NÁBOJ junior

8. ročník

2019/20

Vzorová řešení

výfuk

matfyz

Milí příznivci matematiky a fyziky,

letos se vám opět do rukou dostává brožurka týmové matematicko-fyzikální soutěže Náboj Junior, ve které naleznete zadání soutěžních úloh i jejich řešení. V roce 2019 soutěž probíhala současně v Česku, v Polsku a na Slovensku, a to celkem na 54 místech. Na Českou republiku z tohoto počtu připadá 19 míst. Dohromady se klání zúčastnilo téměř 4000 žáků základních škol a víceletých gymnázií. Veškeré informace o průběhu soutěže, včetně mezinárodních výsledků, jsou k nalezení na internetové stránce `junior.naboj.org`.

Pokud vás tato soutěž zaujala, jistě budete potěšeni zprávou, že další, v pořadí devátý ročník Náboje Junior proběhne v listopadu 2020. A pokud byste chtěli uspořádat Náboj Junior i ve vašem městě a zvýšit tak přístupnost soutěže v regionu, budeme velice potěšeni a rádi s vámi navážeme spolupráci. V případě zájmu nám napište na kontaktní e-mail.

Spoluvyhlašovateli soutěže jsou Ministerstvo školství, mládeže a tělovýchovy České republiky a Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy. Na přípravě soutěžních úloh, této brožurky a na samotné organizaci soutěže v České republice se podíleli zejména organizátoři a příznivci korespondenčního semináře Výfuk, který zastřešuje Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy, ve spolupráci s organizátory v jednotlivých organizačních místech. Na Slovensku organizaci zabezpečilo občanské sdružení Trojsten a v Polsku studenti Jagellonské univerzity v Krakově. Seznam pořadatelských míst a seznam autorů této brožurky je k nalezení na jejím konci.

Přejeme vám příjemné rozjímání nad příklady.

Organizátoři
`info-cz@junior.naboj.org`

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

MATEMATICKO-FYZIKÁLNÍ
FAKULTA
Univerzita Karlova

Úloha 1 ... problémy bohatých

Ve městě Nábojov se používá jako měna náboje. V této měně existuje devět typů bankovek v hodnotách 1 *náboj,* 10 *nábojů,* 100 *nábojů,* 1 000 *nábojů,* 10 000 *nábojů,* 100 000 *nábojů,* 1 000 000 *nábojů,* 10 000 000 *nábojů a* 100 000 000 *nábojů. Honza má u sebe jeden kus od každé bankovky. Jaká je průměrná hodnota bankovek, které Honza vlastní?*

Aritmetický průměr čísel vypočítáme jako součet těchto čísel vydělený jejich počtem. Průměr hodnot Honzových bankovek je tedy součet veškerých hodnot, které bankovky mají (ten je 111 111 111), vydělený počtem bankovek, který je 9. Tím nám vyjde, že průměrná hodnota Honzovy bankovky je $111\,111\,111/9 = 12\,345\,679$.

Pokud bychom si toto dělení chtěli zjednodušit, můžeme každou hodnotu bankovky přepsat takto: $1 = 1$, $10 = 9 + 1$, $100 = 99 + 1$, ..., $100\,000\,000 = 99\,999\,999 + 1$. Součet všech těchto hodnot můžeme zapsat jako $9 + 99 + 999 + \ldots + 99\,999\,999 + 9 \cdot 1$. Vydělením těchto čísel 9, bude podíl rovný $1 + 11 + 111 + \ldots + 11\,111\,111 + 1 = 12\,345\,679$.

Úloha 2 ... ranní rozcvička

Robertě právě jako obvykle ujel autobus do školy. Tentokrát ale byla připravená a měla obuté běžecké tenisky. Škola je od autobusové zastávky 1 km *daleko a vyučování začíná za* 5 minut. *Jakou nejmenší průměrnou rychlostí musí Roberta běžet, aby stihla přijít na vyučování včas?*

Průměrná rychlost pohybu se rovná podílu dráhy a času. V naší úloze musí Roberta uběhnout 1 km za 5 min. Rychlost se běžně udává v jednotkách km/h nebo m/s. 5 min je dvanáctina hodiny. Můžeme si povšimnout, že pokud Roberta za 5 min uběhne vzdálenost 1 km, tak za 12 těchto intervalů uběhne 12 km. Průměrná rychlost Roberty tedy musí být alespoň 12 km/h.

Úloha 3 ... nový pokoj

Káťa si chce vymalovat stěnu v pokoji. Stěna je vysoká 2,5 m *a široká* 6 m*. Káťa vymaluje jeden metr čtvereční za* 2 minuty*. Za jak dlouho vymaluje celou stěnu?*

Nejprve vypočítáme, jak velkou plochu musí Káťa vymalovat – to je obsah obdélníku $2{,}5\,\mathrm{m} \cdot 6\,\mathrm{m} = 15\,\mathrm{m}^2$. Víme, že na každý jeden čtvereční metr potřebuje 2 minuty. Na celou stěnu tedy potřebuje $15 \cdot 2\,\mathrm{min} = 30\,\mathrm{min}$.

Úloha 4 ... osmisměrka

Osmisměrka je hra, ve které hledáte slovo vepsané do čtverečkované sítě. V každém čtverečku je jedno písmeno a každé slovo může být umístěné v osmi různých směrech. Kolika způsoby lze umístit slovo NABOJ do osmisměrky o rozměrech 5×5*? Na obrázku můžete vidět několik možných příkladů umístění slova NABOJ do osmisměrky o rozměrech* 5×5.

J				
O				
B				
A				
N				

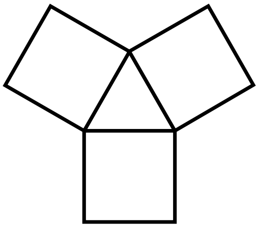
N	A	B	O	J

				N
			A	
		B		
	O			
J				

Nejdříve si všimněme, že pokud můžeme slovo do osmisměrky napsat jedním směrem, můžeme ho vždy napsat i v druhém směru. Proto lze uvažovat pouze čtyři směry – dva úhlopříčné, vodorovný a svislý. Výsledný počet možností potom vynásobíme dvěma. Úhlopříčky máme dvě – z horního pravého rohu do levého dolního a z levého horního do pravého dolního. Do úhlopříček lze proto napsat slovo *NABOJ* celkem $2 \cdot 2 = 4$. Ve svislém směru máme 5 možností a ve vodorovném také 5. Spolu se slovy napsanými v opačných pořadích máme ve vodorovných a svislých směrech $2 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = 20$ možností. Dohromady tedy existuje $4 + 20 = 24$ možností, jak napsat slovo *NABOJ* do osmisměrky.

Úloha 5 ... umělecké cítění

Lukáš nakreslil rovnostranný trojúhelník se stranou o délce 6 cm. *Potom dokreslil tři čtverce tak, jak vidíš na obrázku. Jaký je obvod nakresleného útvaru?*



Všechny tři čtverce mají jednu stranu společnou se stranou vnitřního rovnostranného trojúhelníka. Jestliže má rovnostranný trojúhelník stranu dlouhou 6 cm, má i každý ze čtverců všechny svoje strany dlouhé 6 cm. Každý ze čtverců přispívá do obvodu celého útvaru třemi svými stranami. Přispívá tedy délkou $3 \cdot 6\,\mathrm{cm} = 18\,\mathrm{cm}$. Tyto čtverce jsou tři, a proto je obvod celého útvaru rovný $3 \cdot 18\,\mathrm{cm} = 54\,\mathrm{cm}$.

Úloha 6 ... čekání na fotku

Marcel pořídil zajímavou fotografii a teď ji chce poslat Nině přes internet. Obrázek je veliký 5 MB. *Oba mají rychlost nahrávání na internet* 0,5 MB/s *a rychlost stahování z internetu* 1 MB/s. *Předtím, než se obrázek dá stáhnout, musí se celý nahrát na internet. Jaká je nejkratší doba, po kterou Nina bude muset čekat, od okamžiku, kdy fotografii Marcel začal nahrávat?*

Rychlost nahrávání 0,5 MB/s udává, že za sekundu se na internet nahraje 0,5 MB dat. Marcelova fotka má 5 MB, a proto bude nahrávání trvat 10 s. Stejně funguje i stahování dat. Jestliže je rychlost stahování 1 MB/s, stáhne se k Nině obrázek veliký 5 MB za 5 s. Celkem bude trvat $10\,\mathrm{s} + 5\,\mathrm{s} = 15\,\mathrm{s}$ než se fotka dostane k Nině.

Úloha 7 ... prolhaný papír

Pavel našel na zemi papír, na kterém bylo napsáno několik tvrzení a každé z nich mělo číselné označení.

(1) *Existuje jen jedno celé číslo takové, že když ho vynásobíme samo se sebou, dostaneme číslo* 4.

