení jedného z kaprov poklesne priemerná hmotnosť kaprov v kadi na* 1,6 kg. *Koľko váži vylovený kapor?*

Z počtu kaprov a ich priemernej hmotnosti vieme určiť súčet hmotností všetkých kaprov ako $5 \cdot 2\,\mathrm{kg} = 10\,\mathrm{kg}$. Po vylovení jedného z kaprov v kadi zostanú 4 kapre, pričom súčet ich hmotností je $4 \cdot 1{,}6\,\mathrm{kg} = 6{,}4\,\mathrm{kg}$. Rozdiel týchto súčtov určuje hmotnosť vyloveného kapra, ktorá je $10\,\mathrm{kg} - 6{,}4\,\mathrm{kg} = 3{,}6\,\mathrm{kg}$.

[1] Experimentálne bol tento jav pozorovaný v známom programe Mythbusters, viď `https://youtu.be/BLuI118nhzc`.

Úloha 16 ... balónik

Marek má guľatý balónik s objemom 1 ℓ. Nakreslil naň fixkou dva body, ktoré sú od seba vzdialené 5 cm. Vzdialenosť meriame po povrchu. Akú vzájomnú vzdialenosť budú body mať, keď Marek dofúkne balónik na objem 8 ℓ? Keďže je to kvalitný balónik, pri nafukovaní si zachováva tvar.



Keď nafúkneme Marekov balónik z pôvodnej veľkosti na dvojnásobný polomer, je to obdobné, ako keby sme sa na pôvodný balónik pozreli pod lupou s dvojnásobným zväčšením.

To znamená, že nafúknutím sa všetky dĺžky i vzdialenosti zdvojnásobia. Všeobecnejšie povedané, ak zväčšíme polomer balóniku k-krát, všetky vzdialenosti (aj na povrchu balóniku) sa tiež zväčšia k-krát.

Samotný povrch balóniku je priamo úmerný druhej mocnine polomeru (pokiaľ je polomer balóniku r, jeho povrch je rovný $4\pi r^2$), takže k-krát väčší balónik má k^2-krát väčšiu plochu. Podobne je zas objem balónika úmerný tretej mocnine polomeru (pretože objem je rovný $4\pi r^3/3$), takže k-krát väčší balónik má k^3-krát väčší objem.

Marek nafúkol svoj balón z objemu $1\,\ell$ na objem $8\,\ell$, teda jeho objem vzrástol osemnásobne. V našom prípade teda platí $k^3 = 8$, a teda $k = \sqrt[3]{8} = 2$. Polomer Marekovho balónika sa teda zdvojnásobil a taktiež sa zdvojnásobila aj vzdialenosť medzi bodmi nakreslenými na balóniku.

Body sú teraz od seba vzdialené $2 \cdot 5\,\mathrm{cm} = 10\,\mathrm{cm}$.

Úloha 17 ... hodiny

Podobne ako Marcel aj jeho krajan Jaro má rád hodiny. Raz sa zamyslene zahľadel na ciferník a odborne skonštatoval, že je poludnie. Spomenul si, ako má rád tie chvíle, keď sa pozrie na hodiny a obe ručičky sú na seba kolmé. Ako dlho si na najbližší takýto okamih ešte počká?

Hodinová ručička opíše plných 360° za $12\,\mathrm{h} = 720\,\mathrm{min}$. Jej „rýchlosť" teda môžeme definovať ako $u = 360^\circ/720\,\mathrm{min} = 0{,}5^\circ/\mathrm{min}$. Minútová ručička sa otáča rýchlosťou $v = 360^\circ/60\,\mathrm{min} = 6^\circ/\mathrm{min}$, pretože plný kruh opíše za jednu hodinu.

Na poludnie sa obe ručičky prekrývajú. Časom sa ale od seba „vzdialia". Tým teraz myslíme to, že uhol nimi opísaný sa začne meniť. Rýchlosť tohoto vzďaľovania nie je nič iného, ako rozdiel rýchlostí $v - u = 5{,}5^\circ/\mathrm{min}$. Ručičky budú na seba kolmé vtedy, keď bude rozdiel opísaných uhlov rovný $\alpha = 90^\circ$.

Tento rozdiel ručičky hodín nadobudnú za čas

$$\frac{\alpha}{v-u} = \frac{90^\circ}{5{,}5^\circ/\mathrm{min}} = \frac{180}{11}\,\mathrm{min} \doteq 16{,}4\,\mathrm{min}.$$

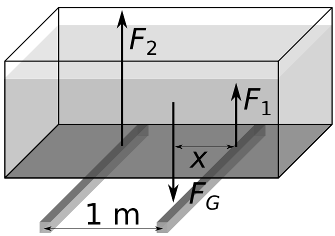
Na kolmú pozíciu hodinových ručičiek si musí Jaro počkať asi $16{,}4\,\mathrm{min}$ ($16\,\mathrm{min}$ a $22\,\mathrm{s}$).

Úloha 18 ... vratké akvárium

Paťo chce umiestniť 2 m *široké a* 100 kg *ťažké akvárium netradične na dve podpery na stene, ktoré sú od sebe vzdialené* 1 m*. Prvá podpera má nosnosť* 90 kg*, druhá je ale zle uchytená a jej nosnosť je iba* 10 kg*. Podpery teda udržia akvárium jedine vtedy, keď sa medzi nimi záťaž správne rozloží. Nájdite toto umiestnenie a vypočítajte, ako veľká musí byť vodorovná vzdialenosť medzi ťažiskom akvária a slabšou z podpier.*

Aby akvárium na podperách držalo, nielen pôsobiace sily, ale i momenty síl musia byť v rovnováhe. Označme F_1 a F_2 sily, ktorými podpery pôsobia na akvárium (sily pôsobia proti tiažovej sile) a x hľadanú vzdialenosť. Nakoľko je akvárium v pokoji (nijak sa nepohybuje), rovnosť momentov síl musí platiť pre ľubovoľne zvolený bod otáčania. Zvoľme si teda za tento bod slabšiu z podpier. Pretože sila F_1 pôsobí priamo v tomto bode, jej moment je nulový. V rovnováhe sú tak zvyšné momenty síl F_2, ktorá pôsobí vo vzdialenosti 1 m od nášho bodu otáčania, a F_G, ktorá pôsobí vo vzdialenosti x:

$$F_2 \cdot 1\,\mathrm{m} = F_G x, \quad \Rightarrow \quad x = \frac{F_2 \cdot 1\,\mathrm{m}}{mg} = \frac{900\,\mathrm{N} \cdot 1\,\mathrm{m}}{100\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2}} = 0{,}9\,\mathrm{m}.$$



Hľadaná vzdialenosť medzi ťažiskom akvária a slabšou z podpier je teda 0,9 m = 90 cm.

Úloha 19 ... osvieženie

Lucy v lete často pije svoju obľúbenú limonádu s ľadom. Stále ju ale rozčuľuje, ako kocôčky ľadu plávajú na hladine nápoja. Vezme slamku a jednu z nich bez okolkov a násilím zatlačí pod hladinu. Akou veľkou silou musí pôsobiť, aby kocôčku udržala celú pod hladinou? Kocôčka má hustotu $900\,\mathrm{kg/m^3}$ *a hmotnosť* 10 g*, hustota vody je* $1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$*.*

Pri tvorbe príkladu nebolo ublížené jedinej kocôčke ľadu.

Pokiaľ pláva kocôčka ľadu na hladine limonády, znamená to, že tiažová sila, ktorá pôsobí na ľad smerom kolmo nadol, je v rovnováhe so vztlakovou silou, ktorá pôsobí presne opačným smerom. Nakoľko vztlaková sila závisí na ponorenom objeme ľadovej kocôčky, rovnováha síl stanoví, aká časť ľadu bude pod hladinou.

