NÁBOJ junior

8 edycja

2019/20

Rozwiązania

výfuk

UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI W KRAKOWIE

Zadanie 1 ... problemy ludzi bogatych

W krainie Nábojowo walutą są náboje. Występują one w postaci banknotów o dziewięciu nominałach: 1 *náboj,* 10 *náboi,* 100 *náboi,* 1 000 *náboi,* 10 000 *náboi,* 100 000 *náboi,* 1 000 000 *náboi,* 10 000 000 *náboi oraz* 100 000 000 *náboi. Krzysiek ma po jednym banknocie z każdego nominału. Ile wynosi średnia arytmetyczna wartości wszystkich banknotów, które ma Krzysiek?*

Średnia arytmetyczna liczb jest równa sumie tych liczb podzielonej przez ich liczbę. Średnią arytmetyczną wartości banknotów Krzyśka można obliczyć dzieląc sumę wartości poszczególnych banknotów (czyli 111 111 111) przez ich liczbę (9). Średnia ta wynosi $111\,111\,111/9 = 12\,345\,679$.

Rachunki można uprościć zapisując wartości poszczególnych banknotów następująco: $1 = 1$, $10 = 9 + 1$, $100 = 99 + 1$, $\ldots$, $100\,000\,000 = 99\,999\,999 + 1$. Wówczas suma ich wartości to $9 + 99 + 999 + \cdots + 99\,999\,999 + 9 \cdot 1$. Dzieląc tę sumę przez liczbę banknotów (9) dostajemy szukaną średnią arytmetyczną, która wynosi $1 + 11 + 111 + \cdots + 11\,111\,111 + 1 = 12\,345\,679$.

Zadanie 2 ... poranna rozgrzewka

Beata spóźniła się na autobus do szkoły. Spodziewała się tego, więc ubrała sportowe buty. Z przystanku autobusowego do szkoły jest 1 *kilometr, a Beata zaczyna zajęcia za* 5 *minut. Z jaką najmniejszą średnią prędkością musi biec Beata, żeby się nie spóźnić na zajęcia?*

Średnia prędkość to stosunek całkowitej przebytej trasy oraz czasu, w którym została ona pokonana. W tym przypadku (by się nie spóźnić) Beata musi przebiec 1 kilometr w 5 minut. Obliczymy prędkość Beaty w kilometrach na godzinę. Wiemy, że pięć minut to jedna dwunasta godziny. Oznacza to, że jeżeli Beata przebiegnie 1 kilometr w 5 minut, to w ciągu dwunastu takich 5 minutowych odcinków przebiegnie 12 kilometrów. Oznacza to, że biegła ze średnią prędkością $12\,\mathrm{km/h}$

Zadanie 3 ... remont pokoju

Kasia postanowiła pomalować ścianę w swoim pokoju. Ściana ma $2{,}5\,\mathrm{m}$ *wysokości i* $6\,\mathrm{m}$ *szerokości. Pomalowanie jednego metra kwadratowego ściany zajmuje dokładnie* 2 *minuty. Jak długo Kasia będzie malować ścianę?*

Najpierw musimy policzyć, jak duży obszar musi pomalować Kasia. Jest to $2{,}5\,\mathrm{m} \cdot 6\,\mathrm{m} = 15\,\mathrm{m}^2$. Wiedząc, że pomalowanie $1\,\mathrm{m}^2$ zajmuje jej dwie minuty, dostajemy, że pomalowanie całej ściany zajmie jej $15 \cdot 2\,\mathrm{min} = 30\,\mathrm{min}$.

Zadanie 4 ... wykreślanka

Wykreślanka to zabawa, w której szuka się słów w tabeli kwadracików. Każdy kwadracik z tabeli ma wpisaną jedną literę. Słowo może być wpisane w dowolnym z 8 kierunków. Na ile sposobów można wpisać słowo NABOJ w tabeli o wymiarach 5×5*? Obrazek pokazuje kilka z nich.*

J				
O				
B				
A				
N				

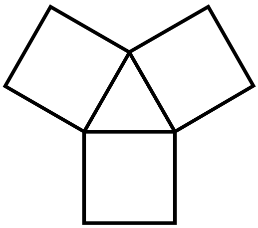
N	A	B	O	J

				N
			A	
		B		
	O			
J				

Jeśli jest możliwe umieszczenie słowa w pewnym kierunku, to jest również możliwe umieszczenie w przeciwnym kierunku. Z tego wynika, że możemy ograniczyć się do 4 kierunków – dwóch po przekątnej, jednego pionowego i jednego poziomego. Ostateczny wynik będzie jednak dwukrotnie większy. Są dwie przekątne – z prawego górnego kwadraciku do dolnego lewego oraz z lewego górnego do prawego dolnego. Stąd są $2 \cdot 2 = 4$ sposoby na wpisanie słowa *NABOJ* na przekątnej (liczymy tutaj również przeciwne kierunki). W kierunku pionowym jest 5 sposobów i w kierunku poziomym jest 5 sposobów. Razem z przeciwnymi kierunkami jest ich $2 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = 20$. Liczba wszystkich możliwych sposobów wpisania słowa *NABOJ* w wykreślankę wynosi $4 + 20 = 24$.

Zadanie 5 ... Łukasz artysta

Łukasz narysował trójkąt równoboczny o boku długości 6 cm. *Następnie narysował trzy kwadraty, tak jak na rysunku. Jaki jest obwód figury narysowanej przez Łukasza?*



Wszystkie trzy kwadraty mają wspólny bok z wewnętrznym trójkątem równobocznym. Długość boku tego trójkąta wynosi 6 cm, więc długość boku każdego kwadratu również musi być równa 6 cm. Dla każdego narysowanego kwadratu, trzy spośród jego boków wliczane są do obwodu figury. Dla każdego kwadratu łączna ich długość wynosi $3 \cdot 6\,\text{cm} = 18\,\text{cm}$. Ponieważ są trzy takie kwadraty, to obwód całej figury wynosi $3 \cdot 18\,\text{cm} = 54\,\text{cm}$.

Zadanie 6 ... czekając na zdjęcie

Marcel zrobił zdjęcie i chciałby je wysłać Ninie przez Internet. Plik ze zdjęciem ma wielkość 5*MB. Zarówno Marcel, jak i Nina używają połączenia z Internetem, które zapewnia transfer danych o szybkości* 0.5*MB/s (wysyłanie/upload) oraz* 1*MB/s (pobieranie/download). Plik ze zdjęciem musi być w całości przesłany przez Marcela, zanim Nina zacznie go ściągać. Po jakim czasie od rozpoczęcia przesyłania zdjęcia przez Marcela trafi ono w całości do Niny?*

Szybkość transferu to wielkość, która mówi o ilości danych, która jest przesyłana w jednostce czasu. Jeśli szybkość wysyłania danych (upload) wynosi 0.5MB/s, to w ciągu każdej sekundy można wysłać 0.5MB danych. W przypadku zdjęcia Marcela (o wielkości 5MB), 0.5MB stanowi jedną dziesiątą jego rozmiaru. Oznacza to, że wysłanie zdjęcia zajmie 10 sekund. Podobnie jest, gdy Nina pobiera dane (na przykład zdjęcie). Ponieważ szybkość pobierania (download) wynosi 1MB/s, to zdjęcie o rozmiarze 5MB zostanie pobrane w ciągu 5 sekund. Jeśli Nina rozpocznie ściąganie zdjęcia dokładnie w chwili, gdy Marcel zakończy je wysyłać, to łączny czas przesyłu wyniesie $10 + 5 = 15$ sekund.

Zadanie 7 ... zakłamane zdania

Radek znalazł kawałek papieru, na którym były napisane różne zdania, z których każde miało numer.

1) Jest tylko jedna liczba całkowita, która pomnożona przez siebie daje wynik 4.

10) Średnia arytmetyczna dwóch liczb całkowitych nigdy nie jest większa od obu tych liczb.

100) Jeśli liczba całkowita jest podzielna przez cztery, to jest również podzielna przez 2.

1000) Każda liczba pierwsza jest nieparzysta.

10000) Jeżeli a, b, c są liczbami całkowitymi, takimi że $a < b$ i $b < c$, to wtedy również $a < c$.

Jaka jest suma numerów zdań prawdziwych?

Rozstrzygnijmy które zdania są prawdziwe, a które nie.

1) To zdanie nie jest prawdziwe, gdyż są dwie takie liczby, 2 i -2.

10) To zdanie jest prawdziwe, ponieważ średnia arytmetyczna dwóch liczb zawsze jest pomiędzy tymi liczbami (gdy są różne) lub jest równa im obu (gdy są one równe). Natomiast nigdy nie jest większa od obu.

100) To zdanie jest prawdziwe, ponieważ jeśli liczba jest podzielna przez 4, to liczba 2 w rozkładzie na czynniki pierwsze występuje co najmniej dwukrotnie, a więc liczba musi być podzielna przez 2.

1000) To zdanie nie jest prawdziwe, bo 2 jest parzystą liczbą pierwszą.

10000) To zdanie jest prawdziwe, gdyż jeśli zaczniemy od jakiejś liczby, weźmiemy większą liczbę i następnie znowu weźmiemy większą liczbę, otrzymamy liczbę, która jest większa od liczby od której zaczęliśmy.

Podsumowując zdania prawdziwe mają numery 10, 100 i 10000. Sumą tych liczb jest 10110.

Zadanie 8 ... oporny problem

Krecik bawił się trzema opornikami o oporach 1Ω, 2Ω oraz 3Ω. Ile wynosi największy opór, jaki mógł uzyskać używając tylko tych trzech oporników oraz drutu o dowolnej długości i zerowym oporze?