(10) *Aritmetický průměr dvou celých čísel není nikdy větší obě tyto čísla současně.*

(100) Pokud je nějaké číslo dělitelné čtyřkou, je dělitelné i dvojkou.
(1 000) Každé prvočíslo je liché.
(10 000) Nechť a, b, c jsou celá čísla taková, že pro ně platí $a < b$ a $b < c$. Potom platí i $a < c$.
Jaký je součet číselných označení vět, které jsou pravdivé?

Každé tvrzení rozeberme samostatně.

(1) Toto tvrzení není pravdivé, protože tuto vlastnost mají dvě čísla: 2 a -2.

(10) Toto tvrzení je pravdivé, protože aritmetický průměr dvou čísel vždy leží mezi těmito dvěma čísly (pokud jsou čísla rozdílná), nebo se rovná oběma číslům (pokud jsou čísla stejná). Aritmetický průměr není nikdy větší než obě čísla současně.

(100) Toto tvrzení je také pravdivé, protože každé číslo dělitelné čtyřkou má ve svém prvočíselném rozkladu dvakrát číslo 2, a proto je dělitelné i dvojkou.

(1 000) Toto tvrzení není pravdivé, protože i sudé číslo 2 je prvočíslo.

(10 000) Toto tvrzení je pravdivé. Jestliže je číslo b větší než číslo a a zároveň existuje c větší než b, pak je c jednoznačně větší než a.

Pravdivé jsou věty s čísly 10, 100 a 10 000. Součet čísel označujících pravdivé věty je proto 10 110.

Úloha 8 ... odporná úloha

Karel si hrál se třemi rezistory s odpory $1\,\Omega$, $2\,\Omega$ a $3\,\Omega$. Má k dispozici nekonečné množství drátu s nulovým odporem. Jaký největší odpor může mít obvod, který sestaví?

Pokud všechny rezistory zapojíme sériově, výsledné zapojení bude mít odpor rovný součtu všech odporů a to $1\,\Omega + 2\,\Omega + 3\,\Omega = 6\,\Omega$.

Přepokládejme nyní, že některé z odporů jsou spojené paralelně. Pokud máme v jedné větvi odpor R_1 a v druhé paralelní větvi odpor R_2, tak celkový odpor R tohoto zapojení je

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\,.$$

Po vyjádření R

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}\,.$$

Dává paralelní zapojení rezistorů menší odpor než sériové? Sestavme si nerovnici

$$R_1 + R_2 \geq \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}\,.$$

Po úpravách dostáváme

$$R_1^2 + R_1 \cdot R_2 + R_2^2 \geq 0.$$

Tato nerovnost platí, protože všechny členy na levé straně jsou kladné. Paralelní zapojení rezistorů snižuje odpor obvodu, proto pokud chceme sestavit obvod s největším odporem, zapojíme všechny rezistory sériově. Odpor $6\,\Omega$ je největší odpor, kterého můžeme dosáhnout.

Úloha 9 ... kolona na hranicích

Na hraničním přechodu stojí dlouhá kolona aut. Každou hodinu přejede přes hranici průměrně 300 aut. Jaká je průměrná doba mezi přejezdem dvou po sobě jedoucích aut?

Za hodinu přejede přes hranici průměrně 300 aut. Za minutu (60 s) jich průměrně přejede $300/60 = 5$. Průměrný interval mezi dvěma auty je tak $60\,\mathrm{s}/5 = 12\,\mathrm{s}$.

Úloha 10 ... myslím si číslo

Hanka si myslí tři čísla. Součet všech tří čísel je 20. První číslo je čtyřnásobkem součtu ostatních dvou. Druhé číslo je zase sedminásobkem třetího čísla. Jaký je součin čísel, které si Hanka myslí?

Součet všech Hančiných čísel se dá rozdělit na pět stejně velkých dílů, ze kterých čtyři připadnou prvnímu číslu a jeden připadne součtu zbylých dvou čísel. Tím je splněna první podmínka ze zadání. První číslo tedy je $20 \cdot 4/5 = 16$. Zbylá dvě čísla proto mají součet $20/5 = 4$.

Součet druhého a třetího čísla rozdělíme na osm stejně velkých dílů, ze kterých sedm připadne druhému číslu a jeden třetímu číslu. Druhé číslo má proto hodnotu $4 \cdot 7/8 = 7/2$ a třetí číslo hodnotu $4/8 = 1/2$. Součin Hančiných čísel je proto

$$16 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{2} = 28\,.$$

Úloha 11 ... rozhoupaná

Aleš a Andrea se chtějí houpat na houpačce, která je tvořena tyčí podepřenou přesně ve středu své délky. Aleš s hmotností 50 kg *sedí na tyči ve vzdálenosti* 0,6 m *od bodu, ve kterém je podepřená. Jak daleko od Aleše si má sednout Andrea, dívka o hmotnosti* 40 kg*, aby byla houpačka vyvážená?*

Aby byla houpačka vyvážená, musí se rovnat momenty sil, kterými na ni oba působí. Aleš působí momentem síly $M_1 = m_1 g r_1$, kde $m_1 = 50\,\mathrm{kg}$ je jeho hmotnost a $r_1 = 0{,}6\,\mathrm{m}$ je jeho vzdálenost od středu houpačky. Podobně působí na houpačku Andrea momentem $M_2 = m_2 g r_2$, kde $m_2 = 40\,\mathrm{kg}$ je její hmotnost a r_2 je její vzdálenost od středu houpačky. Tyto dva momenty se rovnají:

$$m_1 g r_1 = m_2 g r_2\,.$$

Po dělení tíhovým zrychlením g dostáváme ekvivalentní vztah

$$m_1 r_1 = m_2 r_2\,, \quad \Rightarrow \quad r_2 = \frac{m_1}{m_2} r_1 = \frac{60\,\mathrm{kg}}{40\,\mathrm{kg}} \cdot 0{,}6\,\mathrm{m} = 0{,}75\,\mathrm{m} = 75\,\mathrm{cm}\,.$$

Andrea je od bodu podepření houpačky vzdálená 75 cm. Od tohoto bodu v opačném směru sedí Aleš ve vzdálenosti $r_1 = 0{,}6\,\mathrm{m} = 60\,\mathrm{cm}$, takže Andrea bude od Aleše sedět ve vzdálenosti $r_1 + r_2 = 60\,\mathrm{cm} + 75\,\mathrm{cm} = 135\,\mathrm{cm} = 1{,}35\,\mathrm{m}$.

Úloha 12 ... kytice

David chce Veronice koupit k narozeninám kytici a vlastní 23 kupónů do květinářství. Jedna růže stojí jeden kupón a jedna lilie stojí dva kupóny. Kolik různých kytic může David koupit Veronice, pokud chce za tuto kytici utratit všechny kupóny? Za různé kytice se považují takové, které mají různé složení květin.

Každá růže stojí pouze jeden kupón, a proto když David koupí určité množství lilií, zbytek květin doplní růžemi. Počet různých kytic, které může David koupit Veronice se tak bude rovnat počtu možností, kolik může být lilií v kytici. Nejméně jich může být 0 a nejvíce 11 (pokud by lilií bylo 12, potřeboval by David 24 kupónů). David může dát Veronice 12 různých kytic.

Úloha 13 ... poloprázdný bazén

Kuba má doma různé nádoby na vodu: malý hrneček s objemem $0{,}5\,\mathrm{dl}$*, velký hrneček s objemem* $300\,\mathrm{cm}^3$*, džbán s objemem* $0{,}5\,\mathrm{dm}^3$*, hrnec s objemem* $1\,\mathrm{l}$ *a vědro s objemem* $0{,}05\,\mathrm{hl}$*. Každou nádobu naplnil* 100*krát vodou a vylil ji do na počátku prázdného bazénku s objemem* $0{,}8\,\mathrm{m}^3$*. Kolik litrů vody je třeba do bazénku přilít, aby byl úplně plný?*

Nejdříve převedeme všechny jednotky na litry, protože v nich je požadován výsledek. Malý hrneček má objem $0{,}5\,\mathrm{dl} = 0{,}05\,\mathrm{l}$. Velký hrneček má objem $300\,\mathrm{cm}^3 = 0{,}3\,\mathrm{l}$. Džbán má objem $0{,}5\,\mathrm{dm}^3 = 0{,}5\,\mathrm{l}$. Hrnec má objem $1\,\mathrm{l}$. Vědro má objem $0{,}05\,\mathrm{hl} = 5\,\mathrm{l}$.

Pokud každou z těchto nádob jednou naplníme a vylijeme do bazénu, v bazénu bude

$$0{,}05\,\mathrm{l} + 0{,}3\,\mathrm{l} + 0{,}5\,\mathrm{l} + 1\,\mathrm{l} + 5\,\mathrm{l} = 6{,}85\,\mathrm{l}$$

vody. Postup zopakujeme 100krát a tím vylijeme do bazénu $100 \cdot 6{,}85\,\mathrm{l} = 685\,\mathrm{l}$ vody. Bazének má objem $0{,}8\,\mathrm{m}^3 = 800\,\mathrm{l}$. Abychom ho úplně naplnili, potřebujeme do něj přilít ještě $800\,\mathrm{l} - 685\,\mathrm{l} = 115\,\mathrm{l}$ vody.