Ak potom Lucy na kocôčku zatlačí a úplne ju ponorí, zväčší tým ponorený objem a teda i veľkosť vztlakovej sily. Vztlak a tiaž už nie sú ďalej v rovnováhe a Lucy preto musí slamkou pôsobiť na ľad dodatočnou silou F, ktorá opäť nastolí rovnováhu síl. Je zrejmé, že Lucy musí na kocôčku pôsobiť v smere opačnom než pôsobí (zväčšená) vztlaková sila F_{vz}, teda v rovnakom smere ako pôsobí tiažová sila F_G.

Pre rovnovnováhu síl tak vieme zostaviť rovnicu $F + F_G = F_{\mathrm{vz}}$ a jednotlivé sily rozpísať. Pre F_G platí $F_G = mg$, kde $m = 10\,\mathrm{g} = 0{,}01\,\mathrm{kg}$ je hmotnosť ľadovej kocky a g je tiažové zrychlenie.

Pre F_{vz} zas platí $F_{\text{vz}} = \varrho V g$, kde $\varrho = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$ je hustota vody a V je objem ľadovej kocôčky (ponorená je celá kocôčka). Tento objem možno pomocou hmotnosti m a hustoty ľadu $\varrho_{\mathrm{l}} = 900\,\mathrm{kg/m^3}$ vyjadriť ako $V = m/\varrho_{\mathrm{l}}$.

Pokiaľ z pôvodnej rovnice vyjadríme F a dosadíme postupne všetky vyššie uvedené vzťahy, dostaneme

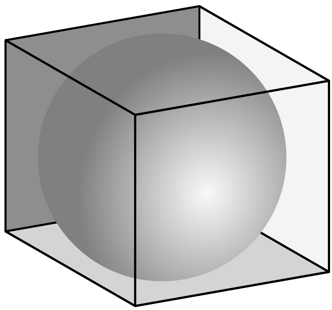
$$F = F_{\text{vz}} - F_G = \varrho V g - mg = \varrho \frac{m}{\varrho_{\mathrm{l}}} g - mg = mg\left(\frac{\varrho}{\varrho_{\mathrm{l}}} - 1\right) =$$
$$= 0{,}01\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2}\left(\frac{1\,000\,\mathrm{kg/m^3}}{900\,\mathrm{kg/m^3}} - 1\right) = \frac{1}{90}\,\mathrm{N} \doteq 11\,\mathrm{mN}.$$

Lucy musela na kocôčku ľadu tlačiť silou asi $11\,\mathrm{mN}$.

Úloha 20 ... guľa v kocke

Aký objem má najväčšia guľa, ktorá ide vpísať do kocky o objeme $6\,\mathrm{m^3}$*?*

Najväčšia guľa, ktorú vieme vpísať do kocky, sa dotýka všetkých stien kocky. Polomer tejto gule je polovica dĺžky hrany kocky. Túto dĺžku získame ako tretiu odmocninu objemu kocky: $\sqrt[3]{6\,\mathrm{m^3}} = \sqrt[3]{6}\,\mathrm{m}$. Polomer gule je teda $r = \left(\sqrt[3]{6}/2\right)$ m.



Zámerne polomer nevyčísľujeme ako desatinné číslo, pretože ho hneď dosadíme do vzťahu pre objem gule, čím dostávame

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{\sqrt[3]{6}}{2}\,\mathrm{m}\right)^3 = \frac{4}{3}\pi\frac{6}{2^3}\,\mathrm{m^3} = \pi\,\mathrm{m^3}.$$

Objem vpísanej gule je teda $\pi\,\mathrm{m^3} \doteq 3{,}14\,\mathrm{m^3}$.

Úloha 21 ... krabica

Dostali sme za úlohu presunúť bedňu o hmotnosti $10\,\mathrm{kg}$ *po rovnej ploche o desať metrov ďalej. Pokiaľ budeme bedňu tlačiť, budeme se potýkať s odporovou silou* $50\,\mathrm{N}$*. Alternatívou je bedňu hodiť. Aby doletela kam potrebujeme, je potreba jej udeliť počiatočnú rýchlosť* $10\,\mathrm{m/s}$*. Určte, v ktorom prípade vynaložíme menej energie a o koľko. Výsledok uveďte v jouloch.*

Pokiaľ budeme bedňu tlačiť po dráhe $10\,\mathrm{m}$, vykonáme pri jej presune prácu $W_1 = 50\,\mathrm{N} \cdot 10\,\mathrm{m} = 500\,\mathrm{J}$. Pokiaľ bedňu hodíme, dodáme jej kinetickú energiu $W_2 = 10\,\mathrm{kg} \cdot (10\,\mathrm{m/s})^2/2 = 500\,\mathrm{J}$. Zjavne platí $W_2 - W_1 = 0\,\mathrm{J}$, teda oba postupy vyžadujú rovnaké množstvo práce.

Úloha 22 ... chobotničky v oleji

Sépii najlepšie vyhovuje tlak, ktorý je v hĺbke 90 m *pod hladinou oceánu. Do akej hĺbky by sa musela sépia uchýliť, keby oceány boli tvorené rastlinným olejom miesto vody? Počítajte s hustotou vody* $\varrho_\mathrm{v} = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3}$ *a hustotou oleja* $\varrho_\mathrm{o} = 900\,\mathrm{kg/m^3}$*. Tiež predpokladajte, že sépia dokáže v oleji prežiť. Atmosférický tlak je* $p_0 = 100\,\mathrm{kPa}$.

V hĺbke $h_1 = 90\,\mathrm{m}$ vodného oceánu je tlak

$$p = p_0 + h_1 \cdot \varrho_\mathrm{v} \cdot g = 100\,\mathrm{kPa} + 900\,000\,\mathrm{Pa} = 1\,000\,\mathrm{kPa}\,.$$

Teraz chceme dosiahnuť rovnaký tlak v oceáne z oleja, teda

$$p = p_0 + h_2 \cdot \varrho_\mathrm{o} \cdot g\,,$$

kde sme označili hľadanú hĺbku ako h_2. Tú z rovnice vyjadríme a dostávame

$$h_2 = \frac{p - p_0}{\varrho_\mathrm{o} g}\,.$$

Po dosadení známych hodnôt nájdeme hĺbku v olejovom oceáne $h_2 = 100\,\mathrm{m}$.

Úloha 23 ... náhoda

Kika si náhodne vybrala 8 *rôznych prirodzených čísel neprevyšujúcich* 2 018 *(nulu nepovažujeme za prirodzené číslo). Aká je pravdepodobnosť, že vo vybraných číslach nájde dvojicu čísel, ktorých rozdiel je deliteľný siedmimi?*

Každé číslo, ktoré si Kika vytiahne, bude mať nejaký zvyšok po delení siedmimi. Pokiaľ si vytiahne dve čísla s rovnakým zvyškom, ich rozdiel bude mať zvyšok rovný nule a teda bude deliteľný siedmimi.

Pozrime sa na úlohu z opačného konca a skúsme zistiť pravdepodobnosť, že *žiadna* dvojica čísel nebude mať rozdiel deliteľný siedmimi, teda Kika si vytiahne čísla so vzájomne rôznymi zvyškami. Tu ale narážame na problém – možné zvyšky sú v rozmedzí 0 až 6, teda k dispozícii máme iba 7 rôznych zvyškov a Kika si ťahá až 8 čísel. Nech je jej výber ľubovoľný, nutne si *vždy* vytiahne aspoň dve čísla s rovnakým zvyškom.