Jeśli połączymy oporniki szeregowo, wówczas uzyskamy łącznie $1\Omega + 2\Omega + 3\Omega = 6\Omega$. Jest to największy opór, jaki można uzyskać za pomocą tych trzech oporników. Wynika to stąd, że jeśli niektóre z oporników były połączone równolegle, wówczas możemy zwiększyć opór układu zamieniając ich połączenie na połączenie szeregowe. Istotnie, rozpatrzmy połączenie równoległe dwóch części (podukładów) całego układu oporników (gdyby to połączenie obejmowało więcej, niż dwa podukłady, to i tak możemy je rozważać jako połączenie dwóch podukładów, traktując jeden z tych podukładów oddzielnie, a wszystkie pozostałe łącznie). Jeśli opór zastępczy jednego podukładu wynosi R_1, a drugiego R_2, wówczas łączny opór obu tych podukładów połączonych równolegle wynosi

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}.$$

W przypadku połączenia szeregowego uzyskalibyśmy $R^{\cdot} = R_1 + R_2$. Zatem powinniśmy udowodnić, że

$$R_1 + R_2 > \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}.$$

Po kilku przekształceniach dostajemy, że nierówność ta jest równoważna następującej

$$R_1^2 + R_1 \cdot R_2 + R_2^2 > 0.$$

Z kolei ta nierówność zachodzi zawsze, gdyż jej lewą stronę stanowi suma trzech liczb dodatnich. W konsekwencji, zamiana wszystkich części układu oporników (lub pojedynczych oporników) połączonych równolegle na te same części połączone szeregowo zwiększa opór całego układu. Również w naszym zadaniu najkorzystniej jest połączyć oporniki szeregowo. Zatem opór całkowity 6Ω istotnie jest największym oporem, jaki można uzyskać.

Zadanie 9 ... kolejka na granicy

Na przejściu granicznym stoi kolejka samochodów. W ciągu godziny kraj opuszcza 300 *samochodów. Strażnik graniczny Piotr siedzi w swoim biurze i obserwuje auta. Średnio co ile sekund Piotr widzi samochód opuszczający kraj?*

W ciągu godziny kraj opuszcza 300 samochodów. Oznacza to, że w ciągu każdej minuty $300/60 = 5$ samochodów przejeżdża przez granicę, co jest równoważne z 5 samochodami w ciągu 60 sekund. Średnio auto przejeżdża przez granicę co $60/5 = 12$ sekund. Piotr widzi więc samochód opuszczający kraj co 12 sekund.

Zadanie 10 ... pomyśl liczbę

Ania pomyślała o trzech liczbach. Suma tych liczb wynosi 20. *Pierwsza z liczb jest cztery razy większa od sumy dwóch pozostałych, a druga jest siedem razy większa od trzeciej. Ile wynosi iloczyn liczb pomyślanych przez Anię?*

Wiemy, że pierwsza liczba jest czterokrotnie większa od sumy pozostałych liczb, więc możemy podzielić sumę wszystkich liczb na pięć takich samych części. Cztery części należą do pierwszej liczby, a piąta część jest sumą drugiej i trzeciej liczby. Zatem pierwsza liczba to $20 \cdot 4/5 = 16$. Suma drugiej i trzeciej liczby wynosi wtedy $20/5 = 4$.

Wiemy również, że druga liczba jest siedem razy większa niż trzecia liczba. Musimy podzielić sumę tych liczb na osiem takich samych części. Siedem z nich należy do drugiej liczby, jedna część do trzeciej. Wartość drugiej liczby to $4 \cdot 7/8 = \frac{7}{2}$, a trzecia liczba to $4/8 = \frac{1}{2}$.

Iloczyn liczb pomyślanych przez Anię wynosi $16 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{2} = 28$.

Zadanie 11 ... huśtawka

Dwoje dzieci bawi się na huśtawce. Chłopiec o masie $m_1 = 50\,\mathrm{kg}$ *siedzi po jednej stronie huśtawki w odległości* $r_1 = 0{,}6\,\mathrm{m}$ *od środka. Dziewczynka o masie* $m_2 = 40\,\mathrm{kg}$ *siedzi tak, że mogą się razem huśtać. Jaka jest odległość między chłopcem a dziewczynką?*

Gdyby dziewczynka siedziała po tej samej stronie huśtawki, co chłopiec, to nie mogliby się huśtać, więc muszą siedzieć po przeciwnych stronach. Warunek, aby mogli się huśtać jest taki, że momenty siły ich obojga są równe. Moment siły chłopca to $M_1 = m_1 g r_1$, a moment siły dziewczynki to $M_2 = m_2 g r_2$, gdzie r_2 jest jej odległością od środka huśtawki. Z warunku, że oba są równe, powinno zachodzić, że

$$m_1 g r_1 = m_2 g r_2 .$$

Po podzieleniu przez g, otrzymujemy równanie równoważne

$$m_1 r_1 = m_2 r_2 .$$

Szukamy r_2, więc przekształcamy równość do

$$r_2 = \frac{m_1}{m_2} r_1 .$$

Odległość dziewczynki od środka huśtawki to $r_2 = 0{,}75\,\mathrm{m}$. Jednakże po przeciwnej stronie środka huśtawki jest chłopiec w odległości $r_1 = 0{,}6\,\mathrm{m}$. Otrzymujemy, że odległość między chłopcem a dziewczyną wynosi $r_1 + r_2 = 0{,}6\,\mathrm{m} + 0{,}75\,\mathrm{m} = 1{,}35\,\mathrm{m}$.

Zadanie 12 ... bukiet

Dawid chce kupić bukiet kwiatów jako prezent urodzinowy dla Weroniki. Ma on w portfelu 23 *zł. Róża kosztuje* 1 *zł, a lilia* 2 *zł. Na ile różnych sposobów Dawid może skomponować bukiet, wydając wszystkie pieniądze? Bukiety uznajemy za różne, jeśli różnią się liczbą róż i liczbą lilii.*

Każda róża kosztuje 1 zł. W związku z tym, jeśli Dawid zdecyduje się na kupno pewnej liczby lilii, może on wydać wszystkie pozostałe pieniądze na róże. W związku z tym, kompozycja bukietu jest równoważna wyborowi liczby zakupionych lilii. Musimy policzyć więc, ile jest możliwych wyborów liczby lilii w bukiecie. Najmniejsza możliwa liczba lilii to 0, zaś największa to 11 (Dawid nie może kupić 12 lilii, ponieważ kosztowałoby go to 24 zł). Dawid może kupić dowolną liczbę lilii nie mniejszą niż 0 i nie większą niż 11. To oznacza, że jest 12 możliwych liczb lilii w bukiecie

Zadanie 13 ... prawie-pełny basen

Jakub ma w domu dużo pojemników o różnych objętościach. Ma małą szklankę o objętości $0{,}5\,\mathrm{dl}$*, szklankę o objętości* $300\,\mathrm{cm}^3$*, słoik o objętości* $0{,}5\,\mathrm{dm}^3$*, dzbanek o objętości* $1\,\mathrm{l}$ *i garnek o objętości* $0{,}05\,\mathrm{hl}$*. Napełnił wszystkie te pojemniki* 100 *razy i przelał całą wodę do początkowo pustego basenu o objętości* $0{,}8\,\mathrm{m}^3$*. Ile jeszcze litrów wody musi dolać, aby basen był pełny?*

Przeliczmy objętości wszystkich pojemników na litry, ponieważ odpowiedź jest wymagana w litrach. Pamiętajmy przy tym, że $1\,\mathrm{l}$ jest równe $1\,\mathrm{dm}^3$.

- Mała szklanka ma objętość $0{,}5\,\mathrm{dl} = 0{,}05\,\mathrm{l}$.

- Szklanka ma objętość $300\,\mathrm{cm}^3 = 0{,}3\,\mathrm{l}$.
- Słoik ma objętość $0{,}5\,\mathrm{dm}^3 = 0{,}5\,\mathrm{l}$.
- Dzbanek ma objętość $1\,\mathrm{l}$.
- Garnek ma objętość $0{,}05\,\mathrm{hl} = 5\,\mathrm{l}$.

Jeśli Jakub napełnił każdy z tych pojemników i wlał do basenu, wlał łącznie

$$0{,}05\,\mathrm{l} + 0{,}3\,\mathrm{l} + 0{,}5\,\mathrm{l} + 1\,\mathrm{l} + 5\,\mathrm{l} = 6{,}85\,\mathrm{l}.$$

Jeśli zrobił to 100 razy, wlał łącznie $100 \cdot 6{,}85\,\mathrm{l} = 685\,\mathrm{l}$ wody do basenu. Basen ma objętość $0{,}8\,\mathrm{m}^3 = 800\,\mathrm{l}$. Aby basen był pełny Jakub musi wlać do niego jeszcze $800\,\mathrm{l} - 685\,\mathrm{l} = 115\,\mathrm{l}$ wody.

Zadanie 14 ... frisbee w parku

Ela i Michał spędzają czas rzucając frisbee w parku. W pewnym momencie stali oni w odległości $90\,\mathrm{m}$ *od siebie. Ela rzuciła wtedy frisbee do Michała z prędkością* $36\,\mathrm{km/h}$. *Dysk poruszał się ruchem jednostajnym. W tym samym momencie Michał zaczął biec w kierunku Eli ze stałą prędkością i złapał dysk po 6 sekundach, od momentu, gdy Ela go rzuciła. Z jaką prędkością biegł Michał?*

Zacznijmy od zapisania prędkości frisbee w metrach na sekundę. Prędkość $36\,\mathrm{km/h}$ to dokładnie $10\,\mathrm{m/s}$. Aby w ciągu 6 sekund złapać frisbee, początkowo odległe o $90\,\mathrm{m}$, Michał musiał zbliżać się do niego z prędkością $90\,\mathrm{m}/6\,\mathrm{s} = 15\,\mathrm{m/s}$. Ponieważ frisbee poruszało się w kierunku Michała, to prędkość zbliżania się Michała do frisbee (która musiała być równa $15\,\mathrm{m/s}$) jest równa sumie prędkości Michała i prędkości frisbee. Ponieważ zaś prędkość frisbee wynosiła $10\,\mathrm{m/s}$, to Michał musiał biec z prędkością $15\,\mathrm{m/s} - 10\,\mathrm{m/s} = 5\,\mathrm{m/s}$.