Úloha 14 ... frisbee v parku

Michal a Ella si v parku hází létajícím talířem. Stojí od sebe ve vzdálenosti $90\,\mathrm{m}$*. Ella hodí Michalovi talíř rychlostí* $36\,\mathrm{km/h}$*. Talíř se pohybuje rovnoměrným přímočarým pohybem. V okamžiku výhozu se Michal rozběhne směrem k Elle konstantní rychlostí a talíř chytí po* $6\,\mathrm{s}$*. Jakou rychlostí běží Michal?*

Na úvod si převeďme rychlost letu talíře metry za sekundu: $36\,\mathrm{km/h} = 10\,\mathrm{m/s}$. Aby Michal chytil disk za 6 sekund, musí se k disku přibližovat rychlostí $90\,\mathrm{m}/6\,\mathrm{s} = 15\,\mathrm{m/s}$. Rychlost, kterou se Michal přibližuje k talíři, se ale rovná součtu rychlosti letu talíře a jeho běhu. Michal proto běží rychlostí $15\,\mathrm{m/s} - 10\,\mathrm{m/s} = 5\,\mathrm{m/s}$.

Úloha 15 ... násobení z rychlíku

Když se Matěj nudil ve vlaku, rozhodl se vypočítat, kolik je $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 2017 \cdot 2019$*. Kolik nul na konci má tento součin?*

Zamysleme se, jestli se vůbec může na konci Matějova součinu nějaká nula objevit. Celé číslo končící nulou je dělitelné deseti, a je tedy dělitelné dvěma i pěti. Avšak Matěj násobí pouze lichá čísla, proto i výsledný součin musí být lichý a není tedy dělitelný dvěma. V důsledku toho nemůže končit nulou. Na konci Matějova součinu se nenachází žádná nula.

Úloha 16 ... kinematografická kinematika

Míša jela ze své rodné vesnice do kina ve městě. V oblasti mimo město urazila pětkrát větší vzdálenost než uvnitř města. Ve městě přitom jezdila třikrát pomaleji než mimo město. Cesta z okraje města ke kinu jí trvala $30\,\mathrm{min}$*. Jak dlouho jí trvala cesta do města, tj. jak dlouho jela z vesnice ke kraji města?*

Ze zadání víme, že úsek cesty od okraje města do kina Míše trval 30 minut. Kdyby tuto vzdálenost urazila rychlostí, kterou se pohybovala mimo město, trvalo by jí to třikrát kratší dobu, tedy $10\,\mathrm{min}$. Mimo město urazila Míša touto rychlostí pětkrát větší vzdálenost, musela tedy jet pětkrát déle. Míša jela z vesnice na okraj města $50\,\mathrm{min}$.

Úloha 17 ... výroky v kruhu

12 lidí se rozestavělo do kruhu a každý z nich pronesl všechny tři následující výroky:

- *„Bydlím v Polsku."*
- *„Osoba po mé levé ruce bydlí v České republice."*
- *„Aspoň jeden ze dvou lidí stojících vedle mě bydlí v Polsku, České republice nebo na Slovensku."*

Potom si uvědomili, že ze všech 36 *výroků byly pravdivé pouze* 2*. Kolik lidí z této skupiny bydlí na Slovensku?*

Kdyby byl v kruhu nějaký Polák, tak by mluvil pravdu, když by tvrdil, že bydlí v Polsku. Zároveň by tak říkali pravdu i oba jeho sousedi pronesením třetího výroku. Tím bychom dostali celkem minimálně tři pravdivé výroky, což odporuje zadání. Nikdo z lidí v kruhu tedy nebydlí v Polsku. Kdyby byl v kruhu někdo žijící v Česku, byl by pravdivý druhý výrok pronesený sousedem po jeho pravici a také by byly pravdivé třetí výroky obou jeho sousedů. Nikdo z lidí stojících v kruhu tedy nemůže bydlet ani v Česku. Pokud by byl v kruhu někdo ze Slovenska, pro oba jeho sousedy by byl nutně pravdivý pouze třetí výrok. Tím hned získáme 2 pravdivé výroky zmíněné v zadání. Kdybychom přidali další osobu ze Slovenska, pravdivých výroků by nutně bylo více. V kruhu tedy může být nejvýše jeden člověk ze Slovenska. Na lidi bydlící mimo Polsko, Česko a Slovensko se výroky nevztahují. V kruhu tedy stálo jedenáct lidí z jiných zemí a jeden člověk ze Slovenska.

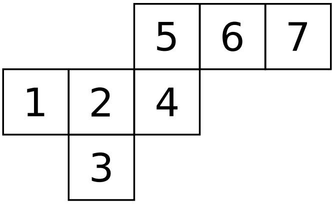
Úloha 18 ... kartičky

Karel má 4 *kartičky. Na každé z nich je napsané jedno číslo. Karel vždy vezme dvě kartičky a sčítá čísla na nich napsaná. Když sečte všechny možné páry karet, dostane třikrát součet* 14 *a třikrát součet* 12*. Jaký je součet čísel na všech kartičkách dohromady?*

V množině všech možných (neuspořádaných) párů kartiček se každá kartička vyskytuje přesně třikrát, protože může být spárována s jednou ze tří zbylých kartiček. Takže když sečteme součty všech párů, dostaneme trojnásobek součtu čísel na všech kartičkách, což je $3 \cdot 14 + 3 \cdot 12 = 78$. Součet čísel na všech kartičkách je tedy roven $78/3 = 26$.

Úloha 19 ... síť kostky

Jirka si z papíru vystřihl síť kostky tak, jak ukazuje obrázek. Má ale o jeden čtvereček více, než by měla mít. Proto chce Jirka nějaký čtvereček odstřihnout, a to tak, aby byla zbylá síť stále na jednom kusu papíru a aby z ní bylo možné složit kostku. Které čtverečky může odstřihnout?



Kdybychom odstřihli některý ze čtverečků 2, 4, 5 nebo 6, zbylá síť by nebyla souvislá. Proto můžeme odstřihnout leda některý ze čtverečků 1, 3 nebo 7. Pokud bychom zkusili složit původní síť, zjistili bychom, že 1 musí být na proti 4 a 2 musí být naproti 6. Dále musí být 7 naproti 5, ale 5 musí být zároveň naproti 3. To není možné, proto musíme právě jeden ze čtverečků 3 a 7 odstřihnout. Nakonec si povšimneme, že pokud jeden z nich odstřihneme, dokážeme ze zbylé sítě složit kostku. Můžeme tedy odstřihnout libovolný ze čtverečků 3 a 7.

Úloha 20 ... závažný experiment

Vědci z města Nábojov provedli následující experiment. Vzali dutou železnou krychli a vyřízli z jedné její strany kus, který obsahoval $10\,\mathrm{cm}^2$ *z vnějšího povrchu krychle. Poté vzali závaží stejného tvaru, jaký měl vyříznutý kus, a vložili ho do stěny krychle. Následně byl z vnitřního prostoru krychle odsán veškerý vzduch. Vědci pak otočili krychli tak, aby stěna se závažím byla vespod. Závaží přitom z krychle nevypadlo, ačkoli mezi ním a krychlí není žádné tření. Jaká byla hmotnost závaží? Při výpočtu uvažujte s atmosférickým tlakem* $100\,000\,\mathrm{Pa}$.

Rozeberme nejprve, jaké síly působí na závaží. Směrem dolů působí tíhová síla $F_G = mg$, kde m je hmotnost závaží a g je tíhové zrychlení. Okolo krychle je vzduch s atmosférickým tlakem $p_\mathrm{A} = 100\,000\,\mathrm{Pa}$, který na závaží působí směrem vzhůru tlakovou silou $F_\mathrm{t} = Sp_\mathrm{A}$ ($S = 10\,\mathrm{cm}^2 = 0{,}001\,\mathrm{m}^2$ je plocha vyříznuté části kostky). Uvnitř kostky je vakuum, jehož tlak na závaží je nulový, a tedy nepůsobí žádnou silou. Aby závaží nevypadlo, musí se tlaková síla F_t vyrovnat s tíhovou silou F_G. Po dosazení získáme

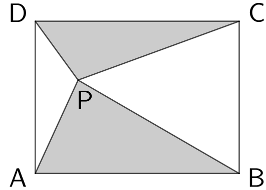
$$S\,p_\mathrm{A} = mg\,, \quad \Rightarrow \quad m = \frac{S\,p_\mathrm{A}}{g} = \frac{0{,}001\,\mathrm{m}^2 \cdot 100\,000\,\mathrm{Pa}}{10\,\mathrm{m/s^2}} = 10\,\mathrm{kg}\,.$$

Hmotnost závaží musí být přesně $10\,\mathrm{kg}$.