Nakoľko vždy vie medzi ôsmimi číslami nájsť dvojicu čísel s rovnakým zvyškom po delení siedmimi, vždy je medzi ôsmimi číslami aspoň jedna dvojica čísel s rozdielom deliteľným siedmimi. Hľadaná pravdepodobnosť je teda 100 %.

Úloha 24 ... osa

Na jednom konci rovnej cesty dlhej 2 km *stojí Šviho, na druhom konci Ninka. Zamávajú na seba a rozbehnú sa naproti jeden druhému rýchlosťami* 20 km/h *(Šviho) a* 15 km/h *(Ninka). V rovnaký okamih od Šviha vyletí osa rýchlosťou* 35 km/h*, až doletí k Ninke. Tá ju rukou odoženie, osa sa preto ihneď otočí a letí naspät, doletí k Švihovi, tam sa zas otočí, letí k Ninke... Akú vzdialenosť osa nalieta do okamihu, kedy sa Šviho s Ninkou stretnú?*

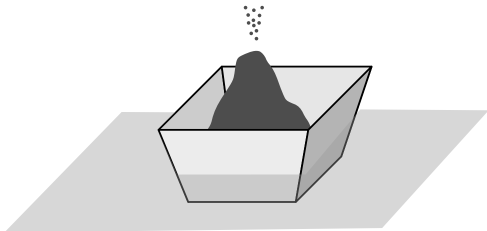
Dôležité je si uvedomiť, že osa lieta po celý čas konštantnou rýchlosťou $u = 35\,\mathrm{km/h}$, teda pre zistenie preletenej dráhy nám stačí vedieť iba čas, za ktorý sa Ninka so Švihom stretnú.

Ten najjednoduchšie zistíme z pohľadu jedného z nich, napríklad Šviha. Z jeho pohľadu (z jeho *vzťažnej sústavy*) sa mu zdá, že Nina sa k nemu približuje zo vzdialenosti $s = 2\,\mathrm{km}$ rýchlosťou $20\,\mathrm{km/h} + 15\,\mathrm{km/h} = 35\,\mathrm{km/h}$, takže sa stretnú za čas $t = s/v$.

Osa za ten čas preletí vzdialenosť $ut = us/v$. Keďže sú ale rýchlosti u a v rovnako veľké, platí $ut = s$, teda osa nalieta vzdialenosť $s = 2\,\mathrm{km}$.

Úloha 25 ... miska s pieskom

Tenkostenná miska s hmotnosťou $200\,\mathrm{g}$ *a objemom* $1\,\ell$ *pláva na vodnej hladine. Patrik do nej začne prisypávať piesok s hustotou* $1\,600\,\mathrm{kg/m^3}$ *stálym „prietokom“* $10\,\mathrm{cm^3/s}$. *Ako dlho bude trvať, než sa miska s pieskom celá ponorí pod hladinu?*



Aby sa miska s pieskom potopila, musí jej hustota byť aspoň tak veľká, ako hustota vody. Vtedy je totiž veľkost vztlakovej sily v prípade ponorenia celého objemu misky menšia, ako jej tiažová sila a miska sa nutne potopí.

Pretože je objem misky $1\,\ell$, jej celková hmotnosť (hmotnosť misky a piesku v nej) musí byť aspoň $1\,\mathrm{kg}$, pretože hustota vody je $1\,000\,\mathrm{kg/m^3} = 1\,\mathrm{kg}/\ell$. Pretože hmotnosť misky je $200\,\mathrm{g} = 0{,}2\,\mathrm{kg}$, potrebujeme doplniť ešte $m = 800\,\mathrm{g}$ piesku, ktorého objem V zistíme pomocou hustoty piesku $\varrho = 1\ 600\mathrm{kg/m^3} = 1{,}6\,\mathrm{kg}/\ell$ ako $V = m/\varrho = 0{,}5\,\ell$.

Pri prietoku $q = 10\,\mathrm{cm^3/s} = 0{,}01\,\ell/\mathrm{s}$ môže Patrik do misky sypať piesok po dobu $t = V/q = 50\,\mathrm{s}$.

Úloha 26 ... námestie

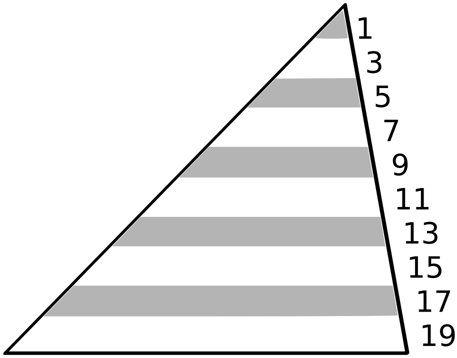
Minulý rok bola na Náboji Junior Čeky ako buddy u Kaji, v Bánovciach nad Bebravou. A ako inak, nezaobišlo sa to bez prehliadky mesta. V Bánovciach sa Čeky zapáčilo tamojšie prapodivné námestie, ktoré okrem toho, že malo tvar trojuholníka, bolo vydláždené prinajmenšom neobvykle. Sada priamok rovnobežných s jednou zo strán trojuholníkového námestia rozdeľuje obe jeho zvyšné strany na 10 *rovnakých častí. Aká časť z celkovej plochy námestia je vydláždená šedo?*

Označme obsah malého šedého trojuholníka S. Teraz k nemu pridajme prvý biely pás. Dostaneme znovu trojuholník, ktorý je s pôvodným trojuholníkom *podobný*, nakoľko sa zhodujú ich všetky tri vnútorné uhly.[2] Pretože ramená sú rozdelené na rovnako dlhé časti, pridaním jedného pásu sa dĺžka ramien zdvojnásobila. Z podobnosti potom vyplýva, že dvojnásobné sú všetky dĺžky, teda i dĺžka základne a výška. Pretože obsah trojuholníka závisí na súčine dĺžky

[2] Jedná sa o podobnosť typu *uuu*.

základne a výšky, platí, že obsah tohto trojuholníka je štvornásobný oproti obsahu S. Z toho okamžite plynie i to, že obsah prvého bieleho pásu je $4S - S = 3S$.

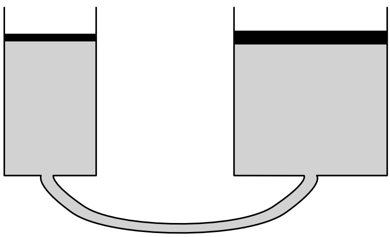
Pridaním ďalšieho (šedého) pásu dostávame zas podobný trojuholník, ktorý má teraz trojnásobné dĺžky strán a teda deväťnásobný obsah. Obsah pridaného pásu je potom $9S - 4S = 5S$. Pridávaním ďalších a ďalších pásov zistíme, že ich obsahy sú postupne S, $3S$, $5S$, ...,$19S$, viď obrázok.



Sčítajúc obsahy šedých pásov dostávame celkom obsah $45S$. Obsah bielych pásov je $55S$ (obsah celého trojuholníka vieme vyjadriť ako súčet všetkých šedých a bielych pásov, teda $45S + 55S = 100S$), takže šedo je vydláždených 45 % plochy námestia.

Úloha 27 ... piest

Majme spojené nádoby, ktoré sú uzavreté piestmi s obsahmi $25\,\mathrm{cm}^2$ *a* $350\,\mathrm{cm}^2$. *Chceme docieliť taký stav, v ktorom sústava zostáva v kľude. Menší piest má hmotnosť* $1\,\mathrm{kg}$ *a väčší má hmotnosť* $5\,\mathrm{kg}$. *Akou silou musíme pôsobiť na väčší piest?*



Sila pôsobiaca na prvý piest je priamo úmerná sile pôsobiacej na druhý piest a pomeru obsahov plochy piestov. Aby sústava zostala v rovnováhe, výslednica síl pôsobiacich na každý z piestov musí byť nulová. Ak sa nebude hýbať jeden z piestov, nebude sa pohybovať ani ten druhý, a teda stačí zaistiť, aby sa nepohyboval jeden z nich.

