NÁBOJ junior

8. ročník

2019/20

Vzorové riešenia

výfuk

Trojsten

Ahojte,

práve sa Vám do rúk dostala brožúrka zadaní a riešení úloh súťaže Náboj Junior 2019. Náboj Junior je matematicko-fyzikálna súťaž pre štvorčlenné tímy žiakov druhého stupňa základných škôl a žiakov prímy až kvarty osemročných gymnázií. Súťaž trvá 120 minút, počas ktorých sa tímy snažia vyriešiť čo najviac úloh zameraných nielen na znalosti z matematiky a fyziky, ale aj na schopnosť pristupovať k úlohám inovatívne a s dôvtipom.

Dňa 22. novembra 2019 prebieha 8. ročník Náboja Junior v 25 mestách na Slovensku, 19 mestách v Českej republike a 10 mestách v Poľsku. Na Slovensku sa tento rok zúčastní súťaže vyše 400 tímov. V slovenských mestách je súťaž organizovaná šikovnými stredoškolákmi, ktorí venujú svoj čas a energiu tomu, aby umožnili mladším žiakom z regiónu zasúťažiť si a preveriť svoje vedomosti. Cieľom Náboja Junior je rozvíjať nadanie detí v oblasti matematiky a fyziky a ukázať širokému spektru žiakov, že tieto prírodné vedy ukrývajú množstvo zaujímavostí, výziev a príležitostí. Ďalším cieľom je rozvíjanie organizačných schopností stredoškolákov, ktorí majú počas prípravy súťaže možnosť na vlastnej koži zažiť zábavné, ale aj náročné aspekty práce v tíme.

Súťaž Náboj Junior vznikla ako spoločný projekt občianskeho združenia Trojsten a korešpondenčného seminára MFF UK Výfuk. Členovia organizácií sú vysokoškolskí študenti Fakulty matematiky, fyziky a informatiky UK v Bratislave alebo Matematicko-fyzikální fakulty UK v Prahe, ktorí sa snažia o rozvoj nadania študentov a záujmu o prírodné vedy.

Prajeme veľa šťastia pri riešení úloh,

o. z. Trojsten

Úloha 1 ... problémy boháčov

V krajine Nábojovo používajú ako menu náboje. V tejto mene majú deväť typov bankoviek v hodnotách 1 *náboj,* 10 *nábojov,* 100 *nábojov,* 1 000 *nábojov,* 10 000 *nábojov,* 100 000 *nábojov,* 1 000 000 *nábojov,* 10 000 000 *nábojov a* 100 000 000 *nábojov. Jožko mal po jednej bankovke každej hodnoty. Aký je aritmetický priemer hodnôt Jožkových bankoviek?*

Priemer niekoľkých čísel vieme vypočítať tak, že súčet týchto čísel vydelíme počtom týchto čísel. Priemer hodnôt Jožkových bankoviek by sme vedeli vypočítať tak, že by sme sčítali hodnoty všetkých Jožkových bankoviek (ten je 111 111 111) a predelili ho počtom bankoviek, ktorých je 9. Tým by sme dostali, že priemer hodnôt Jožkových bankoviek je $111\,111\,111/9 = 12\,345\,679$.

Ak by sme si toto delenie chceli zjednodušiť, vedeli by sme si každú z hodnôt bankoviek zapísať takto: $1 = 1$, $10 = 9+1$, $100 = 99+1$, $\ldots$, $100\,000\,000 = 99\,999\,999+1$. Súčet všetkých hodnôt tak vieme zapísať ako súčet $9+99+999+\ldots+99\,999\,999+9\cdot 1$. Keď toto číslo vydelíme 9, bude podiel rovný $1 + 11 + 111 + \ldots + 11\,111\,111 + 1 = 12\,345\,679$, čo je zároveň hľadaný aritmetický priemer.

Úloha 2 ... ranná rozcvička

Róberta práve zmeškala autobus do školy. Tentokrát bola na to pripravená a má obuté bežecké tenisky. Škola je od autobusovej zastávky 1 km *ďaleko a škola sa začína o* 5 minút*. Akou najmenšou priemernou rýchlosťou musí Róberta bežať, aby stihla prísť do školy načas?*

Priemerná rýchlosť nejakého pohybu sa rovná podielu celkovej dráhy, ktorú niekto prešiel, a celkového času, za ktorý túto dráhu prešiel. V tomto prípade Róberta musí prejsť aspoň 1 km za 5 min. Takúto rýchlosť by sme ale potrebovali v nejakých jednotkách, ktoré sa bežne používajú, napríklad v kilometroch za hodinu. 5 min je dvanástina hodiny. Uvedomme si, že ak Róberta nejakou priemernou rýchlosťou prejde za 5 min vzdialenosť 1 km, tak za 12 takýchto intervalov prejde 12 km. Takže touto priemernou rýchlosťou Róberta prejde 12 km za hodinu. Jej priemerná rýchlosť preto musí byť aspoň 12 km/h.

Úloha 3 ... nové bývanie

Katka si ide vymaľovať stenu v izbe. Stena je vysoká 2,5 m *a široká* 6 m*. Katke trvá vymaľovať jeden meter štvorcový presne* 2 minúty*. Koľko jej bude trvať vymalovať celú stenu?*

Najprv zistíme, akú veľkú plochu musí Katka vymaľovať celkovo. To je $2{,}5\,\mathrm{m} \cdot 6\,\mathrm{m} = 15\,\mathrm{m}^2$. Vieme, že na každý jeden meter štvorcový potrebuje dve minúty, a teda na celú stenu potrebuje $15 \cdot 2\,\mathrm{min} = 30\,\mathrm{min}$.