Úloha 21 ... bod v obdélníku

Lenka si nakreslila obdélník $ABCD$ *s délkami stran v poměru* $AB : BC = 4 : 3$. *Poté dovnitř obdélníku nakreslila bod* P *a všimla si, že obsahy trojúhelníků* ABP, BCP *a* CDP *byly postupně* $17\,\mathrm{cm}^2$, $42\,\mathrm{cm}^2$ *a* $47\,\mathrm{cm}^2$. *Jaký je obsah trojúhelníku* DAP?

Trojúhelníky ABP a CDP mají každý jednu stranu stejně dlouhou jako je delší strana obdélníku $ABCD$. Součet vzdáleností bodu P od zmíněných stran trojúhelníků je roven délce kratší strany obdélníku. Proto obsahy trojúhelníků ABP a CDP musí mít součet $17\,\mathrm{cm}^2 + 47\,\mathrm{cm}^2 = 64\,\mathrm{cm}^2$. Zároveň je tento součet roven součinu délek $|AB|/2$ a $|BC|$, viz obrázek. Takže trojúhelníky ABP a CDP mají součet obsahů roven polovině obsahu obdélníku $ABCD$. Také ale víme, že i trojúhelníky BCP a DAP mají dohromady obsah $64\,\mathrm{cm}^2$. Trojúhelník DAP má tedy obsah $64\,\mathrm{cm}^2 - 42\,\mathrm{cm}^2 = 22\,\mathrm{cm}^2$.



Úloha 22 ... poloplný bazén

Dan si koupil vodní čerpadlo, které se chystá použít na naplnění svého bazénu. V manuálu se píše, že objemový průtok čerpadla je $2\,\mathrm{dm^3/s}$. *Bazén má délku* $9\,\mathrm{m}$, *šířku* $3\,\mathrm{m}$ *a hloubku* $2\,\mathrm{m}$. *Jak dlouho bude trvat, než se bazén naplní vodou až po okraj?*

Do bazénu přiteče za každou sekundu $0{,}002\,\mathrm{m^3}$ vody. Objem Danova bazénu je $9\,\mathrm{m}\cdot 3\,\mathrm{m}\cdot 2\,\mathrm{m} = 54\,\mathrm{m^3}$. Čerpadlu bude načerpání tohoto objemu trvat

$$\frac{54\,\mathrm{m^3}}{0{,}002\,\mathrm{m^3/s}} = 27\,000\,\mathrm{s} = 450\,\mathrm{min} = 7{,}5\,\mathrm{h}\,.$$

Bazén bude zcela naplněn za 7,5 h.

Úloha 23 ... po schodoch, po zvukoch

V městě Nábojov stojí zvláštní paneláky. Každý má přízemí a 9 poschodí. Schodiště z přízemí do prvního poschodí má určitý počet schodů. Každé další schodiště mezi vyššími poschodími má o jeden schod více než předchozí schodiště. Počet schodů mezi přízemím a pátým poschodím je roven počtu schodů mezi pátým poschodím a devátým. Kolik schodů má schodiště mezi přízemím a prvním poschodím?

Úlohu lze řešit rovnicí, ale pokusme se místo toho o úvahu. Uspořádejme schodiště do párů 2. a 6., 3. a 7., 4. a 8., 5. a 9. První schodiště v párech mají o čtyři schody méně než druhá schodiště, takže z prvního poschodí do pátého vede o $4 \cdot 4 = 16$ schodů méně než z pátého do devátého. Jelikož z přízemí do pátého patra vede stejný počet schodů jako z pátého do devátého, musí tento rozdíl představovat počet schodů z přízemí do prvního patra. První schodiště má tedy 16 schodů.

Úloha 24 ... kvarky

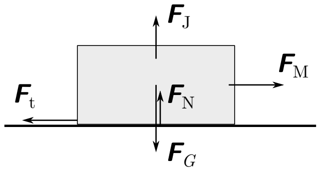
Vašek nedávno zjistil, že protony a neutrony se skládají ze dvou typů kvarků (elementárních částic) nazývaných up *a* down. *Proton obsahuje dva kvarky typu* up *a jeden kvark typu* down. *Neutron zase obsahuje jeden kvark typu* up *a dva kvarky typu* down. *Vašek si také uvědomil, že elektrický náboj protonu i neutronu musí být roven součtu elektrických nábojů kvarků, z nichž se tyto částice skládají. Poté se zamyslel – jaký elektrický náboj by měla částice sestávající z jednoho kvarku typu* up *a jednoho kvarku typu* down*?*

Jeden proton a jeden neutron mají dohromady elektrický náboj +e. Celkem obsahují 3 kvarky typu *up* a 3 kvarky typu *down*. Náboj částice, která obsahuje jeden kvark *up* a jeden kvark *down* tedy musí být třetinový, tj. $1/3\,\mathrm{e}$.

Úloha 25 ... kvádr

Jana a Michaelu zaujal kvádr s hmotností $2\,\mathrm{kg}$. *Položili ho na stůl, přičemž součinitel tření mezi kvádrem a stolem činil* $0{,}6$, *a pak oba začali na kvádr působit různou silou. Jan ho tahal směrem kolmo vzhůru silou o velikosti* $5\,\mathrm{N}$. *Michaela působila na kvádr vodorovnou silou takovou, že se kvádr po stole pohyboval stálou rychlostí. Jak velkou silou musela Michaela na kvádr působit?*

Protože se kvádr ve svislém směru nepohybuje vůbec a ve vodorovném směru se sice pohybuje, ale za to konstantní rychlostí, musí platit, že součet sil působících na kvádr v obou směrech je nulový. Obrázek ukazuje jaké jsou tyto síly.



Ve svislém směru je to tíhová síla kvádru $F_G = mg$ ($m = 2\,\mathrm{kg}$ je hmotnost kvádru a g tíhové zrychlení), síla F_J, kterou působí Jan a nakonec reakční síla stolu F_N. Aby byl jejich součet nulový, musí platit

$$F_\mathrm{N} = F_G - F_\mathrm{J}\,.$$

Ve vodorovném směru působí pouze síla F_M, kterou na kvádr působí Michaela a protí ní třecí síla F_t, pro kterou platí $F_\mathrm{t} = fF_\mathrm{N}$. Z jejich rovnosti dostáváme

$$F_\mathrm{M} = F_\mathrm{t}\,, \quad \Rightarrow \quad F_\mathrm{M} = fF_\mathrm{N} = f\,(mg - F_\mathrm{J}) = 0{,}6 \cdot \left(2\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} - 5\,\mathrm{N}\right) = 9\,\mathrm{N}\,.$$

Michaela musela na kvádr působit sílou o velikosti $9\,\mathrm{N}$.

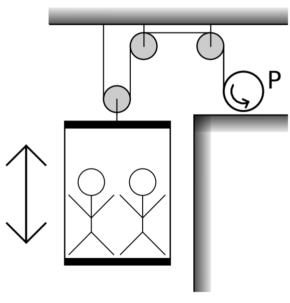
Úloha 26 ... společné násobky

Každý z trojice Adam, Bořek a Cyril si myslí nějaké přirozené číslo (vyjma nuly). Nejmenší společný násobek Adamova a Bořkova čísla je 24. *Nejmenší společný násobek Bořkova a Cyrilova čísla je* 40. *Jakou nejmenší hodnotu může mít nejmenší společný násobek Adamova a Cyrilova čísla?*

Nejmenší společný násobek (NSN) Adamova čísla (A) a Bořkova čísla (B) je dělitelný třemi, ale NSN B a C (Cyrilovo číslo) není. Z toho vyplývá, že B není dělitelné třemi a A je. Podobnou úvahou si rozmyslíme, že C je dělitelné pěti. NSN A a C tak musí být nejméně $3 \cdot 5 = 15$. Pokud bude platit $A = 3$, $B = 8$ a $C = 5$, dosáhneme tohoto NSN a také snadno ověříme, že tyto hodnoty splňují i zbylé podmínky ze zadání. Nejmenší možná hodnota nejmenšího společného násobku Adamova a Cyrilova čísla je tedy 15.

Úloha 27 ... výtah plný fyziků

Na pražských studentských kolejích se testuje nová výtahová technologie, jejíž princip je znázorněn na obrázku. Motor výtahu má výkon $1\,\mathrm{kW}$. *Určete maximální rychlost, kterou se může pohybovat kabina výtahu, bude-li spolu s pasažéry vážit* $400\,\mathrm{kg}$.



Bez ohledu na mechanismus výtahu je energie dodávaná motorem využita pouze na změnu potenciální energie kabiny s pasažéry. Pokud se kabina výtahu zvedne o výšku Δh, naroste potenciální energie kabiny o $\Delta E = mg\Delta h$, kde $m = 400\,\mathrm{kg}$ je hmotnost kabiny a g je tíhové zrychlení. Pokud tato změna proběhne za čas Δt, má motor výkon $P = 1\,\mathrm{kW} = 1\,000\,\mathrm{W} = \Delta E/\Delta t = mg\Delta h/\Delta t$. Výraz $\Delta h/\Delta t$ představuje rychlost v, kterou se pohybuje kabina výtahu. Když ji ze vzorce vyjádříme, dostaneme

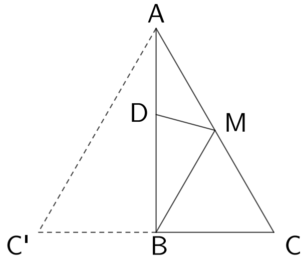
$$v = \frac{P}{mg} = \frac{1\,000\,\mathrm{W}}{400\,\mathrm{kg}\cdot 10\,\mathrm{m/s^2}} = 0{,}25\,\mathrm{m/s}\,.$$

Maximální rychlost, kterou se naložený výtah dokáže pohybovat, je $0{,}25\,\mathrm{m/s} = 25\,\mathrm{cm/s}$.