Zadanie 15 ... szybkie mnożenie w szybkim pociągu

Maciek jechał pociągiem i znudzony podróżą postanowił obliczyć iloczyn $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 2017 \cdot 2019$. *Iloma zerami kończy się uzyskany przez Maćka poprawny wynik (zapisany w systemie dziesiętnym)?*

Zobaczmy, czy zapis dziesiętny uzyskanego przez Maćka iloczynu może kończyć się choćby jednym zerem. Gdyby tak było, to iloczyn ten byłby podzielny przez 10. W szczególności byłby parzysty. Jednak w mnożeniu Maćka występują tylko czynniki nieparzyste. Oznacza to, że uzyskany iloczyn również jest nieparzysty. Zatem jego zapis dziesiętny nie kończy się zerem.

Zadanie 16 ... podróż

Karolina pojechała autem z domu na wsi do miasta, aby zobaczyć film w kinie. W czasie podróży pokonała 5 razy większy dystans drogi wiejskiej, niż drogi miejskiej. Po wiejskich drogach jechała 3 razy szybciej niż po drogach miejskich. Przejazd drogą miejską zajął jej 30 minut. Ile czasu spędziła jadąc po wiejskich drogach?

Karolina pokonała miejskie drogi w ciągu 30 minut. Gdyby jej prędkość była taka sama jak na drogach wiejskich (czyli trzy razy większa), to jechałaby trzy razy szybciej, czyli pokonałaby tą samą trasę w ciągu 10 minut. Karolina jechała z taką prędkością po wiejskich drogach 5 razy dłużej, czyli czas przejazdu trasy jest 5 razy dłuższy. Oznacza to, że Karolina pokonała wiejskie drogi w 50 minut.

Zadanie 17 ... kołowe rozmowy

Dwanaście osób stało w kółku. Każda z nich powiedziała trzy zdania:

1. *„Mieszkam w Polsce".*
2. *„Osoba po mojej lewej stronie mieszka w Czechach".*
3. *„Co najmniej jedna osoba stojąca obok mnie mieszka w Polsce, Czechach lub na Słowacji".*

Potem zdali sobie sprawę, że tylko 2 *ze wszystkich* 36 *zdań były prawdziwe. Ile osób mieszka na Słowacji?*

Gdyby w kółku była osoba z Polski to co najmniej jedno pierwsze zdanie byłoby prawdziwe. Wtedy obie osoby stojące obok niej także mówiły prawdę wypowiadając trzecie zdanie. To oznaczałoby, że co najmniej 3 zdania byłyby prawdziwe. To oznacza, że żadna z osób stojących w kółku nie mieszka w Polsce.

Gdyby w kółku była osoba z Czech, osoba po jej prawej stronie powiedziałaby prawdziwe zdanie (drugie zdanie).Wtedy obie osoby stojące obok niej mówiłyby prawdę, mówiąc trzecie zdanie. Ponownie, co najmniej 3 zdania byłyby prawdziwe. Oznacza to, że żadna z osób stojących w kole nie mieszka w Czechach.

Gdyby w kółku stała osoba ze Słowacji to oznaczałoby, że dwa zdania są prawdziwe. Byłyby one wypowiedziane przez osoby stojące po jego lewej i prawej.

Gdyby jeszcze inna osoba była ze Słowacji to oznaczałoby, że dochodzą kolejne prawdziwe zdania, a wtedy będzie ich za dużo. Dodanie osób innych narodowości nie zmienia ilości prawdziwych zdań.

Czyli przypadek, że dokładnie dwa wypowiedziane zdania są prawdziwe zachodzi, gdy w kółku stoi dokładnie jeden Słowak, a pozostałe osoby są innej narodowości i nie są to ani Polacy, ani Czesi.

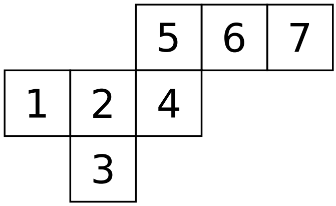
Zadanie 18 ... karty

Karol ma 4 *karty. Na każdej jest napisana liczba. Karol zsumował liczby z każdej pary kart i wypisał je. Trzy razy otrzymał liczbę* 14 *i trzy razy otrzymał liczbę* 12*. Jaka jest suma liczb na wszystkich kartach?*

Jeśli policzymy sumę wszystkich sześciu otrzymanych wyników, liczba z każdej karty zostanie dodana trzykrotnie do końcowej sumy, gdyż każda karta tworzy parę razem z każdą z pozostałych trzech kart. Dlatego otrzymamy wynik trzykrotnie większy od sumy wszystkich liczb na kartach. Dlatego suma liczb na kartach Karola wynosi $(3 \cdot 14 + 3 \cdot 12)/3 = 26$.

Zadanie 19 ... powierzchnia sześcianu

Jurek wyciął z papieru pokazany na rysunku fragment, z którego złożył sześcian. Okazało się jednak, że wycięty przez Jurka fragment zawiera o jeden kwadrat za dużo. W związku z tym Jurek chce odciąć jeden z kwadratów tak, by reszta wycinanki pozostała w jednym kawałku i by dało się z niej złożyć sześcian. Znajdź wszystkie możliwe kwadraty, które Jurek może odciąć.



Gdyby Jurek wyciął którykolwiek z kwadratów 2, 4, 5 lub 6, powierzchnia nie byłaby już w jednym kawałku. W związku z tym może on usunąć jedynie kwadrat 1, kwadrat 3 lub kwadrat 7. Zauważmy, że przy próbie złożenia sześcianu, kwadrat 1 musi znaleźć się naprzeciwko kwadratu 4, zaś kwadrat 2 musi znaleźć się naprzeciwko kwadratu oznaczonego 6. Co więcej, kwadrat 7 musi znaleźć się naprzeciwko kwadratu 5 – ale jednocześnie kwadrat 5 musi znaleźć się naprzeciwko kwadratu 3. Ponieważ jest tylko jeden kwadrat 5, to musimy odciąć kwadrat 3 lub kwadrat 7. Zauważmy, że po usunięciu dowolnego z nich, z pozostałej powierzchni będziemy mogli złożyć sześcian. W związku z tym możemy odciąć dowolny spośród kwadratów 3, 7.

Zadanie 20 ... ciężkie doświadczenie

Naukowcy w Nabojowicach przeprowadzili następujący eksperyment: wzięli żelazną kulę z dziurą o powierzchni $10\,\mathrm{cm}^2$, *a następnie włożyli do niej ciężarek, który idealnie pasował do kształtu dziury. Następnie wytworzyli próżnię wewnątrz kuli, podczas gdy wokół niej panowało ciśnienie atmosferyczne. Obrócili kulę tak, że dziura z ciężarkiem była skierowana w dół. Jaka musi być masa ciężarka, aby nie wypadł?*

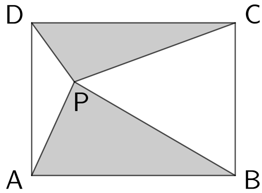
Przyjrzyjmy się siłom działającym na ciężarek. Siła grawitacji, działająca w dół $F_G = mg$, gdzie m jest masą ciężarka oraz g jest przyspieszeniem ziemskim. Dookoła kulki jest ciśnienie atmosferyczne p_A, które działa z siłą $F_T = Sp_A$. W środku kulki jest próżnia, której ciśnienie jest zerowe, a więc nie odziałowuje na ciężarek. Jeśli ciężarek się nie wypada, wielkość siły ciśnienia musi być co najmniej taka sama, jak wartość siły grawitacji F_G. Stąd mamy warunek $F_T \geq F_G$. Używając wzorów do policzenia tych sił otrzymujemy $Sp_A \geq mg$. Jeśli wyznaczymy m, otrzymamy wzór $m \leq Sp_a/g$. Największą możliwą masą ciężarka jest $10\,\mathrm{kg}$.

Zadanie 21 ... punkt w prostokącie

Laura narysowała prostokąt $ABCD$ *o stosunku długości boku* AB *do* BC *równym* $4:3$. *Następnie wybrała punkt* P *wewnątrz prostokąta. Zauważyła, że pola trójkątów* ABP, BCP *i* CDP *wynoszą odpowiednio* $17\,\mathrm{cm}^2$, $42\,\mathrm{cm}^2$ *i* $47\,\mathrm{cm}^2$. *Jakie jest pole trójkąta* DAP*?*

Trójkąty ABP i CDP mają bok będący również dłuższym bokiem prostokąta $ABCD$. Wysokość opuszczona na te boki to odległość między P a danym bokiem. Ponadto suma tych odległości od P jest równa długości krótszego boku prostokąta. Suma pól trójkątów ABP i

CDP wynosi $17\,\mathrm{cm}^2 + 47\,\mathrm{cm}^2 = 64\,\mathrm{cm}^2$. Z jednej strony ta suma jest równa połowie długości dłuższego boku trójkąta pomnożonego przez długość krótszego. Dlatego suma tych dwóch trójkątów jest równa połowie pola prostokąta $ABCD$. Dlatego również suma trójkątów BCP i DAP wynosi $64\,\mathrm{cm}^2$ Stąd trójkąt DAP ma pole $64\,\mathrm{cm}^2 - 42\,\mathrm{cm}^2 = 22\,\mathrm{cm}^2$.



Zadanie 22 ... basen w połowie pusty

Daniel kupił pompę do napełniania basenu wodą. W instrukcji przeczytał, że pompa pompuje wodę z szybkością $2\mathrm{dm}^3/s$. Basen ma $9m$ długości, $3m$ szerokości i $2m$ głębokości. Jak długo trwa napełnienie pustego basenu przy pomocy tej pompy?