Na väčší z piestov pôsobí zvislým smerom nadol tiažová sila $F_2 = 5\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s}^2 = 50\,\mathrm{N}$ a naša hľadaná sila F. Opačným smerom pôsobí sila tlačiaca piest nahor. Táto sila je prenášaná kvapalinou od menšieho piestu a je rovná $F_1 \cdot (S_2/S_1)$, kde $F_1 = 1\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2}$ a $S_2/S_1 = 14$ je pomer plôch piestov. Rovnováhu síl teda môžeme napísať ako

$$F_1 \frac{S_2}{S_1} = F_2 + F, \quad \Rightarrow \quad F = \frac{S_2}{S_1} F_1 - F_2 = 140\,\mathrm{N} - 50\,\mathrm{N} = 90\,\mathrm{N}.$$

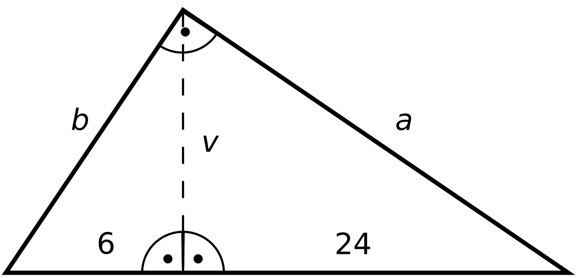
K dosiahnutiu rovnovážneho stavu je potrebné, aby na väčší z piestov zhora pôsobila sila o veľkosti $90\,\mathrm{N}$.

Úloha 28 ... prepona

Výška pravouhlého trojuholníka delí preponu na dve časti s dĺžkami 6 *a* 24*. Aký je obsah tohto trojuholníka?*

Z dobre nakreslenej ilustráce jednoducho zostavíme sústavu troch rovníc plynúcu z Pytagorových viet. Ak si označíme a, b veľkosti odvesien a v výšku trojuholníka (viď obrázok), vznikne nám sústava rovníc

$$\begin{aligned} 24^2 + v^2 &= a^2\,, \\ 6^2 + v^2 &= b^2\,, \\ a^2 + b^2 &= (24+6)^2 = 30^2\,. \end{aligned}$$



Riešenie tejto sústavy je celkom jednoduché, nakoľko všetky premenné sú tu v druhých mocninách. Stačí teda označiť $A = a^2$, $B = b^2$ a $V = v^2$ a sústavu rovníc o jednoduchých neznámych vyriešiť. Dostaneme $A = 720$, $B = 180$ a $V = 144$.

Obsah trojuholníka spočítame ako polovicu súčinu strany a príslušnej výšky. V našom prípade si môžeme vybrať, ktorý z rozmerov použijeme. Bez problémov zistíme výšku trojuholníka $v = \sqrt{V} = 12$, preto obsah S vypočítame pomocou nej a prepony, ktorej dĺžka je $c = 24+6 = 30$:

$$S = \frac{v \cdot c}{2} = \frac{12 \cdot 30}{2} = 180.$$

Obsah trojuholníka je 180.

Úloha 29 ... kváder, diel prvý

Stenové uhlopriečky v kvádri majú dĺžky 13, 15 a $\sqrt{106}$. Aký je objem tohoto kvádra?

Dĺžky stenových uhlopriečok sú s dĺžkami hrán prepojené pomocou Pytagorových viet. Ak si označíme tieto dĺžky a, b, c, tak bez ujmy na všeobecnosti bude platiť

$$a^2 + b^2 = 13^2 = 169, \tag{1}$$

$$b^2 + c^2 = 15^2 = 225, \tag{2}$$

$$a^2 + c^2 = 106. \tag{3}$$

Našim cieľom je túto sústavu rovníc vyriešiť, teda zistiť, čomu sa rovná a, b a c. Existuje niekoľko spôsobov riešenia rovníc, my si ukážeme jeden z nich. Tento postup je založený na tvrdení, že súčet ľavých a pravých strán dvoch rovníc vedie zas na platnú rovnicu.

Konkrétne, ak sčítame rovnice (2) a (3) a odčítame rovnicu (1),[3] dostaneme

$$\left(b^2 + c^2\right) + \left(a^2 + c^2\right) - \left(a^2 + b^2\right) = 2c^2 = 106 + 225 - 169 = 162.$$

Výslednú rovnicu zjednodušíme na $c^2 = 81$, z ktorej zjavne vyplýva, že $c = 9$.

Podobne zistíme i dĺžky zostávajúcich hrán. Pre $(1 + 2 - 3)$ dostávame $2b^2 = 288$, teda $b^2 = 144$ a $b = 12$. Pre $(1 + 3 - 2)$ dostávame zas $2a^2 = 50$, z čoho $a^2 = 25$ a $a = 5$.

Objem kvádra vypočítame jednoducho ako $abc = 5 \cdot 12 \cdot 9 = 540$.

Úloha 30 ... isté číslo

Isté prirodzené číslo má práve štyroch deliteľov, ktorých súčet je 176. *Určte toto číslo, ak viete, že súčet všetkých jeho číslic je* 12.

Označme hľadané číslo x. Dva delitele, ktoré má každé prirodzené číslo väčšie než jedna, sú 1 a x. Z toho plynie, že x možno rozložiť na súčin dvoch ďalších prvočiniteľov $x = c \cdot d$. V opačnom prípade by číslo x malo viac než 4 deliteľov.

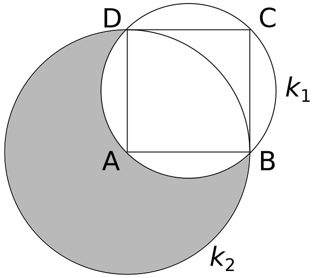
Delitele čísla x sú teda 1, c, d a $x = cd$. Pre ich súčet platí $1 + c + d + cd = (1 + c) \cdot (1 + d) = 176$. Číslo 176 možno teda zapísať ako súčin dvoch čísel iba štyrmi spôsobmi: $11 \cdot 16$, $22 \cdot 8$, $44 \cdot 4$ alebo $88 \cdot 2$. Naše hľadané činitele, zmenšené o 1, musia byť prvočísla. Túto podmienku spĺňa jedine súčin $44 \cdot 4$, a teda $c = 43$ a $d = 3$.

Hľadané číslo x je teda $43 \cdot 3 = 129$.

Úloha 31 ... do splnu ďaleko

Monča chcela nakresliť dokonalý mesiac. Narysovala preto štvorec ABCD *s dĺžkou strany* 2 cm *a dve kružnice. Prvá kružnica k_1 je štvorcu* ABCD *opísaná a druhá kružnica k_2 má stred v bode* A *a polomer* |AB|. *Tým vznikol Mončin mesiac, viď obrázok. Aký obsah má Mončin mesiac, teda aká je plocha šedej oblasti na obrázku?*

[3] Tieto operácie zapíšme ako $(2 + 3 - 1)$.



Kružnica k_1, ktorá je štvorcu opísaná má polomer r_1 rovný polovici uhlopriečky štvorca. Dĺžku uhlopriečky u vypočítame z Pytagorovej vety:

$$u^2 = 2^2 + 2^2, \quad \Rightarrow \quad u = \sqrt{8}\,\mathrm{cm} = 2\sqrt{2}\,\mathrm{cm}.$$

Pretože $r_1 = u/2$, obsah kruhu k_1 je $S_1 = \pi \cdot r_1^2 = 2\pi\,\mathrm{cm}^2$. Polomer r_2 kružnice k_2 je rovný dĺžke strany štvorca, teda $r_2 = 2\,\mathrm{cm}$; obsah tohto kruhu je potom $S_2 = \pi r_2^2 = 4\pi\,\mathrm{cm}^2$.