Úloha 28 ... ty pravé starosti

Patrik nakreslil pravoúhlý trojúhelník ABC s pravým úhlem při vrcholu B. Velikost úhlu $\measuredangle BAC$ byla $30°$. Do obrázku nakreslil i bod M, který byl středem strany AC. Nakonec nakreslil také bod D na úsečku AB tak, aby platilo $|BD| = |BC|$. Určete velikost úhlu $\measuredangle BMD$.

Trojúhelník ABC má vnitřní úhly o velikostech $90°$, $30°$ a $180° - 90° - 30° = 60°$. Kdybychom vzali dva takové trojúhelníky a propojili je stranou naproti úhlu s velikostí $60°$, dostali bychom trojúhelník, jehož všechny vnitřní úhly by měly velikost $60°$. V trojúhelníku ABC tedy zřejmě platí $|AC| = 2\cdot|BC|$.



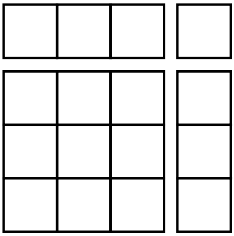
Jelikož M je středem AC, platí $|CM| = |AC|/2 = |BC|$. Proto je trojúhelník BCM rovnoramenný se základnou BM. Úhel $\measuredangle BCM$ má v tomto trojúhelníku velikost $60°$. Z toho snadno dopočteme, že i zbylé úhly tohoto trojúhelníku mají velikost $60°$. Proto je tento trojúhelník rovnostranný a trojúhelník ABM je rovnoramenný se základnou AB. Takže velikost úhlu $\measuredangle ABM$ je stejná jako velikost úhlu $\measuredangle BAM$, tedy $30°$.

Ze zadání ještě víme, že $|BD| = |BC| = |BM|$, a tak je i trojúhelník BDM rovnoramenný se základnou BM. Víme, že velikost úhlu $\measuredangle DBM$ je $30°$. Zbylé úhly tohoto trojúhelníku tedy mají velikost $(180° - 30°)/2 = 75°$. To znamená, že velikost úhlu $\measuredangle BMD$ je $75°$.

Úloha 29 ... trpasličí dlaždice

Trpaslíci v městě Nábojov se rozhodli vydláždit své náměstí čtvercovými dlaždicemi. Nejdříve první z trpaslíků položil do rohu náměstí první dlaždici. Pak přišel druhý trpaslík a položil další dlaždice tak, aby dohromady tvořily čtverec 2×2. Třetí trpaslík pak položil další dlaždice tak, aby dohromady dlaždice tvořily zase čtverec se stranou o 1 větší. Pokud stejně postupovali všichni trpaslíci, kolik dlaždic musel na náměstí položit 2019. trpaslík?

Zaměřme se na to, jak se přidávají jednotlivé dlaždice, například u čtvrtého trpaslíka. Ten přidává dlaždice jako na obrázku – ke dvěma ze stran přidá tolik dlaždic, kolik jich bylo na straně předchozího čtverce a pak k nim přidá ještě jednu do rohu. Čtvrtý trpaslík proto položil celkem $3+3+1=7$ dlaždic. Stejně tak pokračují i další trpaslíci, tj. přidají dlaždice ke dvěma stranám čtverce a pak přiloží ještě jednu další. 2 019. trpaslík tak musí položit $2\,018+2\,018+1 = 4\,037$ dlaždic.



Úloha 30 ... házení míče

Martin upustil míč z výšky $10\,\mathrm{m}$ *na zem. Pokaždé, když se míč odrazí od země, ztratí polovinu rychlosti, kterou dopadal na zem. Kolikrát se míč odrazil do výšky alespoň* $1\,\mathrm{cm}$*?*

Během pohybu míče dochází k neustálé přeměně potenciální energie na kinetickou a naopak. Pokud míč upustíme z nějaké výšky nulovou rychlostí, tak na začátku představuje celkovou energii jeho potenciální energie. Těsně před dopadem míče je pak všechna potenciální energie přeměněna na energii kinetickou. Odrazem se část kinetické energie ztratí a míč letí zpátky vzhůru. Maximální výška, do které se míč odrazí, je pak daná přeměnou zbylé energie zpátky na potenciální. Pak se celý proces opakuje a míč letí dolů.

Pro kinetickou energii platí $E_\mathrm{k} = mv^2/2$, kde v je rychlost míče a m je jeho hmotnost. Poklesne-li rychlost míče na polovinu, jeho kinetická energie se zmenší na čtvrtinu. Čtvrtinová bude také potenciální energie po odrazu míče zpátky do maximální výšky. Protože pro potenciální energii platí $E_\mathrm{p} = mgh$, kde m je hmotnost, g tíhové zrychlení a h výška, pro čtvrtinovou hodnotu E_p plyne, že výška, do které se míč odrazí, bude také čtvrtinová.

Po prvním odraze se tak míč odrazí do výšky $10\,\mathrm{m}/4$, po druhém do výšky $10\,\mathrm{m}/4^2$ atd. Lehce zjistíme, že po čtvrtém odrazu se míč odrazí do výšky $1\,000\,\mathrm{cm}/4^4 = 1\,000\,\mathrm{cm}/256 > 1\,\mathrm{cm}$ a po pátém odrazu do výšky $1\,000\,\mathrm{cm}/4^5 = 1\,000\,\mathrm{cm}/1024 < 1\,\mathrm{cm}$. Do výšky alespoň $1\,\mathrm{cm}$ se proto míč odrazí právě 4-krát.

Úloha 31 ... hustý lektvar

Čaroděj Jáchym popadl kus dřeva a nechal ho vznášet na vodě, přičemž si všiml, že ponořeny jsou $3/5$ *jeho objemu. Pak to stejné dřevo nechal plavat v kouzelném lektvaru a zjistil, že ponořeny jsou* $3/4$ *jeho objemu. Jaká je hustota lektvaru?*

Pokud má dřevo hustotu $\rho = m/V$ (m je jeho hmotnost a V objem) a vznáší se v kapalině s hustotou $\rho_\mathrm{k} > \rho$, je vztlaková síla rovna síle tíhové a platí rovnost sil

$$mg = \rho_\mathrm{k} V' g\,, \quad \Rightarrow \quad \rho V\, g = \rho_\mathrm{k} V' g\,, \quad \Rightarrow \quad \frac{V'}{V} = \frac{\rho}{\rho_\mathrm{k}}\,,$$

kde zlomek na levé straně představuje právě část ponořeného objemu.

Z toho přímo plyne, že hustota dřeva je rovna 3/5 hustoty vody, tedy $600\,\mathrm{kg/m^3}$. Současně se tato hustota rovná 3/4 hustoty lektvaru. Ten má proto hustotu $4\cdot\left(600\,\mathrm{kg/m^3}\right)/3 = 800\,\mathrm{kg/m^3}$.

Úloha 32 ... mimozemšťané

Mimozemšťané Alois a Bětka žijí na planetě, která obíhá kolem centrální hvězdy ve směru hodinových ručiček a ve stejném směru taky rotuje. „Mimozemským dnem" mimozemšťané nazývají časový úsek mezi dvěma následujícími západy centrální hvězdy, který trvá 6 hodin. Pokud planeta oběhne centrální hvězdu za 35 mimozemských dní, jak dlouho (v pozemských jednotkách) trvá jedno otočení planety kolem své osy?

Na první pohled by se mohlo zdát, že jedno otočení planety kolem své osy trvá jeden mimozemský den, ale není to tak. Po tom, jak se planeta otočí jednou kolem své osy, nebude vzhledem k okolnímu vesmíru natočena stejně, protože se ještě o kousek pootočí v důsledku svého oběhu kolem centrální hvězdy.

Za jeden mimozemský rok se tato malá pootočení sečtou na celou otočku, tj. v průběhu 35 mimozemských dní se planeta otočí kolem své osy dohromady 36krát (pozorovatelé na planetě ale pořád vidí pouze 35 západů hvězdy).

Protože 35 mimozemských dní je $35\cdot 6\,\mathrm{h} = 210\,\mathrm{h}$, jedno otočení planety trvá $210\,\mathrm{h}/36 = 5\,\mathrm{h}\,50\,\mathrm{min}$.