Úloha 4 ... osemsmerovka

Osemsmerovka je slovná hra, kde hľadáš slová vpísané do štvorčekovej siete. V každom štvorčeku je jedno písmeno. Každé slovo môže byť umiestnené v ôsmich rôznych smeroch a svoj smer nemení. Koľkými spôsobmi vieme umiestniť slovo NABOJ do osemsmerovky rozmerov 5×5*? Na obrázku môžeš vidieť niekoľko možných umiestnení slova NABOJ do osemsmerovky s rozmermi* 5×5*.*

J				
O				
B				
A				
N				

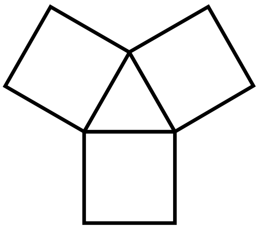
N	A	B	O	J

				N
			A	
		B		
	O			
J				

Všimnime si, že ak vieme napísať slovo do osemsmerovky jedným spôsobom, vieme ho napísať aj opačne. Preto môžeme uvažovať iba štyri rôzne smery – dva diagonálne, vodorovný a zvislý. Výsledný počet možností potom dostaneme tak, že počet možností pre tieto prípady vynásobíme číslom dva. Uhlopriečky máme dve – sprava hore doľava dole a zľava hore doprava dole. Uhlopriečky nám preto zabezpečia $2 \cdot 2 = 4$ možnosti, ako vpísať slovo *NABOJ* do osemsmerovky. Pre zvislý smer máme 5 možností a takisto 5 možností aj pre vodorovný smer. Spolu so slovami *NABOJ* napísanými opačným smerom máme pre vodorovné a zvislé smery spolu $2 \cdot 5 + 2 \cdot 5 = 20$ možností. Preto máme dokopy $4 + 20 = 24$ možností, ako vpísať slovo *NABOJ* do osemsmerovky.

Úloha 5 ... umelecké cítenie

Lukáš nakreslil rovnostranný trojuholník so stranou dĺžky 6 cm. *Potom dokreslil tri štvorce tak, ako vidíš na obrázku. Aký bol obvod nakresleného útvaru?*



Všetky tri štvorce majú jednu stranu spoločnú so stranou vnútorného rovnostranného trojuholníka. Keďže rovnostranný trojuholník má stranu dlhú 6 cm, má aj každý zo štvorcov všetky svoje strany dlhé 6 cm. Každý zo štvorcov prispieva do obvodu celého útvaru tromi svojimi stranami. Prispieva tak dĺžkou $3 \cdot 6\,\text{cm} = 18\,\text{cm}$. Tieto štvorce sú tri, a tak je obvod celého útvaru rovný $3 \cdot 18\,\text{cm} = 54\,\text{cm}$.

Úloha 6 ... čakanie na obrázok

Marcel odfotil zaujímavý obrázok a teraz ho chce poslať Nine cez internet. Obrázok má veľkosť 5 MB. *Obaja majú rýchlosť nahrávania na internet* 0,5 MB/s *a rýchlosť sťahovania z internetu* 1 MB/s. *Pred tým, ako sa obrázok dá začať sťahovať, musí byť celý nahratý na internete. Najmenej ako dlho musí Nina čakať na obrázok od momentu, kedy ho Marcel začne nahrávať na internet?*

Rýchlosť nahrávania na internet je veličina, ktorá udáva, aké množstvo dát sa nahrá na internet za nejakú jednotku času. Teda, ak je rýchlosť nahrávania 0,5 MB/s, tak sa za sekundu na internet nahrá 0,5 MB dát. V prípade Marcelovho obrázku, ktorý má 5 MB, tvorí 0,5 MB jednu desatinu jeho veľkosti. Takže na nahratie obrázku na internet je potrebných 10 s. Podobne to funguje pri sťahovaní obrázku z internetu, akurát dáta prechádzajú z internetu k užívateľovi. Nina má rýchlosť sťahovania 1 MB/s, a preto obrázok s veľkosťou 5 MB stiahne za 5 s. Ak teda Nina začne obrázok sťahovať hneď po tom, ako sa nahrá na internet, bude musieť naň čakať dohromady $10\,\mathrm{s} + 5\,\mathrm{s} = 15\,\mathrm{s}$.

Úloha 7 ... klamársky papier

Pali našiel na zemi papier, na ktorom bolo niekoľko viet a každá mala číslo.

(1) *Existuje len jedno celé číslo také, že ak ho vynásobíme samo so sebou, tak dostaneme číslo 4.*

(10) *Artimetický priemer dvoch celých čísel nikdy nie je väčší ako obe tieto čísla zároveň.*

(100) *Ak je nejaké celé číslo deliteľné štvorkou, tak je deliteľné aj dvojkou.*

(1 000) *Každé prvočíslo je nepárne.*

(10 000) *Ak a, b, c sú celé čísla také, že $a < b$ a $b < c$, tak potom platí aj $a < c$.*

Aký je súčet čísel viet, ktoré sú pravdivé?

Rozoberme každé tvrdenie samostatne:

(1) Toto tvrdenie je nepravdivé, pretože túto vlastnosť majú dve čísla, 2 a -2.

(10) Toto tvrdenie je pravdivé, pretože aritmetický priemer dvoch čísel vždy leží medzi týmito dvomi číslami (ak sú čísla rôzne) alebo sa rovná obom číslam (ak sú rovnaké). Ale nikdy nie je väčší ako obe.