Pompa, która pompuje z szybkością $2\,\mathrm{dm}^3/\mathrm{s}$, w ciągu każdej sekundy przepompowuje wodę o objętości $2\,\mathrm{dm}^3 = 0{,}002\,\mathrm{m}^3$. Daniel chce napełnić basen o objętości $9\,\mathrm{m} \cdot 3\,\mathrm{m} \cdot 2\,\mathrm{m} = 54\,\mathrm{m}^3$. Czas potrzebny do napełnienia basenu o objętości $54\,\mathrm{m}^3$ wynosi

$$\frac{54\,\mathrm{m}^3}{0{,}002\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}} = 27\,000\,\mathrm{s}\,.$$

Zadanie 23 ... krok po kroku

W kraju Nábojowo znajdują się dziwne bloki. Każdy z nich ma 9 pięter. Schody między parterem a pierwszym piętrem mają pewną ilość stopni. Każde kolejne schody między piętrami mają o 1 stopień więcej. Liczba kroków potrzebnych na przejście z parteru na piąte piętro jest taka sama jak liczba kroków potrzebna na przejście z piątego na dziewiąte piętro. Z ilu stopni składają się schody z parteru na pierwsze piętro?

Połączmy niektóre schody między piętrami w pary (mamy 9 schodów). Dokładniej, łączymy w pary schody prowadzące na drugie i na szóste piętro, na trzecie i na siódme piętro, na czwarte i na ósme piętro oraz na piąte i na dziewiąte piętro. Po połączeniu w taki sposób widzimy, że pierwsze schody w parze (te prowadzące na niższe piętro) tworzą trasę z pierwszego na piąte piętro, zaś wszystkie drugie schody w parze tworzą trasę z piątego piętra na dziewiąte. Ponadto zauważmy, że w każdej parze schody prowadzące na wyższe piętro ma o 4 więcej schodów niż to, prowadzące na niższe piętro.

Oznacza to, że droga z pierwszego na piąte piętro ma o $4 \cdot 4 = 16$ mniej stopni niż ta prowadząca z piątego na dziewiąte piętro. Ale mamy powiedziane, że trasa z parteru na piąte piętro ma taką samą liczbę kroków jak trasa z piątego piętra na dziewiąte. Oznacza to, że trasa z parteru na piąte piętro ma 16 kroków więcej niż trasa z pierwszego piętra na piąte. Różnica ta to tak naprawdę trasa z parteru na pierwsze piętro, czyli interesująca nas trasa. Dostajemy więc, że schody z parteru na pierwsze piętro mają 16 schodów.

Zadanie 24 ... kwarkowy problem

Emilka odkryła, że protony i neutrony składają się z dwóch rodzajów kwarków – górnych i dolnych. Proton zawiera dwa kwarki górne i jeden kwark dolny, a neutron zawiera jeden kwark górny i dwa kwarki dolne. Emilka zauważyła, że ładunek elektryczny protonu i neutronu musi być równy sumie ładunków kwarków, które zawierają. Jaki ładunek elektryczny miałaby cząstka, gdyby zawierała jeden kwark górny i jeden kwark dolny.

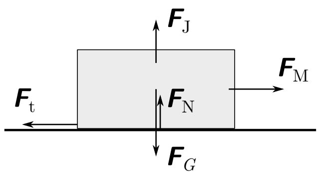
Uwaga: Przedstaw swój wynik jako wielokrotność elementarnego ładunku elektrycznego e*. Proton jest cząsteczką z ładunkiem elektrycznym* +e*, a neutron jest cząsteczką bez ładunku elektrycznego.*

Suma ładunków elektrycznych jednego protonu i jednego neutronu wynosi e. W sumie zawierają on 3 kwarki górne i 3 kwarki dolne. Aby uzyskać ”cząsteczkę”, która zawierałaby tylko jeden kwark górny i jeden kwark dolny, musimy zmniejszyć liczbę obu rodzajów kwarków do jednej trzeciej. Spowoduje to również zmniejszenie całkowitego ładunku elektrycznego do jednej trzeciej. Tak więc cząstka Emilki miałaby ładunek elektryczny $1/3\,\mathrm{e}$.

Zadanie 25 ... absurdalna kostka

Janek i Michalina położyli kostkę o masie $2\,\mathrm{kg}$ *na stole. Współczynnik tarcia pomiędzy kostką a stołem wynosi* $0{,}6$*. Janek pociągnął kostkę z siłą* $5\,\mathrm{N}$ *w kierunku pionowym. Michalina pociągnęła kostką w kierunku poziomym tak, że kostka poruszała się ze stałą prędkością. Policz siłę, z jaką Michalina ciągnęła kostkę.*

Przyjrzyjmy się siłom działającym na kostkę.



W kierunku poziomym mamy siłę Michaliny F_M i siłę tarcia F_t. Te dwie siły muszą być równe, aby kostka poruszała się ze stałą prędkością. W kierunku pionowym mamy siłę grawitacji F_G i siłę Janka $F_J = 5\,\mathrm{N}$. Te siły nie są równej wielkości (obviously $F_G > F_J$). Kostka musi naciskać na stół z pewną siłą. Z trzeciej zasady dynamiki Newtona, wiemy, że stół musi oddziaływać na kostkę siłą o tej samej wielkości, ale o przeciwnym zwrocie. Oznaczmy tę siłę F_N. Kostka nie porusza się w kierunku pionowym, a więc te siły pionowe muszą się równoważyć. Stąd mamy $F_N = F_G - F_J$. Znając siłę F_N możemy policzyć siłę tarcia, ponieważ zależy ona tylko od siły F_N i współczynnika tarcia $f = 0{,}6$. Wzór do policzenia siły tarcia to $F_t = fF_N$. Wielkość tej siły musi być równa wielkości siły F_M. Stąd siła, z jaką Michlina ciągnie kostkę wynosi

$$F_M = F_t = f(F_G - F_J) = f(mg - F_J) = 0.6(2\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} - 5\,\mathrm{N}) = 9\,\mathrm{N}.$$

Zadanie 26 ... wspólne wielokrotności

Każdy spośród trójki przyjaciół: Antek, Bartek i Czarek wybrał pewną liczbę. Najmniejsza wspólna wielokrotność liczby Antka i liczby Bartka wynosi 24*. Najmniejsza wspólna wielokrot-*

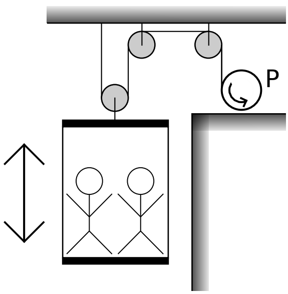
ność liczby Bartka i liczby Czarka wynosi 40*. Jaka jest najmniejsza możliwa wartość najmniejszej wspólnej wielokrotności liczby Antka i liczby Czarka?*

Najmniejsza wspólna wielokrotność liczb Antka i Bartka dzieli się przez 3, ale najmniejsza wspólna wielokrotność liczb Czarka i Bartka nie dzieli się przez 3. Oznacza to, że liczba Bartka nie dzieli się przez 3, a więc liczba Antka musi być podzielna przez 3. Analogicznie, liczba Czarka musi być podzielna przez 5.

W związku z tym najmniejsza wspólna wielokrotność liczb Antka i Czarka nie może być mniejsza niż $3 \cdot 5 = 15$. Taka wartość może być osiągnięta, gdy liczba Antka będzie równa 3, liczba Bartka – 8, a liczba Czarka – 5. Łatwo sprawdzić, że te liczby spełniają warunki zadania. Zatem najmniejsza możliwa wartość najmniejszej wspólnej wielokrotności liczb Antka i Czarka jest równa 15.

Zadanie 27 ... winda pełna fizyki

Na kampusie uniwersyteckim w Bratysławie znajduje się nowoczesna winda, której działanie przedstawione jest na poniższym rysunku. Moc jej silnika wynosi $P = 1\,\mathrm{kW}$*. Jaka jest maksymalna prędkość jadącej w górę windy, jeśli jej masa (wraz z jadącymi nią studentami) wynosi* $m = 400\,\mathrm{kg}$*?*

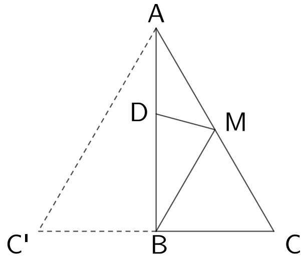


Nie ma znaczenia, na jakiej zasadzie działa winda. Istotne jest to, że przekształca ona energię uzyskaną z silnika w grawitacyjną energię potencjalną kabiny windy i jadących nią studentów. Gdy wysokość windy wzrasta o Δh, wówczas energia potencjalna wzrasta o $\Delta E = mg\Delta h$. Gdy zmiana ta następuje w czasie Δt, to moc silnika spełnia równość $P = \Delta E/\Delta t = mg\Delta h/\Delta t$. Zauważmy, że wielkość $\Delta h/\Delta t$ to prędkość ruchu kabiny windy v. Uwzględniając to i przekształcając ostatnią równość dostajemy $v = P/(mg)$. Przyjmując, że wartość przyspieszenia ziemskiego g wynosi w przybliżeniu $10\mathrm{m/s}^2$ otrzymujemy, że maksymalna prędkość jadącej w górę windy wynosi około $0,25\mathrm{m/s} = 0,9\mathrm{km/h}$.