Celkový obsah mesiaca S je rovný $3/4$ veľkého kruhu k_2, od ktorého odčítame ešte dva kusy kruhu k_1, ktoré pretekajú cez štvorec. Obsah štyroch týchto kusov slobodno vypočítať ako $S_1 - S_\square$, kde $S_\square = (2\,\mathrm{cm})^2 = 4\,\mathrm{cm}^2$ je obsah štvorca, obsah dvoch kusov bude polovica tohto rozdielu.

Takže

$$S = \frac{3}{4}S_2 - \frac{S_1 - S_\square}{2} = \frac{3}{4}4\pi\,\mathrm{cm}^2 - \frac{2\pi\,\mathrm{cm}^2 - 4\,\mathrm{cm}^2}{2} = 3\pi\,\mathrm{cm}^2 - \pi\,\mathrm{cm}^2 + 2\,\mathrm{cm}^2 = (2\pi + 2)\ \mathrm{cm}^2.$$

Obsah Mončinho mesiaca je $(2\pi + 2)\ \mathrm{cm}^2$.

Úloha 32 ... poistka

Do jednosmerného elektrického vedenia je pri napätí $220\,\mathrm{V}$ paralelne pripojených 7 žiaroviek. Každá z nich má príkon $110\,\mathrm{W}$. Najmenej koľko ampérovú poistku je treba zapojiť pre ochranu takéhoto obvodu?

Najprv vypočítame prúd, ktorý pretečie jednou žiarovkou. Pretože poznáme príkon žiarovky (súčin napätia a prúdu) a napätia v sieti (napätie v paralelnom zapojení je rovnaké pre všetky vetvy), pre prúd I platí $I = 110\,\mathrm{W}/220\,\mathrm{V} = 0{,}5\,\mathrm{A}$.

Pretože každou zo žiaroviek prechádza prúd I a pretože žiarovky sú zapojené paralelne, celkový prúd prechádzajúci poistkou je súčtom jednotlivých prúdov. Musíme zapojiť poistku na aspoň $7I = 7 \cdot 0{,}5\,\mathrm{A} = 3{,}5\,\mathrm{A}$.

Úloha 33 ... morská soľ

Koľko soli by sme museli nasypať do Severného mora, aby malo rovnakú slanosť ako Červené more? Uvažujte, že rozloha Severného mora je $550\,000\,\mathrm{km}^2$ a jeho stredná hĺbka je $100\,\mathrm{m}$. Priemerná slanosť Severného mora je $35\,‰$ a Červeného mora $40\,‰$ ($1\,‰$ predstavuje $1\,\mathrm{g}$ soli na $1\,\ell$ vody).

Objem V vody v Severnom mori vypočítame jednoducho ako súčin jeho rozlohy a priemernej hĺbky. Rozlohu v km^2 si ale musíme premeniť na m^2: keďže $1\,\mathrm{km} = 1\,000\,\mathrm{m}$, tak $1\,\mathrm{km}^2 = (1\,000)^2\ \mathrm{m}^2 = 10^6\,\mathrm{m}^2$:

$$V = 550\,000\,\mathrm{km}^2 \cdot 100\,\mathrm{m} = 550\,000 \cdot 10^6\,\mathrm{m}^2 \cdot 100\,\mathrm{m} = 55 \cdot 10^{12}\,\mathrm{m}^3.$$

Osoliť teda musíme skutočne mnoho vody. Zo zadania rovno vidíme, že na to, aby sme dosiahli slanosť Červeného mora, musíme slanosť Severného mora zdvihnúť o 5 ‰. Inak povedané, každý liter morskej vody musíme dosoliť 5 g soli. Pretože platí $1\,\mathrm{m}^3 = 1\,000\,\ell$ a zároveň $1\,\mathrm{kg} = 1\,000\,\mathrm{g}$, vieme tiež povedať, že každý meter kubický treba osoliť $m = 30\,\mathrm{kg}$ soli. Takže celková hmotnosť potrebnej soli je $mV = 5 \cdot 55 \cdot 10^{12}\,\mathrm{kg} = 275 \cdot 10^{12}\,\mathrm{kg} = 2{,}75 \cdot 10^{14}\,\mathrm{kg}$.

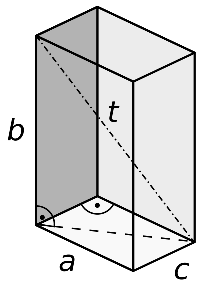
Pre zaujímavosť, pri priemernej svetovej výrobe soli (220 milónov ton ročne) by sme na osolenie Severného mora potrebovali 1250 rokov. No nepočítame s tým, že časť vyrobenej soli pochádza z Červeného či Severného mora.

Úloha 34 ... kváder, diel druhý

Stenové uhlopriečky v kvádri majú dĺžky 11 cm, 19 cm *a* 20 cm. *Aká dlhá je telesová uhlopriečka tohto kvádra?*

Dĺžky stenových uhlopriečok sú s dĺžkami hrán prepojené pomocou Pytagorových viet. Ak si označíme tieto dĺžky a, b, c, tak bez ujmy na všeobecnosti bude platiť

$$a^2 + b^2 = (11\,\mathrm{cm})^2 = 121\,\mathrm{cm}^2,$$
$$b^2 + c^2 = (19\,\mathrm{cm})^2 = 361\,\mathrm{cm}^2,$$
$$a^2 + c^2 = (20\,\mathrm{cm})^2 = 400\,\mathrm{cm}^2.$$



Našim cieľom je vypočítať telesovú uhlopriečku t, viď obrázok. Z obrázku je zrejmé, že telesová uhlopriečka je preponou pravouhlého trojuholníka s odvesnami u_{ac} (stenová uhlopriečka na stene ac) a b. Platí teda ďalšia Pytagorova veta

$$t^2 = u_{ac}^2 + b^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Druhú rovnosť sme mohli zapísať, pretože Pytagorova veta platí aj pre u_{ac}.

Súčet $a^2+b^2+c^2$ získame sčítaním všetkých Pytagorovych viet vyššie (sčítame ľavú a pravú stranu osobitne a obe strany potom vydelíme dvoma), čím dostávame

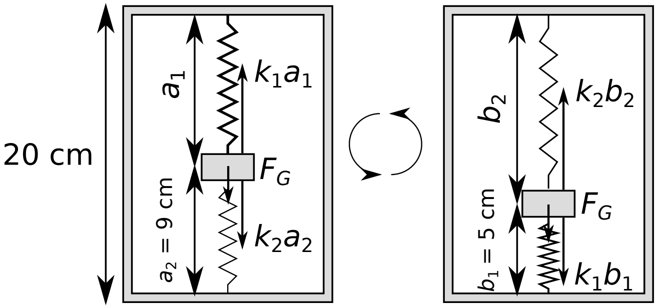
$$t^2 = a^2 + b^2 + c^2 = \frac{121\,\mathrm{cm}^2 + 361\,\mathrm{cm}^2 + 400\,\mathrm{cm}^2}{2} = 441\,\mathrm{cm}^2, \quad \Rightarrow \quad = \sqrt{441\,\mathrm{cm}^2} = 21\,\mathrm{cm}.$$

Dĺžka telesovej uhlopriečky je 21 cm.