(100) Toto tvrdenie je tiež pravdivé. Ak je totiž nejaké číslo deliteľné číslom 4, má v prvočíselnom rozklade aspoň dvakrát číslo 2, a tak je nutne aj deliteľné 2.

(1 000) Toto tvrdenie nepravdivé, lebo aj číslo 2, ktoré je párne, je prvočíslo.

(10 000) Toto tvrdenie je pravdivé. Ak začneme s nejakým číslom, zoberieme si číslo od neho väčšie a napokon si vezmeme ešte väčšie číslo, bude toto číslo isto väčšie ako číslo, s ktorým sme začali.

Takže pravdivé sú vety s číslami 10, 100 a 10 000. Súčet čísel pravdivých viet je preto 10 110.

Úloha 8 ... odporná úloha

Krtko sa hral s tromi rezistormi s odpormi $1\,\Omega$, $2\,\Omega$ a $3\,\Omega$. Aký najväčší odpor môže dostať za pomoci týchto troch rezistorov a nekonečného množstva drôtu s nulovým odporom?

Keď všetky rezistory zapojíme sériovo, bude mať výsledné zapojenie odpor $1\,\Omega + 2\,\Omega + 3\,\Omega = 6\,\Omega$. Rozmyslíme si, že toto je najväčší odpor, ktorý pomocou týchto troch rezistorov vieme dostať. Na to si ukážeme, že ak by boli niektoré z rezistorov zapojené paralelne, tak by sme vedeli zvýšiť odpor celého zapojenia tým, že ich namiesto toho zapojíme sériovo.

Ukážeme si to na paralelnom zapojení v dvoch vetvách (ak by bolo vetiev viac, mohli by sme jednu z vetiev pokladať za samostatnú vetvu a všetky ostatné vetvy pokladať za jednu vetvu). Ak máme v jednej z vetiev celkový odpor R_1 a v druhej celkový odpor R_2, tak celkový odpor tohto zapojenia je

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}\,.$$

V prípade sériového zapojenia ale máme odpor zapojenia $R^* = R_1 + R_2$. Chceme teda ukázať, že platí

$$R_1 + R_2 \geq \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}\,.$$

To je ale po úpravách ekvivalentné s nerovnosťou

$$R_1^2 + R_1 \cdot R_2 + R_2^2 \geq 0.$$

Táto nerovnosť ale platí, keďže všetky členy na ľavej strane sú kladné. Preto vieme každé paralelné zapojenie rezistorov prerobiť na sériové zapojenie tých istých rezistorov a tým zvýšiť celkový odpor celého zapojenia. Preto je aj v nami riešenej úlohe najlepšie, aby boli všetky rezistory zapojené sériovo, čiže odpor $6\,\Omega$ je naozaj najväčší odpor, ktorý vieme dosiahnuť.

Úloha 9 ... hraničná kolóna

Na hraničnom priechode stojí dlhý rad áut. Každú hodinu prejde cez hranicu priemerne 300 *áut. Priemerne ako často vidí Peťo sediaci v búdke hraničného priechodu prejsť okolo seba auto?*

Za hodinu prejde cez hranice priemerne 300 áut. To znamená, že za minútu ich prejde priemerne $300/60 = 5$. Keď ešte premeníme minúty na sekundy, dostaneme, že cez hranice prejde 5 áut každých $60\,\mathrm{s}$. Jedno auto tak prejde cez hranice priemerne každých $60\,\mathrm{s}/5 = 12\,\mathrm{s}$. Preto aj Peťo vidí prechádzať nejaké auto priemerne každých $12\,\mathrm{s}$.

Úloha 10 ... myslím si číslo

Hanka si myslí tri čísla. Ak ich všetky sčíta, dostane súčet 20*. Prvé číslo je štvornásobkom súčtu ostatných dvoch. Druhé číslo je zase sedemnásobkom tretieho čísla. Aký je súčin Hankiných čísel?*

V zadaní máme informáciu, že prvé číslo je štvornásobkom súčtu ostatných dvoch. Súčet všetkých čísel sa tak dá rozdeliť na päť rovnakých dielov, z ktorých štyri budú pripadať prvému z čísel a jeden súčtu zvyšných dvoch. Prvé číslo sa tak rovná štyrom pätinám súčtu všetkých čísel, a tak má hodnotu $20 \cdot 4/5 = 16$. Zvyšné dve čísla tak majú súčet $20/5 = 4$.

Zo zadania ďalej vieme, že druhé číslo sa rovná sedemnásobku tretieho čísla. Súčet druhého a tretieho čísla tak potrebujeme rozdeliť na osem rovnakých dielov, z ktorých sedem pripadne druhému číslo a jeden tretiemu číslu. Druhé číslo má preto hodnotu $4 \cdot 7/8 = 7/2$ a tretie číslo hodnotu $4/8 = 1/2$. Súčin Hankiných čísel je preto

$$16 \cdot \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{2} = 28\,.$$

Úloha 11 ... rozhojdaná

Dve deti sa chcú hojdať na hojdačke podopretej v strede. Chlapec s hmotnosťou $50\,\mathrm{kg}$ *sedí na tyči vo vzdialenosti* $0{,}6\,\mathrm{m}$ *od bodu, v ktorom je podopretá. Ako ďaleko od chlapca si má sadnúť dievča s hmotnosťou* $40\,\mathrm{kg}$*, aby sa na hojdačke dokázali hojdať?*