Zadanie 28 ... problem kąta prostego

Patryk narysował trójkąt prostokątny ABC *o kącie prostym przy wierzchołku* B*. Miara kąta* BAC *wynosi* 30°*. Następnie zaznaczył środek boku* AC *i nazwał go* M *oraz punkt* D *na boku* AB *taki, że* $|BD| = |BC|$*. Znajdź miarę kąta* BMD*.*

Trójkąt ABC ma kąty o miarach 90°, 30° i $180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Weźmy dwa takie trójkąty i przyklejmy je do siebie bokami AB. Otrzymaliśmy w ten sposób trójkąt równoboczny, ponieważ wszystkie jego kąty są miary $60°$. Gdy popatrzymy na nasz trójkąt ABC widzimy, że jego przeciwprostokątna jest bokiem otrzymanego trójkąta równobocznego, a bok naprzeciwko kąta $30°$ to połowa boku nowego trójkąta. W trójkącie ABC otrzymujemy zależność $|AC| = 2 \cdot |BC|$.



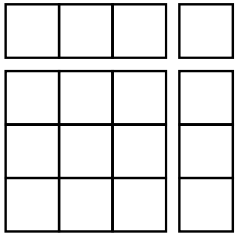
Ponieważ M jest środkiem boku AC widzimy, że $|CM| = |AC|/2 = |BC|$. Zatem BCM jest trójkątem równoramiennym o podstawie BM. Kąt BCM ma miarę $60°$, więc możemy łatwo pokazać, że pozostałe dwa kąty BCM również mają miarę $60°$. Oznacza to, że BCM jest równoboczny, stąd $|BC| = |BM| = |CM|$. Ale wiemy, że $|AM| = |CM| = |BM|$, a zatem ABM jest trójkątem równoramiennym o podstawie AB. Wynika z tego, że miara kąta ABM jest taka sama jak miara kąta BAM, która wynosi $30°$.

Ostatecznie $|BD| = |BC|$, co jak pokazaliśmy powyżej równa się $|BM|$. Czyli BDM również jest trójkątem równoramiennym o podstawie BM. Wiemy, ze miara kąta DBM wynosi $30°$. Pozostałe dwa kąty w tym trójkącie równoramiennym są miary $(180° - 30°)/2 = 75°$. Dostajemy więc, że kąt BMD ma miarę $75°$.

Zadanie 29 ... kwadraty na kwadracie

Skrzaty z Nábojowa postanowiły pokryć główny plac w mieście (mający kształt kwadratu) identycznymi kwadratowymi płytkami. Pierwszy skrzat umieszcza pierwszą płytkę w narożniku placu. Następnie drugi skrzat umieszcza kolejne płytki w tym samym narożniku tak, by łącznie pokryły kwadrat 2×2 płytki. Trzeci skrzat dodaje kolejne płytki tak, by (łącznie z poprzednimi) pokryć kwadrat o boku o jedną płytkę większym, niż poprzednicy. Kolejne skrzaty kontynuują powiększanie pokrytego płytkami kwadratu w ten sam sposób. Ile płytek umieści na placu 2019 *skrzat?*

Przyjrzyjmy się, jak skrzaty układają płytki. Na przykład poniższy rysunek pokazuje, jak robi to czwarty skrzat. Układa je wzdłuż dwóch boków istniejącego kwadratu. Przy każdym z tych boków układa tyle płytek ile wynosiła długość boku kwadratu oraz dokłada dodatkową, narożną płytkę. Zatem czwarty skrzat kładzie $3 + 3 + 1 = 7$ płytek. W ten sam sposób każdy kolejny skrzat dokłada płytki do dwóch boków istniejącego już kwadratu i jeszcze jedną dodatkową płytkę. Zatem 2019 skrzat układa $2018 + 2018 + 1 = 4037$ płytek.



Zadanie 30 ... zabawa piłką

Marek upuścił piłkę z wysokości 10 m*. Za każdym razem, gdy piłka odbije się od ziemi, traci połowę swojej prędkości. Ile razy piłka odbije się na wysokość minimum* 1 cm*?*

Podczas odbijania się piłki jej energia stale zmienia się z potencjalnej na kinetyczną i odwrotnie. Jeśli upuszczamy piłkę z pewnej wysokości, wówczas cała jej energia początkowa jest energią potencjalną. Po krótkim czasie cała energia potencjalna przekształca się w energię kinetyczną. Podczas odbicia traci pewną część energii kinetycznej, a następnie odbija się w powietrze. W końcu osiąga nową maksymalną wysokość, gdzie cała jej energia jest energią potencjalną, a cały proces powtarza się.

Wzór na obliczenie energii kinetycznej E_k ma postać $E_k = mv^2/2$, gdzie v to prędkość piłki, a m jej masa. Jeśli więc zmniejszymy o połowę prędkość kuli, wartość energii kinetycznej spadnie do jednej czwartej. Jeśli zmniejszymy energię kinetyczną do jednej czwartej, zmniejszymy również energię potencjalną na maksymalnej wysokości do jednej czwartej. Wzór na obliczenie energii potencjalnej E_p ma postać $E_p = mgh$, gdzie m to masa piłki, g to przyspieszenie ziemskie, a h to wysokość na jakiej znajduje się piłka. Jeśli więc zredukujemy energię potencjalną do jednej czwartej, kula odbije się cztery razy niżej.

Teraz musimy tylko obliczyć, ile razy możemy podzielić10 m na cztery, aby uzyskać wysokość w centymetrach, której wartość będzie większa niż 1. Jeśli zamienimy 10 m na centymetry, otrzymamy $10\,\mathrm{m} = 1000\,\mathrm{cm}$. Po czwartym odbiciu piłka odbije się na wysokość $1000\,\mathrm{cm}/4^4 = 1000\,\mathrm{cm}/256 > 1\,\mathrm{cm}$. Po piątym odbiciu odbije się na wysokość $1000\,\mathrm{cm}/4^5 = = 1024\,\mathrm{cm}/256 < 1\,\mathrm{cm}$. Dlatego piłka odbije się na wysokość większą niż 1 cm dokładnie 4 razy.

Zadanie 31 ... gęstość mikstury

Wiedźmin Bubu włożył pustą szklankę do wody i okazało się, że 3/5 *jej objętości znajdowało się pod wodą. Następnie włożył tę samą szklankę do magicznej mikstury, w której* 3/4 *szklanki było zanurzone w miksturze. Jaka jest gęstość tej mikstury?*

Jeśli weźmiemy jakiś obiekt o gęstości ϱ_1 i objętości V i włożymy go do cieczy o gęstości ϱ_2 ($\varrho_2 > \varrho_1$), to objętość tego obiektu, która jest zanurzona w cieczy (V') jest równa:

$$V' = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} V.$$

Czyli gęstość szkła wynosi 3/5 gęstości wody, która wynosi $600\,\mathrm{kg/m^3}$. Gęstość ta wynosi również 3/4 gęstości magicznej mikstury. Dostajemy więc, że gęstość tej mikstury wynosi $800\,\mathrm{kg/m^3}$.

Zadanie 32 ... planety pozasłoneczne

Kosmici Kubor i Jonka żyją na planecie, która krąży wokół gwiazdy zgodnie z ruchem wskazówek zegara i obraca się wokół własnej osi również zgodnie z ruchem wskazówek zegara. Przez „dzień kosmitów" rozumieją oni czas pomiędzy dwoma „zachodami słońca" ich gwiazdy. Każdy dzień kosmitów trwa 6 ziemskich godzin, a pełny przebieg planety wokół gwiazdy zajmuje 35 dni kosmitów. Ile ziemskiego czasu zajmuje planecie obrót wokół własnej osi?

Może się wydawać, że jeden obrót wokół osi zajmuje dokładnie jeden dzień kosmitów. Jednakże jest inaczej. Ustalmy punkt na planecie w którym właśnie jest zachód gwiazdy. Po obrocie planety wokół własnej osi zmieni się pozycja planety względem gwiazdy. Ponieważ zarówno planeta obroty planety, jak i krążenie wokół gwiazdy są zgodne z ruchem wskazówek zegara, w ustalonym punkcie będzie jeszcze przed zachodem gwiazdy, stąd mamy lekkie przesunięcie. Jeśli spojrzymy na wszystkie takie przesunięcia w ciągu obiegania gwiazdy, zsumują się one tak, że planeta będzie potrzebowała 36 obrotów wokół własnej osi, w czasie 35 dni kosmitów. Inny sposób, aby to zauważyć jest: Planeta obraca się 36 razy wokół własnej osi, ale obserwator przebywający w jednym punkcie zobaczy o 1 zachód mniej, ze względu na przesunięcia, a więc 35 razy. 35 dni alienów trwają $35 \cdot 6 \cdot 60 = 12600$ ziemskich minut. Stąd jeden obrót zajmuje $12600/36 = 350$ ziemskich minut.

Zadanie 33 ... długie obliczenia w długiej podróży

Hania była znudzona podczas podróży pociągiem, więc postanowiła obliczyć iloczyn

$$2019 \cdot 2019 \cdot 2019 \cdot 2019\,.$$

Następnie zsumowała cyfry otrzymanego iloczynu. Otrzymała w ten sposób nową liczbę i znowu zsumowała jej cyfry. Kontynuowała tę procedurę do momentu, gdy dostała liczbę jednocyfrową. Jaką liczbę otrzymała?

Zauważmy, że liczba 2019 jest podzielna przez 3 ($2019 = 3 \cdot 673$). Zatem produkt czterech liczb 2019 musi być podzielny przez 9. Jeśli liczba jest podzielna przez 9, to suma jej cyfr również musi być podzielna przez 9. Stąd wynika dalej, że suma cyfr sumy cyfr będzie podzielna przez 9. Postępując tak dalej, dojdziemy do wniosku, że wszystkie uzyskane przez Hanię liczby musiały być podzielne przez 9. W szczególności ostatnia, jednocyfrowa liczba, musiała być podzielna przez 9. Zatem musiała być ona równa 0 lub 9. Ale jedyną liczbą, której suma cyfr wynosi 0, jest 0, a więc Hania nie mogła uzyskać tej liczby startując od niezerowej liczby. Zatem Hania uzyskała liczbę 9.