Úloha 35 ... zaprášené pružiny

Bohdan našiel na povale dve pružiny s rôznymi tuhosťami a nulovou kľudovou dĺžkou. Oprášil ich a kýchol tak silno, že sa otriasla podlaha. Hneď nato dostal výborný nápad. Medzi pružiny upevnil malé závažie a následne pružiny natiahol do rámu s výškou 20 cm. *Keď rám postavil zvislo, závažie sa nachádzalo vo výške* 9 cm *nad spodným okrajom rámu. Keď rám otočil hore nohami, závažie sa ustálilo vo výške* 5 cm. *Aký je pomer tuhostí Bohdanových pružín?*

Obe pružiny majú nulovú kľudovú dĺžku, takže po ich natiahnutí do rámu budú obe pôsobiť na závažie silou, ktorá sa pokúša pružiny stiahnuť opäť do kľudového stavu. V pôvodnom usporiadaní má horná pružina dĺžku (v tomto prípade je dĺžka to isté ako predĺženie) $a_1 = 20\,\mathrm{cm} - 9\,\mathrm{cm} = 11\,\mathrm{cm}$, dolná pružina má dĺžku $a_2 = 9\,\mathrm{cm}$. Po otočení rámu dole hlavou budú predĺženia pružín $b_1 = 5\,\mathrm{cm}$ a $b_2 = 20\,\mathrm{cm} - 5\,\mathrm{cm} = 15\,\mathrm{cm}$.



V oboch prípadoch sa závažie nepohybuje a teda sú sily pôsobiace na závažie v rovnováhe. V pôvodnom usporiadaní platí (viď obrázok vľavo)

$$F_G + k_2 a_2 = k_1 a_1,$$

kde sme označili F_G tiažovú silu závažia a k_1, k_2 tuhosti pružín. Po otočení rámu dostaneme podobnú rovnicu

$$F_G + k_1 b_1 = k_2 b_2,$$

z ktorej možno vyjadriť F_G ako $F_G = k_2 b_2 - k_1 b_1$ a dosadiť do predchádzajúcej rovnice. Tým dostaneme rovnicu

$$\begin{aligned} k_2 b_2 - k_1 b_1 + k_2 a_2 &= k_1 a_1, \\ k_2 (a_2 + b_2) &= k_1 (a_1 + b_1), \\ \frac{k_1}{k_2} &= \frac{a_2 + b_2}{a_1 + b_1} = \frac{9\,\mathrm{cm} + 15\,\mathrm{cm}}{11\,\mathrm{cm} + 5\,\mathrm{cm}} = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Pomer tuhostí Boďových pružín je teda 3 : 2.

Úloha 36 ... švédsky pop

Maťko, nože nám čosi zahraj na tej svojej novej gitare! Že ty si zabudol tie dva akordy, čo potrebuješ na ten švédsky pop?

Nájdite nenulové jednociferné čísla A a B také, aby platilo $ABBA = (AA)^2 + (BB)^2$. Symboly A a B tu predstavujú číslice, teda pokiaľ napr. $A = 5$ a $B = 3$, potom AB je číslo 53.

Rovnicu zo zadania môžeme upraviť do tvaru $(BB)^2 = ABBA - (AA)^2$. Keďže čísla na pravej strane rovnice sú zhodne párne alebo nepárne[4] a teda aj číslo $(BB)^2$ je párne. Možné hodnoty čísla B sú teda $B \in \{2, 4, 6, 8\}$.

Číslo $ABBA$ vieme ďalej matematicky zapísať aj ako $1001A + 110B$, nakoľko cifra A sa nachádza na mieste jednotiek a tisícov a cifra B na mieste stoviek a desiatok. Rovnako sa dá rozpísať $(AA)^2 = (11A)^2 = 121A^2$ a $(BB)^2 = 121B^2$. Rovnicu zo zadania tak vieme prepísať do tvaru

$$1001A + 110B = 121A^2 + 121B^2, \quad \Rightarrow \quad 3A - B = 11A^2 + 11B^2 - 88A - 11B.$$

Rovnicu sme upravili tak, aby boli na pravej strane všetky členy deliteľné jedenástimi. Keďže ide o rovnicu, 11 musí deliť tiež ľavú stranu rovnice (alebo sú obe strany nulové, čo pre nás nie je zaujímavé riešenie). Dostávame tak možnosti $3A - B = 0$, $3A - B = 11$ alebo $3A - B = 22$ (vyššie rozdiely nemožno pre jednociferné A, B dosiahnuť).

Z prvej rovnosti plynie $A = B/3$, nuž B je deliteľné tromi. To z možných hodnôt pre B spĺňa iba $B = 6$ a teda $A = 2$. Avšak požadovaná rovnosť $2662 = 22^2 + 66^2$ nebude platiť.

Z druhej rovnosti plynie $A = (11 + B)/3$. Celočíselnú hodnotu pre A získame jedine pre $B = 4$, a tou bude $A = 5$. Znovu ale neplatí $5445 = 55^2 + 44^2$.

Naostatok pre tretiu rovnosť nachádzame $A = (22 + B)/3$. Celočíselnú hodnotu pre cifru A nájdeme pre $B = 2$, a to $A = 8$. Tu sa môžeme presvedčiť, že skutočne platí $8228 = 88^2 + 22^2$. Hľadaná dvojica čísel A, B je teda 8 a 2.

Úloha 37 ... čierna diera

Predstavte si, že se nachádzate vo vesmírnej lodi obiehajúcej okolo čiernej diery. Momentálne ste v oblasti, kde na vás pôsobí gravitačné zrýchlenie $81g$ a radi by ste se dostali do vzdialenosti, kde na vás bude pôsobit zrýchlenie nanajvýš g. Vieme, že gravitačné zrýchlenie klesá s druhou mocninou vzdialenosti. Koľko obehov musíme behom vzďaľovania vykonať, pokiaľ sa s každým obehom vzdialime o rovnakú vzdialenosť, veľkú ako polovica počiatočnej vzdialenosti?

Aby tiažové zrýchlenie, ktoré pociťujeme, kleslo 81-krát, musíme svoju vzdialenosť od čiernej diery zvýšiť $\sqrt{81} = 9$-krát, čo plynie z kvadratickej závislosti gravitačného zrýchlenia na vzdialenosti od čiernej diery. Nech sa teda začíname od diery vzdaľovať zo vzdialenosti r_1 a chceme se dostať do vzdialenosti $r_2 = 9r_1$. Pri špirálovitom pohybe sa po každom oblete vzdialime o $d = r_1/2$, po n otáčkach sa vzdialime o nd. Počet otáčok potrebný k presunu do požadovanej vzdialenosti je teda

$$n = \frac{r_2 - r_1}{d} = \frac{8r_1}{r_1/2} = 16.$$

Aby sme sa dostali do vzdialenosti, kde pociťujeme zrýchlenie o veľkosti g, musíme vykonať 16 obletov.

[4] Pokiaľ je A párna cifra, aj číslo AA je párne a jeho druhá mocnina je tiež párna (súčin párnych čísel je vždy párny). Pokiaľ je A nepárne, je nepárne i číslo AA, rovnako ako jeho druhá mocnina (súčin dvoch nepárnych čísel je vždy nepárny).

Úloha 38 ... poklad kapitána Čiernobradu

Pirátsky poklad kapitána Čiernobradu obsahuje presne 300 mincí. Jedna minca, na pohľad rovnaká ako všetky ostatné, je falošná a váži o trochu menej než pravé mince. Pre porovnávanie hmotností mincí máme k dispozícii jedine rovnoramenné váhy bez závaží. Koľko najmenej vážení je potrebných k tomu, aby sme s určitosťou zistili, ktorá minca je falošná?

Rovnoramennými váhami bez závaží vieme jedine porovnávať, či má n mincí rovnakú hmotnosť ako kôpka n iných mincí. Je zrejmé, že vážiť mince po dvojiciach nie je veľmi efektívna stratégia, pretože na bezpečné určenie falošnej mince by sme potrebovali prinajhoršom až 150 vážení.