Keby si dievča sadlo na rovnakú stranu hojdačky, ako sedí chlapec, nevedeli by sa hojdať. Preto si musí sadnúť na opačnú stranu miesta, v ktorom je hojdačka podopretá. Na to, aby sa deti vedeli hojdať na hojdačke, musia sa rovnať momenty síl, ktorými pôsobia na hojdačku. Chlapec pôsobí na hojdačku momentom sily $M_1 = m_1 g r_1$, kde $m_1 = 50\,\mathrm{kg}$ je chlapcova hmotnosť a $r_1 = 0{,}6\,\mathrm{m}$ je jeho vzdialenosť od bodu otáčania hojdačky. Podobne pôsobí dievča momentom $M_2 = m_2 g r_2$, kde $m_2 = 40\,\mathrm{kg}$ je jej hmotnosť a r_2 je jej vzdialenosť od bodu, v ktorom je hojdačka podopretá. Keďže sa majú rovnať tieto dva momenty, tak má byť splnená rovnosť

$$m_1 g r_1 = m_2 g r_2\,.$$

Po predelení tiažovým zrýchlením g dostávame ekvivalentný vzťah

$$m_1 r_1 = m_2 r_2\,.$$

Zaujíma nás hodnota r_2, a tak ju vyjadrime

$$r_2 = \frac{m_1}{m_2} r_1 = \frac{60\,\mathrm{kg}}{40\,\mathrm{kg}} \cdot 0{,}6\,\mathrm{m} = 0{,}75\,\mathrm{m} = 75\,\mathrm{cm}\,.$$

Dievča je tak od bodu, v ktorom je hojdačka podopretá, vzdialená $75\,\mathrm{cm}$. Od tohto bodu ale opačným smerom sedí chlapec vo vzdialenosti $r_1 = 0{,}6\,\mathrm{m} = 60\,\mathrm{cm}$, takže dievča bude od chlapca sedieť vo vzdialenosti $r_1 + r_2 = 60\,\mathrm{cm} + 75\,\mathrm{cm} = 135\,\mathrm{cm} = 1{,}35\,\mathrm{m}$.

Úloha 12 ... kytice

Dávid chce Veronike k narodeninám kúpiť kyticu kvetov. Má 23 kupónov do kvetinárstva. Jedna ruža stojí jeden kupón, jedna ľalia stojí dva kupóny. Koľko rôznych kytíc môže Dávid kúpiť Veronike, ak minie všetky kupóny? Za rôzne kytice považujeme také, ktoré obsahujú rôzne zloženie kvetov.

Každá ruža stojí iba jeden kupón. Preto vždy, keď Dávid kúpi nejaké množstvo ľalií, vie zvyšok kvetov v kytici doplniť ružami. Počet rôznych kytíc, ktoré môže Dávid kúpiť Veronike, sa tak bude rovnať počtu možností, koľko ľalií môže byť v kytici. Najmenej ich môže byť 0 a najviac 11 (ak by ich bolo 12, potreboval by už 24 kupónov). Zároveň vie Dávid dostať všetky počty ľalií medzi 0 a 11. To znamená, že Dávid môže Veronike kúpiť 12 rôznych kytíc.

Úloha 13 ... poloplný bazén

Kubo má doma rôzne nádoby na vodu: malý pohár s objemom $0{,}5\,\mathrm{dl}$*, veľký pohár s objemom* $300\,\mathrm{cm}^3$*, džbán s objemom* $0{,}5\,\mathrm{dm}^3$*, hrniec s objemom* $1\,\mathrm{l}$ *a vedro s objemom* $0{,}05\,\mathrm{hl}$*. Každú nádobu naplnil* 100*-krát vodou a vylial do sprvu prázdneho bazéna na záhrade, ktorý má objem* $0{,}8\,\mathrm{m}^3$*. Koľko litrov vody ešte treba priliať do bazéna, aby bol bazén úplne plný?*

Premeňme všetky objemy na litre, pretože v nich máme odovzdať riešenie. Popri tom pamätajme, že objem $1\,\mathrm{l}$ je totožný s objemom $1\,\mathrm{dm}^3$. Malý pohár má objem $0{,}5\,\mathrm{dl} = 0{,}05\,\mathrm{l}$. Veľký pohár má objem $300\,\mathrm{cm}^3 = 0{,}3\,\mathrm{l}$. Džbán má objem $0{,}5\,\mathrm{dm}^3 = 0{,}5\,\mathrm{l}$. Hrniec má objem $1\,\mathrm{l}$. Vedro má objem $0{,}05\,\mathrm{hl} = 5\,\mathrm{l}$.

Keď každú z týchto nádob raz naplníme a vylejeme do bazéna, vylejeme do bazéna

$$0{,}05\,\mathrm{l} + 0{,}3\,\mathrm{l} + 0{,}5\,\mathrm{l} + 1\,\mathrm{l} + 5\,\mathrm{l} = 6{,}85\,\mathrm{l}$$

vody. Keď toto spravíme 100-krát, vylejeme do bazéna $100 \cdot 6{,}85\,\mathrm{l} = 685\,\mathrm{l}$ vody. Bazén má objem $0{,}8\,\mathrm{m}^3 = 800\,\mathrm{l}$. Aby sme úplne naplnili bazén, potrebujeme doň priliať ešte $800\,\mathrm{l} - 685\,\mathrm{l} = 115\,\mathrm{l}$ vody.