Úloha 33 ... neustálé násobení

Hanka se posledně rozhodla spočítat, kolik je $2\,019\cdot 2\,019\cdot 2\,019\cdot 2\,019$ a vyšlo jí hodně velké číslo. Výsledek chtěla zjednodušit, a tak sečetla všechny jeho cifry. To bylo pořád velké číslo, takže místo toho sečetla jeho cifry a skončila, až když získala jednociferné číslo. Jaké číslo Hanka dostala?

Klíčové je uvědomit si, že číslo 2 019 je dělitelné třemi ($2\,019 = 3\cdot 673$). Součin čtyř 2 019 je proto dělitelný devíti. Je-li ale číslo dělitelné devíti, pak je i jeho ciferný součet dělitelný devíti. Je-li ale ciferný součet nějakého čísla dělitelný devíti, je devíti dělitelný i ciferný součet tohoto ciferného součtu. Takto bychom mohli pokračovat dokud se nepropracujeme k jednocifernému číslu, které musí být taky dělitelné devíti. Existují dvě taková čísla, a to 0 nebo 9. Nicméně, žádné jiné číslo kromě nuly nemá ciferný součet nula, takže Hanka musela s jistotou dostat číslo 9.

Úloha 34 ... Archimédova koupel

Archimédés dostal od krále za úlohu zjistit, jestli je nová královská koruna vyrobena z čistého zlata, nebo bylo před výrobou zlato smíchané se stříbrem. Archimédés ponořil korunu do vody a zjistil, že její objem je 0,14 l. To samé udělal s hroudou čistého zlata a čistého stříbra stejné hmotnosti, jako byla hmotnost koruny. Zlato mělo objem 0,11 l a stříbro 0,20 l. Protože objem koruny byl větší než objem zlata a menší než objem stříbra, Archimédés vyhlásil, že koruna je zlatá jen zčásti. Jakou část hmotnosti koruny tvořilo zlato?

Uvažme, že zlato tvoří zlomek p hmotnosti koruny, kde p je číslo mezi 0 a 1. Stříbro pak tvoří $1-p$ hmotnosti koruny. Objem zlata v koruně je pak pV_{Au}, kde $V_{\mathrm{Au}} = 0{,}11\,\mathrm{l}$ a podobně je objem stříbra $(1-p)V_{\mathrm{Ag}}$, kde $V_{\mathrm{Ag}} = 0{,}20\,\mathrm{l}$. Součet objemů se musí rovnat objemu koruny $V = 0{,}14\,\mathrm{l}$, takže platí

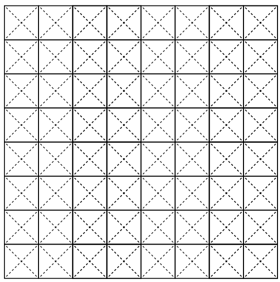
$$V = pV_{\mathrm{Au}} + (1-p)\,V_{\mathrm{Ag}}\,, \quad \Rightarrow \quad p = \frac{V_{\mathrm{Ag}} - V}{V_{\mathrm{Ag}} - V_{\mathrm{Au}}} = \frac{0{,}20\,\mathrm{l} - 0{,}14\,\mathrm{l}}{0{,}20\,\mathrm{l} - 0{,}11\,\mathrm{l}} = \frac{2}{3}\,.$$

Zlato tvoří 2/3 hmotnosti královské koruny.

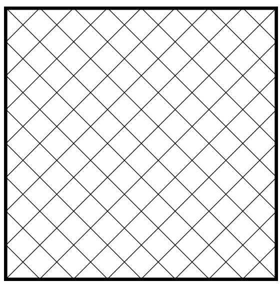
Úloha 35 ... prohnout a stříhat

Terka má čtverec z papíru s rozměry $8\,\mathrm{cm} \times 8\,\mathrm{cm}$. *Dvakrát ho přehne na polovinu, čímž dostane čtverec s rozměry* $4\,\mathrm{cm} \times 4\,\mathrm{cm}$. *Tento postup zopakuje ještě dvakrát, čímž získá čtverec s rozměry* $1\,\mathrm{cm} \times 1\,\mathrm{cm}$. *Nakonec vezme nůžky a čtverec rozstříhá po obou diagonálách. Na kolik kousků se papír rozpadne?*

Pokud by Terka prohnutý papír nerozstříhala, po rozbalení do původního čtverce by stopy po přehýbání vytvořily síť 8×8 čtverečků. Rozstříháním se každý čtvereček rozdělí po diagonálách, viz obrázek.



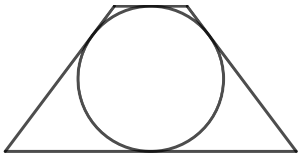
Jelikož to z obrázku není dobře vidět, níže je stejný obrázek, který ale neobsahuje přehnuté hrany.



Zde již lze vidět, že rozstříháním vzniknou dva typy útvarů – čtverce ve vnitřní části papíru a trojúhelníky po jeho okrajích. Můžeme si všimnout, že každý útvar obsahuje právě jednu hranu původní čtverečkové sítě. Těchto hran je (v jednom směru) $8 \cdot 9 = 72$, takže počet všech hran je $2 \cdot 72 = 144$, což je současně i počet kousků, na který se Terce rozpadne papír.

Úloha 36 ... výtvarka

Petra si nakreslila rovnoramenný lichoběžník s rameny dlouhými 5 cm*. Zjistila, že do lichoběžníku lze vepsat kružnici o poloměru* 2 cm*. Jaký musel být obsah Petřina lichoběžníku?*



Kružnici nelze vepsat libovolnému lichoběžníku a proto fakt, že Petřin lichoběžník toto umožňuje, musí znamenat, že má nějaké speciální vlastnosti. Vepsaná kružnice rozdělí každou stranu lichoběžníku na dvě úsečky. Pokud bychom si pro libovolný vrchol nakreslili pouze tyto dvě přiléhající úsečky a kružnici, dostali bychom útvar, který by byl osově symetrický vzhledem k ose úhlu, který ty dvě úsečky svírají. Ze symetrie ale plyne, že tyto dvě úsečky musí mít také stejnou délku!

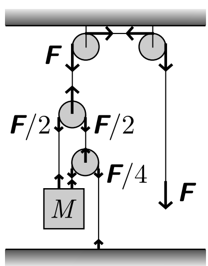
Pokud se zaměříme na dvě protilehlé strany lichoběžníku (ramena nebo základny), zjistíme onu speciální vlastnost. Každá ze čtyř vzniklých úseček (například z ramen) sousedí s úsečkou se stejnou délkou (tvořící základny). Protože délky jednotlivých párů úseček jsou stejně velké, platí, že součet délek protilehlých stran (tj. ramen a základen) je stejný.[1]

Součet délek ramen Petřina (rovnoramenného) lichoběžníku je $2 \cdot 5\,\mathrm{cm} = 10\,\mathrm{cm}$, což je také součet délek jeho základen. To je užitečná informace, neboť součet délek základen, vynásobený výškou lichoběžníku a vydělený dvěma udává jeho obsah. Protože základny lichoběžníku jsou rovnoběžné, je výška (jejich kolmá vzdálenost) stejná jako průměr vepsané kružnice, tedy 4 cm.

Obsah Petřina lichoběžníku je tedy $10\,\mathrm{cm} \cdot 4\,\mathrm{cm}/2 = 20\,\mathrm{cm}^2$.

Úloha 37 ... Bořek stavitel

Bořek stavitel si chtěl usnadnit práci, a proto sestavil kladkostroj, viz obrázek. Bořek ho ihned použil na zvednutí krabice s hmotností 15 kg*. Jakou nejmenší silou* **F** *musí Bořek tahat za lano, aby krabici uzvedl?*



Aby Bořek krabici uzvedl a držel ji bez pohybu, musí být síla působící na krabici alespoň $F_G = 15\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} = 150\,\mathrm{N}$. Jelikož se v tomto případě žádná lana nepohybují, na každý úsek lana musí na jeho koncích působit stejně velké síly opačného směru.

[1] Stejné tvrzení platí i obecněji pro libovolný čtyřúhelník s vepsanou kružnicí.

Síla F, kterou působí Bořek, tak působí i na první pevnou kladku, a stejně tak i na druhou pevnou kladku a na první volnou kladku, viz obrázek. Proti síle o velikosti F na této kladce působí dvě síly v laně. Protože jde o to samé lano, musí mít síla stejnou velikost, a to $F/2$, aby byla celková síla působící na volnou kladku nulová. Jedno z lan působí silou $F/2$ přímo na krabici a druhé ji přenáší na další volnou kladku. Z rovnosti sil na této kladce plyne, že druhé lano působí na krabici silou velkou $F/4$.

Protože výsledná síla, kterou lana působí na krabici, má velikost $F/2 + F/4 = 3F/4$, musí platit, že síla F je alespoň

$$\frac{3F}{4} = F_G\,, \quad \Rightarrow \quad F = \frac{4F_G}{3} = \frac{4 \cdot 150\,\mathrm{N}}{3} = 200\,\mathrm{N}\,.$$

Bořek musí na lano působit silou $200\,\mathrm{N}$.