Môžeme sa teda pokúsiť kôpky mincí deliť na polovice a porovnávať celkové hmotnosti kôpok. Ľahšia kôpka bude totiž vždy obsahovať falošnú mincu a počet „podozrivých" mincí každým vážením znížime na polovicu doterajšieho počtu.

Existuje ale ešte efektívnejší postup! Mince vieme rozdeľovať tiež na tri rovnaké kôpky, pričom porovnávať budeme hmotnosti ľubovoľných dvoch. V prípade rovnakých hmotností vieme, že falošnú mincu obsahuje zvyšná (nevážená) kôpka. Túto kôpku potom nazveme *podozrivá* a použijeme ju na ďalšie váženie. Rozdeľovať mince na viac kôpok ale zas nie je optimálne, pretože odváženie dvoch kôpok nám nič nepovie o tom, ktorá zo zvyšných kôpok je podozrivá.

Pôvodných 300 mincí teda rozdelíme na kôpky po 100 a odvážime ľubovoľnú dvojicu z nich (1. váženie). Podozrivú kôpku rozdelíme na 33, 33 a 34 mincí a odvážime prvé dve kôpky (2. váženie). Podľa výsledku váženia môže podozrivá kôpka obsahovať buď 33 alebo 34 mincí. Takže ju buď rozdelíme na tri kôpky po 11 alebo na dve kôpky po 11 a jednu po 12 minciach a odvážime dve kôpky s rovnakým počtom mincí (3. váženie). Teraz podozrivá kôpka obsahuje buď 11 alebo 12 mincí. Tie rozdelíme na 4, 4 a 3 mince alebo na tri kôpky po 4 minciach a porovnáme kôpky obsahujúce 4 mince (4. váženie). Opäť, podozrivá kôpka môže obsahovať buď 3 alebo 4 mince, ktoré možno rozdeliť v prvom prípade na tri jednotlivé mince a 5. vážením odhaliť falošnú mincu. V druhom prípade zo 4 podozrivých mincí odvážime ľubovoľné dve (stále 5. váženie) a buď určíme falošnú mincu, alebo označíme za podozrivé zvyšné dve mince. Pomocou 6. váženia potom definitívne určíme, ktorá minca je v poklade falošná.

Na bezpečné určenie falošnej mince tak potrebujeme najviac 6 vážení.

Úloha 39 ... fotka v rámčeku

Sabínka dostala od Marcela zarámovanú fotku z jeho prednášky a teraz si ju chce povesiť. Zobrala si teda klinček a kus povrázku, ktorý ale praskne, pokiaľ je na neho vyvíjaná sila väčšia než 120 N. Povraz a obrázok zvierajú uhol 30°, viď obrázok. Aký najťažší obdĺžnikový rámik s fotkou si Sabínka môže zavesiť na stenu? Hmotnosť samotnej fotky zabedbajte.

Na obrázok pôsobí sila $\boldsymbol{F}_G = mg$, kde m je hmotnosť obrazu a g je tiažové zrýchlenie. Naviac tu pôsobia i dve sily $\boldsymbol{T}$ v šikmom smere. Ak si rozložíme tieto sily do zložiek, vodorovnej a zvislej (viď obrázok), vidíme, že vodorovné zložky pôsobia proti sebe, majú rovnakú veľkosť a teda sa vyrušia. Proti tiaži obrazu budú teda pôsobiť iba zvislé zložky týchto síl.

Veľkosť zvislej zložky určíme tak, že si do obrázku rozkladu síl symetricky dokreslíme i spodný trojuholník. Tento trojuholník má vnútorné uhly rovné 60 °, je teda rovnostranný. Preto z osovej symetrie tohto trojuholníka vieme určiť, že dvojnásobok veľkosti zvislej sily musí byť rovný veľkosti samotnej sily T. Jedna polovica povrázku teda „drží" obraz silou $T/2$. Hmotnosť obrazu je teda

$$F_G = mg = T, \quad \Rightarrow \quad m = \frac{T}{g} = \frac{120\,\mathrm{N}}{10\,\mathrm{m/s^2}} = 12\,\mathrm{kg}.$$

Sabínkin obraz teda môže vážiť maximálne 12 kg.

Úloha 40 ... lup

255 zbojníkov sa delí o lup. Postup je nasledovný: všetci stoja v kruhu a hovoria postupne čísla od 1 vyššie. Keď nejaký zbojník povie párne číslo, vezme si podiel lupu, opustí kruh a počítanie pokračuje ďalej. Zbojníci počítajú až do tej doby, pokiaľ všetci nepovedia párne číslo.

Na Alibabu sa usmialo šťastie, pretože z hry vypadol ako posledný. Aké číslo povedal Alibaba ako svoje prvé?

Z popisu postupu delenia lupu plynie, že pri počítaní každý druhý zbojník vypadne. V prvom kole (teda do okamihu, kedy prvý zbojník povie ďalšie číslo) vypadne každý, kto stojí na párnej pozicii. Môžeme si teda rozmyslieť, že po prvom kole zostane v kruhu polovica, teda 128 zbojníkov. V druhom kole tiež vypadne polovica zbojníkov a zostane ich 64. V každom ďalšom sa situácia bude opakovať, až zostane iba Alibaba.

Zamyslime sa teraz nad tým, aké číslo ako posledné dostane Alibaba. Pre jednoduchšiu predstavu majme situáciu s iba piatimi zbojníkmi. Pri čísle 2 zostanú štyria zbojníci, pri čísle 4 zostanú traja, až pri čísle 8 zostane jeden a pri čísle 10 vypadne aj posledný. Pokiaľ budeme mať na začiatku nepárny počet zbojníkov, budeme sa musieť dopočítať ku dvojnásobku ich počiatočného počtu (to okrem iného preto, že iba polovica čísel spôsobuje vypadnutie zbojníka).

V našom prípade máme 255 zbojníkov a na Alibabu, nakoľko vypadne ako posledný, padne číslo $2 \cdot 255 = 510$. Teraz môžeme postupovať od konca a zisťovať, v akých kolách mal Alibaba aké číslo. Najskôr si ale pripomeňme počty zbojníkov po jednotlivých kolách. Po prvom kole zostane 128 zbojníkov, po druhom 64, po treťom 32, po štvrtom 16, po piatom 8, po šiestom 4, po siedmom 2, po ôsmom 1 a po deviatom 0. Teraz teda vieme, že Alibaba vypadol s číslom 510, a to po deviatom kole. Zároveň sa nachádzal vo všetkých kolách predchádzajúcich a v každom z nich mal nepárne číslo. Od čísla 510 preto budeme postupne odčítať počty zbojníkov a tým zistíme, aké mal Alibaba v danom kole číslo. Po ôsmom kole to bolo 509, po siedmom 507, po šiestom 503 atď. Po započítaní všetkých kôl až do prvého kola zisťujeme, že Alibaba mal v tomto kole číslo 255, takže stál vedľa zbojníka, ktorý počítanie začal.

Úloha 41 ... tramspotting

Električky jazdia medzi dvoma zastávkami A a B rovnomernou rýchlosťou a v pravidelných časových intervaloch. Fedor kráča rovnomernou rýchlosťou (inou a menšou ako električky) od zastávky A k zastávke B. Pritom zmeral, že každých 18 min ho predbehne električka. Potom sa Fedor otočil a kráčal rovnakou rýchlosťou z B do A a všimol si, že teraz ho protiidúce električky míňali každých 12 min.

Aký je skutočný časový interval medzi električkami, teda ako často by Fedora míňali električky, keby pri električkovej trati iba stál?