Úloha 14 ... frisbee v parku

Mišo a Ela si v parku hádžu lietajúci tanier. Stoja od seba vzdialení 90 m*, keď tu zrazu Ela hodí Mišovi tanier rýchlosťou* 36 km/h *tak, že tanier letí k Mišovi rovnomerne priamočiaro. V tej istej chvíli sa Mišo rozbehne smerom k Ele konštantnou rýchlosťou a tanier chytí o* 6 s *odkedy ho Ela hodila. Ako rýchlo beží Mišo?*

Na úvod si premeňme rýchlosť letu taniera z kilometrov za hodinu na metre za sekundu. Rýchlosť 36 km/h je rovnaká ako rýchlosť 10 m/s. Na to, aby Mišo chytil disk po 6 sekundách, musí sa k disku približovať rýchlosťou $90\,\mathrm{m}/6\,\mathrm{s} = 15\,\mathrm{m/s}$. Rýchlosť, ktorou sa Mišo približuje k tanieru, sa ale rovná súčtu rýchlostí letu taniera a Mišovho behu. Mišo preto beží rýchlosťou $15\,\mathrm{m/s} - 10\,\mathrm{m/s} = 5\,\mathrm{m/s}$.

Úloha 15 ... násobenie z rýchlika

Keď sa Maťo nudil vo vlaku, rozhodol sa vypočítať, koľko je $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 2017 \cdot 2019$. *Koľko núl na konci má tento súčin?*

Pozrime sa na to, či vôbec môže vzniknúť nejaká nula na konci Maťovho súčinu. Aby nejaké číslo končilo nejakou nulou, musí byť deliteľné desiatimi, teda súčasne deliteľné dvomi a piatimi. Avšak my násobíme samé nepárne čísla. To znamená, že aj výsledný súčin musí byť nepárny. Takže tento súčin nie je deliteľný dvomi, a tak nemôže končiť nulou. Na konci tohto súčinu sa teda žiadna nula nenachádza.

Úloha 16 ... kinematografická kinematika

Miška išla zo svojej rodnej dediny autom do kina v meste. Mimo mesta prešla päťkrát väčšiu dráhu než v meste. V meste išla trikrát pomalšie ako mimo mesta. Od kraja mesta do kina jej cesta trvala 30 min*. Ako dlho jej trvala cesta do mesta t.j. ako dlho išla z dediny na kraj mesta?*

Zo zadania vieme, že časť cesty, ktorú išla Miška od kraja mesta do kina, jej trvala 30 min. Keby prešla túto vzdialenosť rýchlosťou, ktorou išla mimo mesta, teda trikrát väčšou, prešla by ju za trikrát kratší čas. Čiže prejsť túto vzdialenosť by jej trvalo iba 10 min. Mimo mesta prešla Miška touto rýchlosťou päťkrát väčšiu vzdialenosť, takže jej to muselo trvať päťkrát dlhšie. To znamená, že Miška musela ísť z dediny na kraj mesta 50 min.

Úloha 17 ... výroky v kruhu

Do kruhu sa postavilo dvanásť ľudí a každý z nich povedal nasledovné tri výroky:

- *„Žijem v Poľsku.“*
- *„Osoba po mojej ľavici žije v Českej republike.“*
- *„Aspoň jeden z dvoch ľudí stojacich vedľa mňa žije v Poľsku, Českej republike alebo na Slovensku.“*

Potom si uvedomili, že zo všetkých 36 *výrokov boli pravdivé iba* 2*. Koľkí z nich žili na Slovensku?*

Keby bol v kruhu nejaký Poliak, tak by on sám hovoril pravdu, keď by hovoril, že žije v Poľsku. Navyše by pravdu hovorili aj obaja jeho susedia, keď by hovorili tretí z výrokov. Takže by boli pravdivé aspoň 3 z výrokov. Takže v kruhu nestojí žiadny Poliak. Keby bol v kruhu nejaký

Čech, bol by pravdivý druhý výrok osoby stojacej napravo od neho a navyše by boli pravdivé tretie výroky oboch jeho susedov. Znova by tak museli byť aspoň 3 výroky pravdivé. Preto v kruhu nestojí ani žiadny Čech. Ak by bol v kruhu nejaký Slovák, hovorili by pravdu iba jeho dvaja susedia počas toho, ako by hovorili svoj tretí výrok. To nám hneď dá požadované 2 pravdivé výroky. Keby sme pridali ďalšieho Slováka, bolo by pravdivých výrokov už priveľa. To znamená, že v kruhu je najviac jeden Slovák. Pridaním ľudí z iných národností nezväčšíme počet pravdivých výrokov. Presne 2 pravdivé výroky tak dosiahneme iba vtedy, ak bude v kruhu iba 1 Slovák a všetci ostatní budú z krajín rôznych od Slovenska, Česka alebo Poľska. V kruhu tak stál iba jeden človek, ktorý žil na Slovensku.

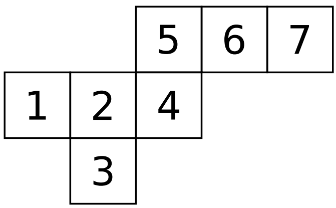
Úloha 18 ... kartičky

Karol má 4 kartičky. Na každej je napísané jedno číslo. Karol vždy vezme dve kartičky a sčíta čísla na nich. Keď toto urobí pre všetky možné dvojice kartičiek, dostane trikrát súčet 14 a trikrát súčet 12. Aký je súčet čísel na všetkých kartičkách?

Každú z kartičiek sme do niektorého zo súčtov započítali presne trikrát – raz s každou zo zvyšných kartičiek. Preto ak sčítame všetky súčty, ktoré Karol dostal, dostaneme trojnásobok súčtu čísel na všetkých kartičkách. Tento trojnásobok súčtu čísel na kartičkách sa tak rovná číslu $3 \cdot 14 + 3 \cdot 12 = 78$. Súčet čísel na všetkých kartičkách sa preto rovná $78/3 = 26$.