Zadanie 34 ... korona w kąpieli

Archimedes dostał od króla zadanie polegające na ustaleniu, czy nowa królewska korona wykonana jest z czystego złota, czy ze stopu złota ze srebrem. Archimedes zanurzył koronę w wodzie, co pozwoliło mu stwierdzić, że objętość korony wynosi $V = 0.14l$. Następnie uczynił to samo z bryłami z czystego złota i z czystego srebra. Czyste złoto o masie takiej samej, jak królewska korona miało objętość $V_{Au} = 0.11l$, a czyste srebro o tej samej masie miało objętość $V_{Ag} = 0.2l$. Archimedes obwieścił, że korona nie jest wykonana z czystego złota. Jaką część masy korony stanowi masa zawartego w niej złota?

Oznaczmy przez p stosunek masy złota w koronie do masy całej korony. Liczba p jest liczbą z przedziału $< 0, 1 >$. Masa srebra stanowi $1 - p$ część masy korony. Ponieważ złoto stanowi p część masy korony, to jego objętość w koronie wynosi pV_{Au}. Podobnie, objętość srebra zawartego w koronie wynosi $(1 - p)V_{Ag}$. Suma tych dwóch objętości to objętość całej korony, czyli

$$V = pV_{Au} + (1 - p)V_{Ag}.$$

Wyznaczmy p:

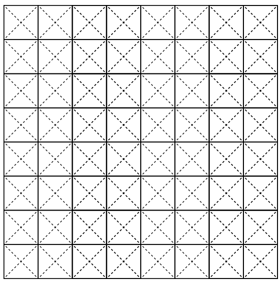
$$p = \frac{V_{Ag} - V}{V_{Ag} - V_{Au}}.$$

Podstawiając dane liczbowe dostajemy, że $p = 2/3$, czyli masa złota stanowi $2/3$ masy korony.

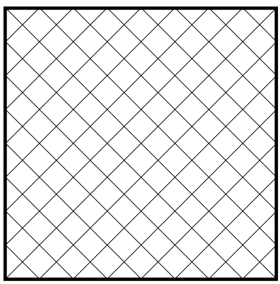
Zadanie 35 ... cięcie papieru

Teresa ma kwadratowy kawałek papieru o wymiarach 8×8 centymetrów. Złożyła go dwukrotnie otrzymując kwadrat 4×4 centymetrów. Powtórzyła tą procedurę jeszcze dwukrotnie i otrzymała kwadrat o boku 1×1 centymetr. Przecięła tak otrzymany kwadrat wzdłuż obu przekątnych. Ile kawałków papieru dostała?

Gdybyśmy nie przecięli kwadratu otrzymanego na końcu, po rozłożeniu otrzymalibyśmy siatkę 8×8 kwadratów. Przecięcie kwadratu na końcu powoduje przecięcie obu przekątnych w każdym kwadracie. Możemy narysować te cięcia na rysunku:



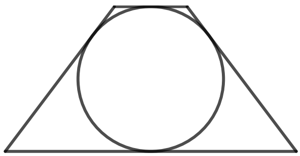
Aby otrzymane kawałki papieru były bardziej widoczne na obrazku, narysujmy kolejny, w którym odsuniemy linie składania tworzące siatkę:



Łatwo zauważyć, że otrzymujemy tylko dwa różne kształty - kwadraty wewnątrz kartki, a na obwodzie trójkąty. Możemy zauważyć, że każdy kwadrat i trójkąt zawiera dokładnie jedną krawędź oryginalnej siatki, a także każda krawędź jest zawarta tylko w jednym kawałku papieru. Zatem liczba kawałków jest równa liczbie krawędzi siatki. Możemy obliczyć, że jest $8 \cdot 9 = 72$ krawędzi, czyli w sumie $2 \cdot 72 = 144$ krawędzi. Oznacza to, że Teresa otrzyma 144 kawałków papieru.

Zadanie 36 . . . lekcja rysunku

Jadzia narysowała trapez równoramienny, którego ramię ma długość 5cm, po czym zorientowała się, że może w ten trapez wpisać okrąg o promieniu 2cm. Jakie jest pole powierzchni trapezu Jadzi?



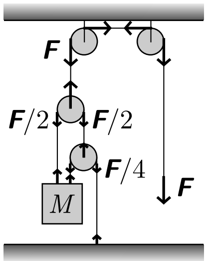
Nie w każdy czworokąt można wpisać okrąg. Własność, polegająca na tym, że jest to możliwe jest dość szczególna. Rozważmy dowolny czworokąt, który ma tę własność. Podzielmy jego boki na części w ten sposób, że punktami ich podziału są punkty styczności okręgu wpisanego. Każdy z boków zostanie w ten sposób podzielony na dwa odcinki, gdyż na każdym z nich znajduje się jeden punkt styczności okręgu wpisanego. Z każdego wierzchołka czworokąta wychodzą dwa spośród ośmiu powstałych w ten sposób odcinków. Rysunek, na którym znalazłyby się dwa odcinki, wychodzące z jednego wierzchołka oraz okrąg wpisany w czworokąt, byłby symetryczny względem prostej zawierającej dwusieczną kąta wyznaczonego przez te odcinki. Wynika stąd, że odcinki te mają tę samą długość. Jeśli przyjrzymy się czterem odcinkom powstałych z podziału dwóch przeciwległych boków czworokąta, to zauważymy coś interesującego. Każdy z tych czterech odcinków ma parę w postaci odcinka o tej samej długości, powstałego na skutek podziału któregoś z pozostałych dwóch boków. Zatem czworokąt, w który można wpisać okrąg ma tę własność, że sumy długości jego przeciwległych boków są równe.

Wróćmy do trapezu Jadzi. Zgodnie z treścią zadania jest to trapez równoramienny, więc drugie jego ramię również ma długość 5cm. Suma długości obu ramion wynosi 10cm. Ponieważ ramiona są przeciwległymi bokami trapezu, a w trapez Jadzi można wpisać okrąg, to suma długości pozostałych dwóch boków trapezu (czyli jego podstaw) również wynosi 10cm. Informacja ta jest ważna, gdyż we wzorze na pole trapezu występuje suma długości jego podstaw. Do użycia tego wzoru potrzebujemy jeszcze wyznaczyć wysokość trapezu. Wiemy, że promień okręgu wpisanego w trapez, łączący środek tego okręgu z punktem jego styczności z bokiem trapezu, jest prostopadły do tego boku. W szczególności, dwa takie promienie są prostopadłe do podstaw trapezu. Ponieważ podstawy trapezu są równoległe, więc te prostopadłe do nich promienie również są równoległe. W dodatku mają wspólny koniec (którym jest środek okręgu wpisanego), więc leżą na jednej prostej prostopadłej do obu podstaw trapezu. Suma ich długości jest równa długości średnicy okręgu. Oznacza to, że średnica okręgu wpisanego w trapez Jadzi i wysokość tego trapezu mają tę samą długość.

Wiedząc, że suma długości podstaw trapezu Jadzi wynosi 10cm, a jego wysokość to 4cm, możemy obliczyć pole trapezu. Wynosi ono $10\text{cm} \cdot 4\text{cm}/2 = 20\text{cm}^2$.

Zadanie 37 ... Bob Budowniczy

Bob Budowniczy chce ułatwić sobie pracę na budowie. Betoniarka poradziła mu, aby zbudował układ bloczków, jak na obrazku. Bob użył go do podniesienia 15-kilogramowej skrzyni. Z jaką najmniejszą siłą Bob musi pociągnąć za linę, aby podniósł skrzynię?



Jeśli Bob chce podnieść skrzynię za pomocą układu bloczków, musi pociągnąć linę z taką samą siłą, jakiej potrzeba, aby utrzymać skrzynię w spoczynku. Widzimy, że w tym przypadku żadna lina nie może się poruszyć, żaden bloczek przesuwny się nie obraca i żaden bloczek stały się nie porusza. Tak więc dla każdej liny musimy mieć dwie takie same siły, ale działające na nią w przeciwnych kierunkach. Dlatego siła F, za pomocą której Bob ciągnie linę, przesunie się na prawy bloczek stały. Pędy sił działające na bloczki muszą być równe, więc siła F przesunie się na lewy bloczek stały. W takim razie powodu siła F przesunie się na górny bloczek przesuwny. Aby uzyskać równe pędy sił działających na ten bloczek, pozostałe dwie siły działające na ten bloczek muszą być jednakowe. Ten b bloczek nie porusza się, więc siła, która ciągnie go w górę, musi być taka sama jak suma sił, które ciągną go w dół. Stąd obie te siły są równe $F/2$. Jedna z lin tego bloczka przeniesie siłę $F/2$ bezpośrednio na skrzynię. Druga spowoduje przeniesienie go na dolny bloczek przesuwny. Również tutaj siła podzieli się na jednakowe dwie siły. W konsekwencji każda lina będzie oddziaływać na ten bloczek z siłą $F/4$. Tylko jedna z tych sił przeniesie się do skrzynię. Zatem suma sił działających na skrzynkę wyniesie $F/2 + F/4 + 3F/$. Aby skrzynia było w spoczynku, siła ta musi mieć taki sam rozmiar jak siła grawitacji działająca na to pudełko. Możemy więc wyrazić siłę, której potrzebuje Bob następująco:

$$F = 4Mg/3.$$

Bob musi pociągnąć za linę z siłą $200N$.

Zadanie 38 ... ulubione liczby

Mariusz wziął swoje dwie ulubione liczby całkowite dodatnie. Gdyby obliczył ich iloczyn, dostałby 7-krotnie większy wynik, niż gdyby obliczył ich sumę. Jaka jest suma dwóch ulubionych liczb Mariusza?