Keď Fedor kráča od zastávky A k zastávke B, potom interval, v ktorom míňa električky, je

$$t_1 = \frac{s}{v_\mathrm{E} - v_\mathrm{F}}\,.$$

Naopak, keď ide zo zastávky B k zastávke A, tak míňa električky v intervale

$$t_2 = \frac{s}{v_\mathrm{E} + v_\mathrm{F}}\,.$$

Nás zaujíma interval električiek zmeraný stojacim Fedorom, $t = s/v_\mathrm{E}$. Najprv zo vzťahu pre t_1 vyjadríme

$$v_\mathrm{F} = v_\mathrm{E} - \frac{s}{t_1}$$

a potom dosadíme do druhej rovnice, čím získame

$$t_2 = \frac{s}{2v_\mathrm{E} - \frac{s}{t_1}}\,.$$

Zlomok na pravej strane vykrátime s a nahradíme $v_\mathrm{E}/s = 1/t$, teda

$$t_2 = \frac{1}{\frac{2}{t} - \frac{1}{t}}\,.$$

Zostáva už iba vyjadriť hľadaný časový interval

$$t = \frac{2}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}} = 14{,}4\,\mathrm{min}\,.$$

Poznamenajme, že nájdený výraz je tzv. harmonický priemer časov t_1 a t_2. Pokiaľ by dráhy s v pôvodných vzťahoch boli rôzne, objavili by sa ako váhy prevrátených hodnôt časov t_1 a t_2.

Úloha 42 ... šťastná sedmička

Majo je matematik, a tak napísal k-ciferné číslo, ktoré obsahovalo iba sedmičky ($777\ldots7$). Ku svojmu prekvapeniu zistil, že ciferný súčet sedemnásobku napísaného čísla je presne 777. Aký je počet cifier k Majovho čísla?

Majovo číslo možno napísať pomocou mocnín desiatok ako

$$777\cdots7 = 7\left(1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{k-1}\right).$$

Sedemnásobok tohto čísla je jednoducho

$$7 \cdot 7\left(1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{k-1}\right) = 49\left(1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{k-1}\right).$$

Činiteľ 49 vieme opäť rozdeliť na mocniny desiatok ako $4 \cdot 10 + 9 \cdot 1$, a výraz vyššie rozpísať ako

$$4\left(10 + 10^2 + \cdots + 10^k\right) + 9\left(1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{k-1}\right).$$

Ak spojíme obe zátvorky podľa zodpovedajúcich mocnín 10, dostaneme

$$9 \cdot 1 + (4+9) \cdot 10 + (4+9) \cdot 10^2 + \cdots + (4+9) \cdot 10^{k-1} + 4 \cdot 10^k.$$

Člen v zátvorke možno zas prepísať ako $10 + 3$ a každú zátvorku rozdeliť na dve mocniny desiatky. Po spojení rovnakých mocnín nakoniec dostávame

$$9 \cdot 1 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 10^2 + \cdots + 4 \cdot 10^{k-1} + 5 \cdot 10^k.$$

Sedemnásobok Majovho čísla možno teda napísať ako $5444\cdots439$, pričom sa jedná o $k+1$ ciferné číslo[5] a teda $k-2$ štvoriek. K tomuto záveru vieme do istej miery menej rigorózne dospieť tak, že budeme pomocou násobenia pod seba počítať postupne $7 \cdot 7 = 49$, $77 \cdot 7 = 539$, $777 \cdot 7 = 5439$, $7777 \cdot 7 = 54\,439$ a nahliadneme, ako musí vyzerať výsledné číslo pre ľubovoľné k.

Pre ciferný súčin teda platí jednoduchá rovnica $777 = 5 + 4\,(k-2) + 3 + 9$, ktorú vyriešime a získame $k = 192$.

[5] Počet cifier zistíme jednoducho: napríklad $10^6 = 1\,000\,000$ je sedemciferné číslo, takže $k+1$ ciferné číslo má najvyššiu mocninu 10^k.

Náboj Junior 2018

Bánovce nad Bebravou – Gymnázium Janka Jesenského • **Banská Bystrica** – Gymnázium Andreja Sládkoviča • **Białystok** – Liceum Ogólnokształcące Politechniki Białostockiej • **Bielsko-Biała** – V Liceum Ogólnokształcące • **Bratislava** – UPeCe sv. Jozefa Freinademetza • **Brezno** – Gymnázium Jána Chalupku • **Brno** – Gymnázium Matyáše Lercha • **Česká Lípa** – Gymnázium Žitavská • **České Budějovice** – Gymnázium Jírovcova • **Frýdlant nad Ostravicí** – Gymnázium Frýdlant • **Grodzisk Mazowiecki** – Szkoła Podstawowa nr 5 im. Leonida Teligi • **Hlohovec** – Gymnázium Ivana Kupca • **Hradec Králové** – Univerzita Hradec Králové, Přírodovědecká fakulta • **Kadaň** – Sluníčková základní škola Kadaň • **Karlovy Vary** – První české gymnázium v Karlových Varech • **Košice** – Gymnázium Alejová • **Kraków** – Uniwersytet Jagielloński, Wydział Matematyki i Informatyki • **Krosno** – I LO z Oddz. Dwujęzycznymi im. Mikołaja Kopernika • **Levice** – Gymnázium Andreja Vrábla • **Liberec** – Doctrina – Podještědské gymnázium • **Liptovský Mikuláš** – Gymnázium Michala Miloslava Hodžu • **Łódź** – I Liceum Ogólnokształcąceim. Mikołaja Kopernika • **Lučenec** – CVČ Magnet • **Michalovce** – Gymnázium Pavla Horova • **Námestovo** – Gymnázium Antona Bernoláka • **Nitra** – Gymnázium Párovská • **Olomouc** – Gymnázium Olomouc-Hejčín • **Ostrava** – Gymnázium Olgy Havlové • **Piešťany** – Gymnázium Pierra de Coubertina • **Písek** – SPŠ a VOŠ Písek • **Plzeň** – Gymnázium Mikulášské náměstí • **Poprad** – Gymnázium Kukučínova • **Praha** – Gymnázium Voděradská • **Praha** – Gymnázum Christiana Dopplera • **Prešov** – Gymnázium Jána Adama Raymana • **Prievidza** – Gymnázium Vavrinca Benedikta Nedožerského • **Púchov** – Gymnázium Púchov • **Šahy** – Gymnázium Mládežnícka • **Sokolov** – Gymnázium a KVC Sokolov • **Sosnowiec** – IV LO z Oddz. Dwujęzycznymi im. Stanisława Staszica • **Sučany** – Bilingválne gymnázium Milana Hodžu • **Šurany** – Gymnázium Bernolákova • **Tarnów** – III Liceum Ogólnokształcące im. Adama Mickiewicza • **Třebíč** – Katolické gymnázium • **Trenčín** – Gymnázium Ľudovíta Štúra • **Trnava** – SOŠ Trnava • **Trstená** – Gymnázium Martina Hattalu • **Ústí nad Labem** – Univerzita Jana Evangelisty Purkyně, Fakulta sociálně ekonomická • **Warszawa** – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica • **Wrocław** – XV Liceum Ogólnokształcące im. mjr. Piotra Wysockiego • **Zlín** – Gymnázium Zlín-Lesní čtvrť • **Zvolen** – Gymnázium Ľudovíta Štúra

Námety úloh

Beata Czernecka • Miroslav Hanzelka • Tomáš Kremel • Radek Kusek • Katarína Marčeková • David Němec • Kateřina Stodolová • Patrik Švančara • Pavla Trembulaková

Autori zadaní a riešení úloh

Miroslav Hanzelka • David Němec • Kateřina Stodolová • Patrik Švančara

Prekladatelia

Beata Czernecka • Jakub Hluško • Radek Kusek • Anna Łeń • Karolina Szulc

Recenzenti

Tomáš Kremel • Jakub Sláma • Pavla Trembulaková