Úloha 19 ... sieť kocky

Jurko si z papiera vystrihol sieť kocky ako na obrázku. Má ale o jeden štvorček viac ako by mala mať. Preto chce Jurko nejaký štvorček odstrihnúť tak, aby sieť ostala na jednom kuse papiera, a zároveň aby z nej vedel poskladať kocku. Ktoré štvorčeky môže odstrihnúť?



Keby sme odstrihli niektorý zo štvorčekov 2, 4, 5 alebo 6, nezostala by celá sieť súvislá. Preto môžeme odstrihnúť iba niektorý zo štvorčekov 1, 3 alebo 7. Ak by sme si vystrihli rovnakú sieť, ako má Jurko, a skúsili ju poskladať, zistili by sme, že štvorček 1 musí byť oproti štvorčeku 4 a štvorček 2 musí byť oproti štvorčeku 6. Čo je ale zaujímavejšie, štvorček 7 musí byť oproti štvorčeku 5, ale ten musí byť taktiež oproti štvorčeku 3. Oproti štvorčeku 5 však nemôžu byť 2 štvorčeky zároveň, preto musíme niektorý zo štvorčekov 3 a 7 odstrihnúť. Nakoniec si všimnime, že ak ktorýkoľvek z nich odstrihneme, budeme vedieť poskladať kocku. Môžeme tak odstrihnúť ktorýkoľvek zo štvorčekov 3 a 7.

Úloha 20 ... závažný experiment

Vedci v krajine Nábojovo urobili nasledovný experiment. Vzali železnú kocku a vyrezali z jednej steny kúsok, ktorý obsahoval $10\,\mathrm{cm}^2$ *z povrchu kocky. Následne vzali závažie presne rovnakého* *tvaru ako mala vyrezaná časť a vložili ho do kocky. Potom v kocke vytvorili vákuum – okolo kocky však zostal vzduch. Otočili kocku tak, že závažie smerovalo nadol. Akoby zázrakom závažie z kocky nevypadlo. Aká najväčšia mohla byť hmotnosť závažia?*

Pozrime sa na to, aké sily pôsobia na závažie. Smerom nadol naň pôsobí tiažová sila F_G, ktorej veľkosť je $F_G = mg$, kde m je hmotnosť tohto závažia a g je tiažové zrýchlenie. Mimo kocky sa nachádza vzduch s atmosferickým tlakom p_A, ktorý na závažie pôsobí smerom nahor tlakovou silou $F_\mathrm{T} = Sp_\mathrm{A}$ ($S = 10\,\mathrm{cm}^2 = 0{,}001\,\mathrm{m}^2$ je plocha vyrezanej časti kocky). Vnútri kocky je vákuum, ktorého tlak je nulový, a tak nepôsobí na závažie žiadnou tlakovou silou. Na to, aby závažie z diery nevypadlo, musí byť veľkosť tlakovej sily F_T na závažie aspoň taká veľká ako veľkosť tiažovej sily F_G, tj. $F_\mathrm{T} \geq F_G$. Po dosadení má platiť

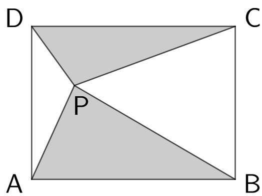
$$S\,p_\mathrm{A} \geq mg\,, \quad \Rightarrow \quad m \leq \frac{S\,p_\mathrm{A}}{g} = \frac{0{,}001\,\mathrm{m}^2 \cdot 100\,000\,\mathrm{Pa}}{10\,\mathrm{m/s^2}} = 10\,\mathrm{kg}\,.$$

Najväčšia možná hodnota hmotnosti závažia tak je 10 kg.

Úloha 21 ... bod v obdĺžniku

Laura si nakreslila obdĺžnik ABCD *taký, že pomer dĺžok strán* AB *a* BC *bol* $4:3$. *Následne do vnútra obdĺžnika nakreslila bod* P *a všimla si, že obsahy trojuholníkov* ABP, BCP *a* CDP *boli postupne* $17\,\mathrm{cm}^2$, $42\,\mathrm{cm}^2$ *a* $47\,\mathrm{cm}^2$. *Aký je obsah trojuholníka* DAP*?*

Trojuholníky ABP a CDP majú každý jednu stranu rovnako dlhú ako dlhšia strana obdĺžnika ABCD. Výšku na túto stranu predstavuje vzdialenosť bodu P od tejto strany. Súčet vzdialeností P od oboch týchto strán je ale rovná dĺžke kratšej zo strán obdĺžnika. Preto ak počítame obsahy trojuholníkov ABP a CDP, tak vieme tento súčet vypočítať priamo zo zadania: $17\,\mathrm{cm}^2 + 47\,\mathrm{cm}^2 = 64\,\mathrm{cm}^2$. Na druhej strane sa tento súčet obsahov rovná polovici dĺžky dlhšej zo strán obdĺžnika ABCD vynásobenej dĺžkou kratšej strany tohto obdĺžnika. Preto majú tieto dva trojuholníky súčet obsahov rovný polovici obsahu obdĺžnika ABCD. Podobne ale majú aj trojuholníky BCP a DAP spolu obsah $64\,\mathrm{cm}^2$. Preto má trojuholník DAP obsah $64\,\mathrm{cm}^2 - 42\,\mathrm{cm}^2 = 22\,\mathrm{cm}^2$.