Oznaczmy ulubione liczby Mariusza przez x i y. Nie ma znaczenia, która z nich jest większa, więc załóżmy, że $x > y$ (zgodnie z treścią x i y nie mogą być równe). Z treści zadania wiemy, że:

$$x \cdot y = 7 \cdot (x + y).$$

Przenosimy wszystko na jedną stronę i dostajemy:

$$x \cdot y - 7 \cdot x - 7 \cdot y = 0.$$

Chcemy doprowadzić równanie do takiej postaci, żeby był to iloczyn dwóch nawiasów (tak aby każdy nawias zawierał dokładnie jedną z liczb x i y). Teraz spróbujmy przedstawić lewą stronę równania jako iloczyn:$(x-7)\cdot(y-7)$, i zauważmy, że $x\cdot y-7\cdot x-7\cdot y+49$. Dodajemy więc 49 po obu stronach równania $x\cdot y-7\cdot x-7\cdot y=0$ i otrzymujemy:

$$(x-7)\cdot(y-7)=49.$$

Jeśli jeden z nawiasów byłby ujemny, drugi również musiałby być ujemny. Liczby x i y są dodatnimi liczbami całkowitymi, więc w tym przypadku wartości w nawiasach mogą wynosić-1, -2, -3, -4, -5 i -6. Zatem maksymalna wartość iloczynu $(x-7)\cdot(y-7)$ wynosi $(-6)\cdot(-6)=$ $=36$, czyli mniej niż 49.

Dlatego wartość obu nawiasów jest dodatnia. Co więcej, ich wartości są liczbami całkowitymi, a zatem muszą być dzielnikami liczby 49. Liczbę tę można przedstawić na dwa sposoby: $49=49\cdot1=7\cdot7$. Gdybyśmy wybrali drugi rozkład to, mielibyśmy $x=y=14$. Ale liczby te muszą być różne. W związku z tym jeden z nawiasów musi mieć wartość 49, a drugi 1. Na początku mieliśmy $x>y$, więc $x-7=49$ a $y-7=1$ a $y-7=1$. Oznacza to, że $x=56$ i $y=8$. To jedyne rozwiązanie, a więc suma ulubionych liczb Mariusza to 64.

Zadanie 39 ... zanurzanie

Damian ma jednorodny sześcian o krawędzi $a=2\,\mathrm{m}$ i gęstości $\varrho=800\,\mathrm{kg/m^3}$. Wrzuca go do jeziora z wysokości $h=6\,\mathrm{m}$, liczonej od poziomu wody. Jaka jest największa głębokość, na którą zanurzy się górna część kostki?

Uwaga: Przyjmijmy, że woda w jeziorze to płyn doskonały.

Oznaczmy przez d największą głębokość, na którą zanurzy się górna część kostki Damiana. Dolna część jego kostki zanurzy się maksymalnie na głębokość $d+a$. Wówczas dolna część kostki będzie $h+d+a$ niżej niż początkowo. Jej energia potencjalna musi zostać zmniejszona o $mg(h+d+a)$, gdzie g jest przyśpieszeniem ziemskim, a m jest masą kostki, którą można policzona ze wzoru $m=V\varrho=a^3\varrho$.

Pytanie, jak przemienia się ta energia. Odpowiedź jest prosta. Najgłębsze miejsce, w którym znajdzie się kostka Damiana jest początkowo zajęte przez wodę. Kiedy kostka znajdzie się w najgłębszym miejscu, woda, która była tam wcześniej musi się znaleźć w innym miejscu. Skoro jezioro jest duże, to poziom wody podniesie się niezauważalnie.

Teraz policzmy zmianę energii potencjalnej przemieszczonej wody. Początkowo tworzyła ona kostkę o takim samym kształcie, jak kostka Damiana. Stąd jej masa był $m=a^3\varrho_{wody}$. Dla uproszczenia obliczeń przyjmijmy, że cała masa tej kostki wody jest w jej środku ciężkości, który początkowy był na głębokości $d+a/2$. To oznacza, że energia potencjalna wzrosła o $a^3\varrho_{woda}g(d+a/2)$. Mamy dwie energie, z których jedna przekształciła się w drugą, więc możemy zapisać:

$$a^3\varrho g(h+d+a)=a^3\varrho_{woda}g(d+\frac{a}{2}).$$

Po podzieleniu przez a^3 i g otrzymujemy

$$\varrho(h+d+a)=\varrho_{woda}(d+\frac{a}{2}).$$

Możemy policzyć szukaną głębokość d

$$d=\frac{\varrho(h+a)-\varrho_{woda}\frac{a}{2}}{\varrho_{woda}-\varrho}.$$

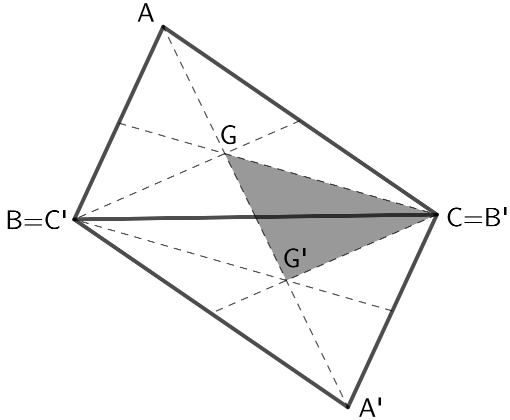
Wstawiając wartości z treści zadania otrzymujemy największą głębokość, na której znajdzie się górna część kostki Damiana równą 27 m. W rzeczywistości kostka Damiana nie zanurzyłaby się tak głęboko. Część jej energii potencjalnej zostałaby zużyta na opór, fale lub na ściśnienie wody. Wynik byłby mniejszy. Poza tym kostka Damiana nie waży aż $\varrho a^3 = 6{,}4\,\mathrm{t}$. Jednakże, jeśli pominiemy te straty energii poprzez założenie, że woda jest płynem doskonałym, kostka Damiana osiągnie głębokość 27 m.

Zadanie 40 ... zadanie o środkowych

Józio narysował trójkąt ABC o długościach środkowych: 6, 8, 10 centymetrów. Oblicz pole trójkąta ABC.

Środkowe trójkąta przecinają się w środku ciężkości G, który dzieli każdą ze środkowych w stosunku $2:1$ – tak, że dłuższa część znajduje się po stronie wierzchołka. To oznacza, że odległość punktu G od dowolnego boku trójkąta jest trzy razy mniejsza od długości wysokości opuszczonej na ten bok.

Rozważmy trójkąt, którego jednym wierzchołkiem jest G, a pozostałe dwa wierzchołki są wierzchołkami trójkąta ABC – na przykład trójkąt ABG. Oznaczmy przez c długość boku AB, a przez v_c – długość opuszczonej nań wysokości. Wówczas wysokość trójkąta ABG opuszczona na bok AB ma długość $v_c/3$. Zatem jego pole wynosi $S_{ABG} = c(v_c/3)/2 = S/3$, gdzie $S = cv_c/2$ jest polem trójkąta ABC, które chcemy znaleźć.



Co więcej, zwróćmy uwagę, że jedna ze środkowych (opuszczona z wierzchołka C) przechodzi przez trójkąt ABG i dzieli go na dwa mniejsze trójkąty. Trójkąty te mają tę samą wysokość (długości $v_c/3$) i podstawy równej długości – $c/2$. W związku z tym oba mają to samo pole $S_{ABG}/2 = S/6$. Rozważając analogicznie trójkąty BCG i ACG, dochodzimy do wniosku, że środkowe trójkąta ABC dzielą trójkąt na 6 części o równych polach.

Aby skorzystać z długości środkowych, utworzymy teraz z nich trójkąt w następujący sposób. Odbijmy trójkąt ABC symetrycznie względem środka boku BC, tak jak przedstawiono na rysunku. Rozważmy (zamalowany na rysunku) trójkąt $GG'B$. Składa się on z dwóch trójkątów utworzonych przez środkowe. Każdy z nich ma (jak udowodniliśmy wyżej) pole równe $S/6$. Zatem pole trójkąta $GG'B$ wynosi $S_{GG'B} = 2 \cdot S/6 = S/3$. Zauważmy też, że każdy z boków trójkąta $GG'B$ stanowi 2/3 długości odpowiedniej środkowej, a więc mają one długości odpowiednio 4 cm, 16/3 cm i 20/3 cm.

Aby policzyć pole trójkąta, zauważmy, że długości środkowych spełniają równość z twierdzenia Pitagorasa – a więc odcinki stanowiące 2/3 odpowiednich środkowych również ją spełniają. Zatem trójkąt $GG'B$ jest prostokątny z przyprostokątnymi o długościach odpowiednio 4 cm i 16/3 cm. Jego pole wynosi więc

$$S_{TT'B} = \frac{4\,\mathrm{cm} \cdot \frac{16}{3}\,\mathrm{cm}}{2} = \frac{32}{3}\,\mathrm{cm}^2 . \implies S = 3S_{TT'B} = 32\,\mathrm{cm}^2 .$$

Zatem pole trójkąta Józia wynosi $32\,\mathrm{cm}^2$.

Zadanie 41 ... tor do biegania

Andrzej i Monika biegają po okrągłym torze. Andrzej biega szybciej. Zaczynają bieg z tego samego miejsca, w tę samą stroną i spotykają się po 420 sekundach. Po spotkaniu ponownie biegną, lecz w przeciwnych kierunkach. Spotykają się po 70 sekundach. O ile sekund więcej (od Andrzeja) potrzebuje Monika na przebiegnięcie okrążenia?