Úloha 38 . . . oblíbená čísla

Michal vynásobil svoje dvě (různá) oblíbená přirozená čísla a dostal číslo sedmkrát větší, než by by dostal jejich součtem. Jaký je tento součet?

Označme Michalova čísla x a y a řekněme, že $x > y$. Ze zadání plyne rovnice

$$xy = 7(x + y)\,, \quad \Rightarrow \quad xy - 7x - 7y = 0\,.$$

Protože čísla x a y jsou přirozená, bylo by dobré levou stranu rovnice upravit do tvaru součinu dvou členů. Dobrým kandidátem je součin $(x - 7)(y - 7) = xy - 7x - 7y + 49$, což lze použít po tom, když k oběma stranám rovnic přičteme číslo 49:

$$xy - 7x - 7y + 49 = 49\,, \quad \Rightarrow \quad (x - 7)(y - 7) = 49\,.$$

Protože číslo na pravé straně je kladné, musí být obě závorky záporné nebo kladné. x a y jsou nejméně 2 a 1, a tedy záporné závorky nabývají nejvýše $(2 - 7)(1 - 7) = 30$, což je méně než hledaných 49. Obě závorky proto musí mít kladnou hodnotu a jsou to taktéž přirozená čísla.

Číslo 49 lze rozdělit jen jedním způsobem na dva různé přirozené činitele, a to jako $49 \cdot 1$. Dostáváme tedy, že $x - 7 = 49$ a $y - 7 = 1$. To znamená, že $x = 56$ a $y = 8$ a jejich součet je $56 + 8 = 64$.

Úloha 39 . . . ideální

Lukáše lze zidealizovaně popsat jako homogenní krychli se stranou dlouhou $2\,\mathrm{m}$ a hustotou $800\,\mathrm{kg/m^3}$. Z výšky $6\,\mathrm{m}$ (měřené od jeho spodní stěny) padá do jezera, které je naplněno zidealizovanou vodou s nulovou viskozitou. Jaká je největší hloubka (měřena od vrchní stěny), do které se zidealizovaný Lukáš ponoří?

Pokud d označíme hledanou hloubku, krychle změnila svou polohu o $h + d + a$, kde $h = 6\,\mathrm{m}$ je výška, ze které je vypuštěna a $a = 2\,\mathrm{m}$ je délka její hrany. Změnou polohy se změnila potenciální energie krychle o $E = mg(h + d + a)$, kde g je tíhové zrychlení a $m = \rho a^3$ je její hmotnost ($\rho = 800\,\mathrm{kg/m^3}$ je její hustota a a^3 je její objem).

Tato energie se ale neztratila, nýbrž se změnila na potenciální energii vody, kterou krychle vytlačila. Ve finále (kdy je krychle v největší hloubce) je voda o objemu a^3 vytlačena na hladinu jezera z hloubky $h + a/2$, která odpovídá hloubce, ve které je Lukášovo těžiště (a tedy i původní těžiště vytlačené vody).

Změna potenciální energie vytlačené vody je tedy $E' = m'g(d + a/2)$, kde $m' = \rho_\mathrm{v} a^3$ je její hmotnost a ρ_v je její hustota. Uvažujeme-li ideální vodu, energie E a E' se musí rovnat, z čehož plyne

$$E = E', \quad \Rightarrow \quad a^3 \rho g \left(h + d + a\right) = a^3 \rho_\mathrm{v} g \left(d + \frac{a}{2}\right),$$

$$d = \frac{\rho\left(h + a\right) - \rho_\mathrm{v} \frac{a}{2}}{\rho_\mathrm{v} - \rho} = \frac{800\,\mathrm{kg/m^3} \cdot (6\,\mathrm{m} + 2\,\mathrm{m}) - 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot \frac{2\,\mathrm{m}}{2}}{1\,000\,\mathrm{kg/m^3} - 800\,\mathrm{kg/m^3}} = 27\,\mathrm{m}.$$

Lukáš se v zidelizovaném případě ponoří nejvýše do hloubky 27 m. V reálném případě se ale většina energie ztratí působením třecí síly mezi pohybujícím se Lukášem a vodou v jezeře, vznikem vln a vyvržením vody do vzduchu při dopadnutí krychle do vody. Výsledná hloubka bude tedy *mnohem* menší. V reálném případě také Lukáš neváží $\rho a^3 = 6{,}4\,\mathrm{t}$:-).

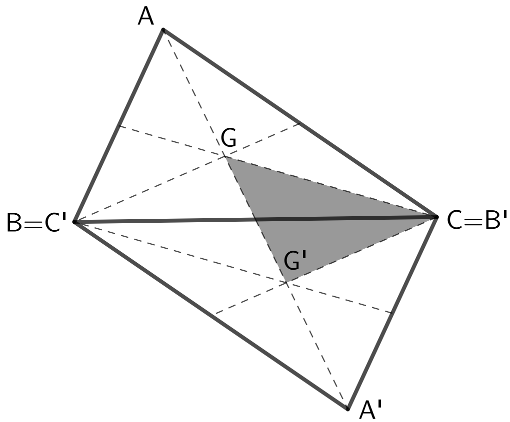
Úloha 40 ... těžnice

Jiří si nakreslil trojúhelník ABC, jehož těžnice mají délky 6 cm, 8 cm *a* 10 cm. *Vypočítejte obsah tohoto trojúhelníku.*

Těžnice trojúhelníku se setkávají v těžišti G, které je dělí v poměru 2 : 1 a delší část se nachází vždy u vrcholu. To také znamená, že těžiště je od dané strany vzdáleno třetinu odpovídající výšky.

Uvažme trojúhelník s vrcholem G a dvěma vrcholy původního trojúhelníku, například BCG, viz obrázek. Tento trojúhelník má výšku na stranu BC dlouhou $v_a/3$, takže jeho obsah je $S_{BCG} = a(v_a/3)/2 = S/3$, kde $S = av_a/2$ je hledaný obsah trojúhelníku ABC.

Navíc vidíme, že trojúhelníkem BCG prochází těžnice, která ho rozděluje na dva menší trojúhelníky se stejnou výškou $v_a/3$ a stejnou základnou $a/2$, tudíž mají stejný obsah $S_{BCG}/2 = S/6$. Vybereme-li na začátku našich úvah trojúhelníky ABG anebo AGC, dospějeme ke stejnému výsledku. Platí tedy, že těžnice rozdělují trojúhelník ABC na 6 částí se stejným obsahem.



Teď trojúhelník zobrazíme středovou souměrností kolem středu strany BC, viz obrázek. V takto rozšířeném nákresu lze najít trojúhelník $GG'C$ (vybarven), který obsahuje 2 trojúhelníky tvořené těžnicemi a jeho obsah je tedy $S_{GG'C} = 2 \cdot S/6 = S/3$. Navíc si ale můžeme všimnout, že jeho strany jsou dlouhé 2/3 délky jednotlivých těžnic, tj. 4 cm, 16/3 cm a 20/3 cm.

Vypočíst obsah tohoto trojúhelníku je o mnoho jednodušší když si všimneme, že délky těžnic (i jejich 2/3 částí) splňují Pythagorovou větu. Trojúhelník $GG'C$ je tak pravoúhlý s odvěsnami s délkami 4 cm a 16/3 cm. Jeho obsah je pak

$$S_{GG'C} = \frac{4\,\mathrm{cm} \cdot \frac{16}{3}\,\mathrm{cm}}{2} = \frac{32}{3}\,\mathrm{cm}^2\,, \quad \Rightarrow \quad S = 3S_{GG'C} = 32\,\mathrm{cm}^2\,.$$

Obsah Jiřího trojúhelníku je $32\,\mathrm{cm}^2$.

Úloha 41 ... běžecký okruh

Ondřej a Míša běhají na okruhu sportovního stadionu, Ondřej přitom běhá o něco rychleji než Míša. Vystartovali ze stejného místa stejným směrem a po 420 s se opět setkali. Potom se rozběhli každý opačným směrem a setkali se po 70 s. O kolik sekund déle trvá Míše uběhnout jedno kolo než Ondřejovi?