Úloha 22 ... poloprázdny bazén

Dano si kúpil vodné čerpadlo, ktoré chce použiť na naplnenie svojho bazéna. V príručke sa píše, že čerpadlo je schopné čerpať vodu objemovým prietokom $2\,\mathrm{dm^3/s}$. *Bazén je dlhý* 9 m, *široký* 3 m *a hlboký* 2 m. *Ako dlho potrvá, kým čerpadlo prázdny bazén doplna naplní vodou?*

To, že čerpadlo dokáže čerpať vodu objemovým prietokom $2\,\mathrm{dm^3/s}$, znamená, že prečerpá vodu s objemom $2\,\mathrm{dm}^3 = 0{,}002\,\mathrm{m}^3$ za každú jednu sekundu. Dano chce týmto čerpadlom naplniť bazén s objemom $9\,\mathrm{m} \cdot 3\,\mathrm{m} \cdot 2\,\mathrm{m} = 54\,\mathrm{m}^3$. Čerpadlu bude prečerpanie vody s objemom $54\,\mathrm{m}^3$ trvať

$$\frac{54\,\mathrm{m}^3}{0{,}002\,\mathrm{m}^3/\mathrm{s}} = 27\,000\,\mathrm{s} = 450\,\mathrm{min} = 7{,}5\,\mathrm{h}\,.$$

Čerpadlu bude naplnenie bazéna trvať 7,5 h.

Úloha 23 ... po schodoch

V Nábojove sú zvláštne paneláky. Každý má prízemie a 9 poschodí. Schodisko z prízemia na prvé poschodie má niekoľko schodov. Následne každé ďalšie schodisko medzi dvoma poschodiami má o jeden schod viac ako to predchádzajce. Počet schodov, ktoré prejdeme po ceste z prízemia na piate poschodie, je rovnaký ako počet schodov, ktoré prejdeme z piateho poschodia na deviate. Koľko schodov má schodisko z prízemia na prvé poschodie?

Popárujme si niektoré schodiská. Konkrétne dajme do páru schodiská, ktoré vedú na druhé a šieste poschodie, na tretie a siedme poschodie, na štvrté a ôsme pochodie, na piate a deviate poschodie. Keď ich máme takto popárované, tak schodiská, ktoré sú v pároch ako prvé, tvoria cestu z prvého poschodia na piate. Schodiská, ktoré sú v pároch ako druhé, tvoria cestu z piateho na deviate poschodie. V každom páre má ale druhé z páru o 4 schody viac. Cesta z prvého poschodia na piate tak má o $4 \cdot 4 = 16$ schodov menej ako cesta z piateho na deviate poschodie. V zadaní ale máme, že cesta z prízemia na piate poschodie má rovnako veľa schodov ako cesta z piateho poschodia na deviate poschodie. Z toho hneď dostávame, že cesta z prízemia na piate poschodie má o 16 schodov viac ako cesta z prvého poschodia na piate. Tieto dve cesty sa ale líšia len v schodisku z prízemia na prvé poschodie, ktoré tak má 16 schodov.

Úloha 24 ... náboj - junior

Hovorca nedávno zistil, že protóny a neutróny sa skladajú z dvoch typov kvarkov – z kvarkov typu up *a kvarkov typu* down*. Protón obsahuje dva kvarky typu* up *a jeden kvark typu* down*. Neutrón zas obsahuje jeden kvark typu* up *a dva kvarky typu* down*. Uvedomil si, že elektrický náboj protónu aj neutrónu musí byť rovný súčtu elektrických nábojov kvarkov, ktoré obsahujú. Následne sa zamyslel – aký elektrický náboj by mala častica pozostávajúca z jedného kvarku typu* up *a jedného kvarku typu* down*?*

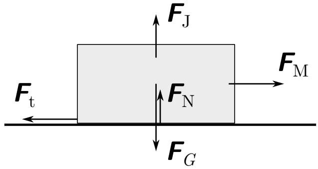
Výsledok uveďte ako násobok elementárneho elektrického náboja e*. Protón je častica s elektrickým nábojom* +e *a neutrón je častica bez elektrického náboja.*

Jeden protón a jeden neutrón majú spolu elektrický náboj +e. Spolu obsahujú 3 kvarky typu *up* a 3 kvarky typu *down*. Aby sme z tohto dostali „časticu“, ktorá by obsahovala jeden kvark typu *up* a jeden kvark typu *down*, potrebujeme počet kvarkov oboch typov zmenšiť na tretinu. Tým znížime aj elektrický náboj na tretinu. Hovorcova častica by tak mala elektrický náboj 1/3 e.

Úloha 25 ... blbosť na kvadrát

Jonáš a Miška položili na stôl kváder s hmotnosťou 2 kg*. Súčiniteľ šmykového trenia medzi kvádrom a stolom bol* 0,6*. Potom na kváder začali pôsobiť. Jonáš ho ťahal silou s veľkosťou* 5 N *smerom nahor. Miška zas ťahala kváder vodorovne tak, že sa kváder pohyboval stálou rýchlosťou. Akou silou pôsobila Miška?*

Pozrime sa na to, aké sily pôsobia na kváder.