Oznaczmy przez T_A czas, jaki Andrzej potrzebuje do przebiegnięcia okrążenia, przez T_M czas, jaki potrzebuje Monika oraz przez s długość okrążenia. Stąd mamy prędkość Andrzeja $v_A = s/T_A$ oraz prędkość Moniki $v_M = s/T_M$. Jeśli biegną w tę samą stronę, ich prędkość względem siebie nawzajem jest równa różnicy ich prędkości, a więc $v_1 = v_A - v_M$. Wiemy również, że $v_1 = s/t_1$. Zestawiając te równości otrzymujemy

$$\frac{s}{t_1} = \frac{s}{T_A} - \frac{s}{T_M}.$$

Po podzieleniu stronami przez s otrzymujemy

$$\frac{1}{t_1} = \frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_M}.$$

Jeśli biegną w przeciwne strony, ich prędkość względem siebie nawzajem v_2 jest równa sumie ich prędkości, a więc $v_2 = v_A + v_M$. Wiemy również, że $v_2 = s/t_2$. Po zestawieniu tych równości i podzieleniu przez s otrzymujemy:

$$\frac{1}{t_2} = \frac{1}{T_A} + \frac{1}{T_M}.$$

Otrzymaliśmy dwa równania dwóch niewiadomych T_A i T_M, które chcemy rozwiązać. Po dodaniu stronami otrzymujemy

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = \frac{2}{T_A}.$$

Równoważnie

$$T_A = \frac{2 \cdot t_1 \cdot t_2}{t_1 + t_2}.$$

Podobnie, po odjąciu ich stornami otrzymujemy.

$$T_M = \frac{2 \cdot t_1 \cdot t_2}{t_1 - t_2}.$$

Stąd łatwo otrzymujemy, że $T_A = 120$ sekund i $T_M = 168$ sekund. Stąd łatwo otrzymujemy $T_M - T_A = 48$ sekund, co oznacza, że Monika potrzebuje 48 sekund więcej do przebiegnięcia okrążenia.

Zadanie 42 ... turniej szachowy

W turnieju szachowym wzięło udział 13 uczestników. Każdy z nich grał z każdym z pozostałych dokładnie raz. Po turnieju zauważyli, że każdy z nich wygrał 6 razy i przegrał 6 razy. Żadna partia nie zakończyła się remisem. Na ile sposobów można wybrać trzech spośród tych szachistów tak, by każdy z nich odniósł jedno zwycięstwo i jedną porażkę w partiach przeciw pozostałym dwóm szachistom z wybranej trójki?

Przyjrzyjmy się wynikom partii między graczami z dowolnej trójki szachistów. Są dwie możliwości. Może się zdarzyć tak, że każdy z nich wygrał dokładnie raz przeciwko pozostałym szachistom z trójki (naszym celem jest wyznaczenie liczby takich właśnie trójek). Może się również zdarzyć tak, że jeden z szachistów wygrał obie partie, drugi wygrał tylko raz, a trzeci obie partie przegrał. Innych możliwości nie ma, gdyż łączna liczba zwycięstw w partiach w ramach jednej trójki jest równa trzy. Chcąc wyznaczyć liczbę trójek szachistów realizujących pierwszą możliwość, obliczymy liczbę wszystkich trójek i odejmiemy od niej liczbę trójek realizujących drugą możliwość.

Najpierw obliczmy liczbę wszystkich trójek. Wybierając kolejno szachistów tworzących trójkę, pierwszego szachistę możemy wybrać spośród wszystkich 13 szachistów, drugiego spośród pozostałych 12, a trzeciego spośród pozostałych 11. Łącznie daje to $13 \cdot 12 \cdot 11$ sposobów dokonania takiego wyboru. Jednak każda z trójek została w ten sposób policzona kilkukrotnie, gdyż uwzględniliśmy nie tylko skład trójki, ale również kolejność wyboru jej członków. Musimy zatem podzielić wyznaczoną liczbę sposobów wyboru trójki przez liczbę sposobów uporządkowania jej członków w jakiejś kolejności. Szachistę, który będzie pierwszy w trójce możemy wybrać spośród wszystkich 3 szachistów, drugiego spośród pozostałych 2, pozostały szachista będzie trzeci. Łącznie daje to $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ sposobów uporządkowania członków trójki. Liczba wszystkich trójek szachistów wynosi zatem $13 \cdot 12 \cdot 11/6 = 286$.

Wyznaczmy teraz liczbę tych trójek, w których jeden z szachistów wygrał dwa razy. Tym razem również musimy zadbać o to, by każdą trójkę policzyć dokładnie raz. Wykorzystamy to, że tylko jedna osoba z trójki mogła wygrać dwa razy. Rachunek przeprowadzimy w ten sposób, że dla każdego szachisty obliczymy liczbę trójek, w których wygrał on dwie partie, a następnie dodamy wyniki uzyskane dla poszczególnych graczy. W ten sposób każdą trójkę uwzględnimy dokładnie raz, patrząc na tego gracza, który w tej trójce odniósł dwa zwycięstwa. Przystąpmy do rachunków. Jeśli dla danego gracza chcemy uzyskać trójkę, w której odniósł on dwa zwycięstwa, to pozostałych dwóch jej członków musimy wybrać spośród sześciu szachistów, których pokonał w całym turnieju. Pierwszego z nich możemy wybrać na 6, a drugiego na 5 sposobów. Ponieważ jednak kolejność wyboru nie ma znaczenia, więc uzyskany wynik musimy podzielić przez 2. Otrzymujemy, że dla każdego szachisty jest $6 \cdot 5/2 = 15$ trójek, w których wygrał on dwie partie. Sumując tę liczbę dla wszystkich uczestników turnieju, otrzymujemy, że liczba trójek, w których któryś z graczy odniósł dwa zwycięstwa wynosi $13 \cdot 15 = 195$.

Możemy wreszcie dokończyć rozwiązywanie zadania. Ponieważ wszystkich trójek jest 286, zaś trójek, w których jeden z szachistów wygrał dwa razy jest 195, to szukana liczba trójek, w których każdy szachista wygrał raz wynosi $286 - 195 = 91$.

Náboj Junior 2019

Bánovce nad Bebravou – Gymnázium Janka Jesenského • **Banská Bystrica** – Gymnázium Andreja Sládkoviča • **Białystok** – Liceum Ogólnokształcące Politechniki Białostockiej • **Bielsko-Biała** – V Liceum Ogólnokształcące • **Bratislava** – UPeCe sv. Jozefa Freinandemetza • **Brezno** – Gymnázium Jána Chalupku • **Brno** – Gymnázium Matyáše Lercha • **Bytča** – Gymnázium Bytča • **Česká Lípa** – Gymnázium Žitavská • **České Budějovice** – Gymnázium Jírovcova • **Frýdlant nad Ostravicí** – Gymnázium Frýdlant • **Grodzisk Mazowiecki** – Szkoła Podstawowa nr 5 im. Leonida Teligi • **Hlohovec** – Gymnázium Ivana Kupca • **Hradec Králové** – Univerzita Hradec Králové, Přírodovědecká fakulta • **Kadaň** – Sluníčková základní škola Kadaň • **Karlovy Vary** – První české gymnázium v Karlových Varech • **Košice** – Gymnázium Alejová • **Kraków** – Uniwersytet Jagielloński, Wydział Matematyki i Informatyki • **Krosno** – I Liceum Ogólnokształcące im. Mikołaja Kopernika • **Levice** – Gymnázium Andreja Vrábla • **Liberec** – Doctrina – Podještědské gymnázium • **Liptovský Mikuláš** – Gymnázium Michala Miloslava Hodžu • **Łódź** – I Liceum Ogólnokształcące im. Mikołaja Kopernika • **Lučenec** – CVČ Magnet • **Michalovce** – Gymnázium Pavla Horova • **Námestovo** – Gymnázium Antona Bernoláka • **Nitra** – Gymnázium Párovská • **Olomouc** – Gymnázium Olomouc-Hejčín • **Ostrava** – Gymnázium Olgy Havlové • **Pardubice** – Gymnázium Dašická • **Partizánske** – Dom kultúry • **Piešťany** – Gymnázium Pierra de Coubertina • **Písek** – SPŠ a VOŠ Písek • **Plzeň** – Gymnázium Mikulášské náměstí • **Poprad** – Gymnázium Kukučínova • **Praha** – Gymnázium Voděradská • **Praha** – Gymnázum Christiana Dopplera • **Prešov** – Gymnázium Jána Adama Raymana • **Prievidza** – Gymnázium Vavrinca Benedikta Nedožerského • **Púchov** – Gymnázium Púchov • **Šahy** – Gymnázium Mládežnícka • **Sokolov** – Gymnázium a KVC Sokolov • **Sosnowiec** – IV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica • **Sučany** – Bilingválne gymnázium Milana Hodžu • **Šurany** – Gymnázium Bernolákova • **Tarnów** – III Liceum Ogólnokształcące im. Adama Mickiewicza • **Třebíč** – Katolické gymnázium • **Trenčín** – Gymnázium Ľudovíta Štúra • **Trnava** – UPeCe sv. Stanislava Kostku • **Trstená** – Gymnázium Martina Hattalu • **Ústí nad Labem** – Univerzita Jana Evangelisty Purkyně, Fakulta sociálně ekonomická • **Warszawa** – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica • **Wrocław** – Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu • **Zlín** – Gymnázium Zlín-Lesní čtvrť

Propozycje problemów

Marián Poturnay • Patrik Švančara • Radek Kusek • Marek Murin

Autorzy zadań i rozwiązań

Marián Poturnay • Matej Hrmo • Daniel Onduš • Lukáš Gáborik • Jakub Parada • Marek Murin

Tłumacze

Andrzej Komisarski • Radek Kusek • Kamil Rychlewicz • Beata Czernecka • Marián Poturnay • Sabína Samporová • Marcel Palaj • Daniel Onduš • Lukáš Gáborik • Matej Hrmo • Miroslav Hanzelka • Kateřina Stodolová • Patrik Švančara

Recenzenci

Marián Poturnay • Matej Hrmo • Daniel Onduš • Lukáš Gáborik • Marek Murin • Veronika Paulinyová • Radek Kusek • Ela Vojtková • Jakub Parada