Označme T_O čas, za který Ondřej zaběhne jedno kolo, T_M čas, za který Míša zaběhne jedno kolo, a s délku jednoho kola. Rychlost Ondřeje v_O je rovna s/T_O a rychlost Míši v_M je s/T_M. Když běží stejným směrem, tak se pohybují vzájemnou rychlostí $v_1 = v_\mathrm{O} - v_\mathrm{M}$. Jejich vzájemná vzdálenost (ve směru běhu) dosáhne délky s po čase $t_1 = 420\,\mathrm{s}$, můžeme tedy psát $v_1 = s/t_1$. Srovnáním těchto vztahů dostaneme

$$\frac{s}{t_1} = \frac{s}{T_\mathrm{O}} - \frac{s}{T_\mathrm{M}}\,.$$

Po vydělení dráhou s, která se vyskytuje ve všech členech, máme

$$\frac{1}{t_1} = \frac{1}{T_\mathrm{O}} - \frac{1}{T_\mathrm{M}}\,.$$

Když běží Ondřej a Míša opačnými směry, tak se vůči sobě pohybují rychlostí $v_2 = v_\mathrm{O} + v_\mathrm{M}$. Podobně jako v předešlém případě vyjádříme $v_2 = s/t_2$ a srovnáním výrazů dostaneme

$$\frac{1}{t_2} = \frac{1}{T_\mathrm{O}} + \frac{1}{T_\mathrm{M}}\,.$$

Získali jsme tak dvě rovnice s neznámými T_O a T_M. Sečtením těchto rovnic dostaneme

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = \frac{2}{T_\mathrm{O}}\,, \quad \Rightarrow \quad T_\mathrm{O} = \frac{2t_1 st_2}{t_1 + t_2}\,.$$

Podobně můžeme obě rovnice navzájem odečíst a vyjádřit z nich čas T_M jako

$$T_\mathrm{M} = \frac{2t_1t_2}{t_1 - t_2}\,.$$

Z těchto vztahů snadno dopočteme, že $T_\mathrm{O} = 120\,\mathrm{s}$ a $T_\mathrm{M} = 168\,\mathrm{s}$. Z toho vyplývá, že Míša zaběhne jedno kolo o $T_\mathrm{M} - T_\mathrm{O} = 48\,\mathrm{s}$ pomaleji než Ondřej.

Úloha 42 ... šachový turnaj

Šachového turnaje se zúčastnilo 13 šachistů. Každý hrál s každým právě jednou. Po odehrání všech partií zjistili, že každý šachista 6krát vyhrál a 6krát prohrál. Ani jedna partie neskončila remízou. Kolika způsoby lze vybrat trojici šachistů tak, aby každý šachista vyhrál právě s jedním z ostatních v této trojici?

Podívejme se nejdříve na to, jak mohou vypadat trojice šachistů. Existují dva typy. Prvním typem trojice je taková trojice, která plní podmínku ze zadání, že každý vyhrál nad někým z této trojice právě jednou. Druhý typ je takový, kde někdo z trojice vyhrál nad zbylými dvěma šachisty, někdo nad jedním šachistou a někdo nad nikým. Žádné jiné trojice vzniknout nemohou, protože šachisti v každé trojici spolu hráli právě jednou a v každé partii byl jeden vítěz. Proto pokud chceme spočítat počet trojic, ve kterých každý šachista vyhrál právě jednou, můžeme spočítat počet všech trojic šachistů a od něj odečítat počet takových trojic, ve kterých někdo vyhrál dvakrát.

Začneme jednodušší částí – vypočítáme počet všech trojic šachistů. Při výběru trojice si prvního vybíráme ze 13, druhého z 12 a třetí z 11 šachistů. Dohromady tak budeme mít $13 \cdot 12 \cdot 11$ možností, jak trojici vybrat. Všimněme si, že pokud se podíváme na nějakou konkrétní trojici šachistů, tak jsme ji započítali vícekrát – uvažujeme totiž i pořadí šachistů v dané trojici, které nás ale v naší úloze nezajímá. Celkový počet možností, který jsme dostali, proto musíme ještě dělit počtem způsobů, jak se šachisti v této trojici mohou seřadit. Na první místo můžeme dát kteréhokoliv z 3 šachistů v trojici, na druhé místo kteréhokoliv ze zbylých 2 a na poslední místo dáme jednoznačně posledního a na to máme 1 možnost. Dohromady je můžeme seřadit $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ způsoby, a proto je počet všech trojic šachistů roven $13 \cdot 12 \cdot 11/6 = 286$.

Dále vypočítejme počet trojic šachistů, v nichž někdo vyhrál dvakrát. Lze to provést například tak, že pro nějakého šachistu nalezneme trojici, ve které vyhrál dvakrát. Pokud chceme takového šachistu najít, musíme vybrat dva ze šesti lidí, které v celém turnaji porazil. Prvního do dvojice můžeme vybrat 6 způsoby a druhého 5 způsoby. Protože nám nezáleží na tom, v jakém pořadí vybereme osoby v nějaké dvojici, tak tento počet ještě vydělíme dvěma. Dostaneme potom, že každý šachista, který vyhrál právě dvakrát nad ostatními v trojici, je v $6 \cdot 5/2 = 15$ trojicích. Tento počet vynásobíme počtem šachistů účastnících se turnaje, tj. $13 \cdot 15 = 195$.

Zbývá jen dopočítat počet trojic, ve kterých každý vyhrál právě jednou. Jak jsme výše psali, všechny trojice se dají rozdělit na trojice, ve kterých každý vyhrál právě jednou, a na trojice, ve kterých někdo vyhrál dvakrát. Proto je počet trojic, ve kterých každý šachista vyhrál právě jednou, rovný $286 - 195 = 91$.

Náboj Junior 2019

Bánovce nad Bebravou – Gymnázium Janka Jesenského • **Banská Bystrica** – Gymnázium Andreja Sládkoviča • **Białystok** – Liceum Ogólnokształcące Politechniki Białostockiej • **Bielsko-Biała** – V Liceum Ogólnokształcące • **Bratislava** – UPeCe sv. Jozefa Freinandemetza • **Brezno** – Gymnázium Jána Chalupku • **Brno** – Gymnázium Matyáše Lercha • **Bytča** – Gymnázium Bytča • **Česká Lípa** – Gymnázium Žitavská • **České Budějovice** – Gymnázium Jírovcova • **Frýdlant nad Ostravicí** – Gymnázium Frýdlant • **Grodzisk Mazowiecki** – Szkoła Podstawowa nr 5 im. Leonida Teligi • **Hlohovec** – Gymnázium Ivana Kupca • **Hradec Králové** – Univerzita Hradec Králové, Přírodovědecká fakulta • **Kadaň** – Sluníčková základní škola Kadaň • **Karlovy Vary** – První české gymnázium v Karlových Varech • **Košice** – Gymnázium Alejová • **Kraków** – Uniwersytet Jagielloński, Wydział Matematyki i Informatyki • **Krosno** – I Liceum Ogólnokształcące im. Mikołaja Kopernika • **Levice** – Gymnázium Andreja Vrábla • **Liberec** – Doctrina – Podještědské gymnázium • **Liptovský Mikuláš** – Gymnázium Michala Miloslava Hodžu • **Łódź** – I Liceum Ogólnokształcące im. Mikołaja Kopernika • **Lučenec** – CVČ Magnet • **Michalovce** – Gymnázium Pavla Horova • **Námestovo** – Gymnázium Antona Bernoláka • **Nitra** – Gymnázium Párovská • **Olomouc** – Gymnázium Olomouc-Hejčín • **Ostrava** – Gymnázium Olgy Havlové • **Pardubice** – Gymnázium Dašická • **Partizánske** – Dom kultúry • **Piešťany** – Gymnázium Pierra de Coubertina • **Písek** – SPŠ a VOŠ Písek • **Plzeň** – Gymnázium Mikulášské náměstí • **Poprad** – Gymnázium Kukučínova • **Praha** – Gymnázium Voděradská • **Praha** – Gymnázum Christiana Dopplera • **Prešov** – Gymnázium Jána Adama Raymana • **Prievidza** – Gymnázium Vavrinca Benedikta Nedožerského • **Púchov** – Gymnázium Púchov • **Šahy** – Gymnázium Mládežnícka • **Sokolov** – Gymnázium a KVC Sokolov • **Sosnowiec** – IV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica • **Sučany** – Bilingválne gymnázium Milana Hodžu • **Šurany** – Gymnázium Bernolákova • **Tarnów** – III Liceum Ogólnokształcące im. Adama Mickiewicza • **Třebíč** – Katolické gymnázium • **Trenčín** – Gymnázium Ľudovíta Štúra • **Trnava** – UPeCe sv. Stanislava Kostku • **Trstená** – Gymnázium Martina Hattalu • **Ústí nad Labem** – Univerzita Jana Evangelisty Purkyně, Fakulta sociálně ekonomická • **Warszawa** – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica • **Wrocław** – Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu • **Zlín** – Gymnázium Zlín-Lesní čtvrť

Náměty úloh

Marián Poturnay • Patrik Švančara • Radek Kusek • Marek Murin

Autoři zadání a řešení úloh

Marián Poturnay • Matej Hrmo • Daniel Onduš • Lukáš Gáborik • Jakub Parada • Marek Murin

Překladatelé

Andrzej Komisarski • Radek Kusek • Kamil Rychlewicz • Beata Czernecka • Marián Poturnay • Sabína Samporová • Marcel Palaj • Daniel Onduš • Lukáš Gáborik • Matej Hrmo • Miroslav Hanzelka • Kateřina Stodolová • Patrik Švančara

Recenzenti

Marián Poturnay • Matej Hrmo • Daniel Onduš • Lukáš Gáborik • Marek Murin • Veronika Paulinyová • Radek Kusek • Ela Vojtková • Jakub Parada