Vo vodorovnom smere na kváder pôsobí sila F_M, ktorou pôsobí Miška a trecia sila F_t. Aby sa kváder pohyboval stálou rýchlosťou, musia mať tieto dve sily rovnakú veľkosť. Treciu silu ale ešte nevieme vypočítať. V zvislom smere na kváder pôsobí tiažová sila F_G a sila $F_J = 5\,\mathrm{N}$, ktorou pôsobí Jonáš. Tieto dve sily ale nemajú rovnakú veľkosť (zjavne $F_G > F_J$). Preto musí kváder samotný pôsobiť na podložku nejakou silou. Zo zákona akcie a reakcie ale musí potom podložka pôsobiť na tento kváder rovnako veľkou silou, ale opačného smeru. Táto sila je normálová sila F_N od podložky. Kváder sa vo vertikálnom smere nehýbe, a tak musí byť súčet síl, ktoré naň v tomto smere pôsobia rovný nule. Teda musí platiť $F_N = F_G - F_J$. Pomocou tejto sily vieme určiť veľkosť trecej sily, pretože tá závisí iba od normálovej sily F_N a súčiniteľa šmykového trenia $f = 0{,}6$. Konkrétne platí vzťah $F_t = fF_N$. Veľkosť tejto sily sa má rovnať veľkosti Miškinej sily F_M, ktorá tak má veľkosť

$$F_M = F_t = f\,(F_G - F_J) = f\,(mg - F_J) = 0{,}6 \cdot (2\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} - 5\,\mathrm{N}) = 9\,\mathrm{N}\,.$$

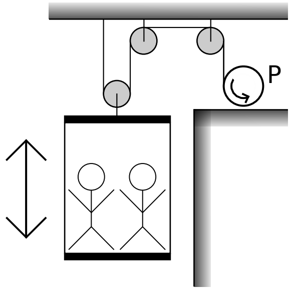
Úloha 26 ... spoločné násobky

Každý z trojice Alfonz, Bartolomej a Cyprián myslí na nejaké prirodzené číslo. Najmenší spoločný násobok Alfonzovho a Bartolomejovho čísla je 24. Najmenší spoločný násobok Bartolomejovho a Cypriánovho čísla je 40. Akú najmenšiu hodnotu môže mať najmenší spoločný násobok Alfonzovho a Cypriánovho čísla?

Najmenší spoločný násobok Alfonzovho a Bartolomejovho čísla čísla je deliteľný 3, ale najmenší spoločný násobok Bartolomejovho a Cypriánovho čísla nie je. Z toho vyplýva, že Bartolomejove číslo nie je deliteľné tromi, a tak Alfonzovo číslo musí byť. Z podobných dôvodov musí byť Cypriánovo číslo deliteľné piatimi. Najmenší spoločný násobok Alfonzovho a Cypriánovho čísla tak musí byť aspoň $3 \cdot 5 = 15$. Túto hodnotu aj vieme dosiahnuť. Stačí, aby Alfonz, Bartolomej a Cyprián mysleli postupne na čísla 3, 8 a 5. Ľahko overíme, že tieto čísla spĺňajú aj ostatné podmienky zo zadania. Najmenšia možná hodnota najmenšieho spoločného násobku Alfonzovho a Cypriánovho čísla je teda 15.

Úloha 27 ... výťah plný fyzikov

Na bratislavských internátoch sa skúša prelomová technológia výťahu, ktorého mechanizmus je znázornený na obrázku. Motor výťahu má výkon $1\,\mathrm{kW}$. *Určte maximálnu rýchlosť, ktorou sa vie smerom nahor pohybovať kabína výťahu, ak hmotnosť kabíny naplnenej študentmi je* $400\,\mathrm{kg}$.

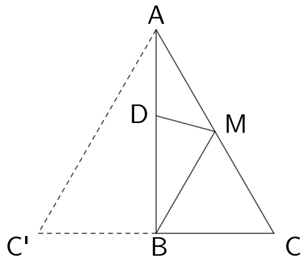


Bez ohľadu na to, ako vyzerá mechanizmus výťahu, používa výťah energiu iba na to, aby menil potenciálnu energiu kabíny so študentmi. Keď výťah zdvihne kabínu o výšku Δh, narastie potenciálna energia kabíny o energiu $\Delta E = mg\Delta h$, kde $m = 400\,\mathrm{kg}$ je hmotnosť kabíny a g je tiažové zrýchlenie. Ak navyše táto zmena prebehne za čas Δt, má motor výkon $P = 1\,\mathrm{kW} = 1\,000\,\mathrm{W} = \Delta E/\Delta t = mg\Delta h/\Delta t$. Výraz $\Delta h/\Delta t$ ale predstavuje rýchlosť v, ktorou sa pohybuje kabína výťahu. Keď ju zo vzorca vyjadríme, dostávame $v = P/mg = 1\,000\,\mathrm{W}/\left(400\,\mathrm{kg}\cdot 10\,\mathrm{m/s^2}\right) = 0{,}25\,\mathrm{m/s}$. Maximálna rýchlosť, akou sa vie výťah pohybovať, je preto $0{,}25\,\mathrm{m/s} = 25\,\mathrm{cm/s}$.

Úloha 28 . . . tie pravé starosti

Patrik nakreslil pravouhlý trojuhlník ABC *s pravým uhlom pri vrchole* B*. Veľkosť uhla* ∡BAC *bola* $30°$*. Do obrázku nakreslil aj bod* M*, ktorý bol stredom strany* AC*. Nakoniec nakreslil aj bod* D *na úsečku* AB *tak, aby platilo* |BD| = |BC|*. Určte veľkosť uhla* ∡BMD*.*

Trojuholník ABC má vnútorné uhly s veľkosťou $90°$, $30°$ a $180° - 90° - 30° = 60°$. Keby sme zobrali dva takéto trojuholníky a spojili ich stranou oproti uhlu s veľkosťou $60°$, dostali by sme trojuholník, ktorého všetky vnútorné uhly by mali veľkosť $60°$. Takýto trojuholník by bol preto rovnostranný. Keď sa pozrieme, akú úlohu v tomto trojuholníku zohráva pôvodný trojuholník, zistíme, že strana oproti uhlu s veľkosťou $90°$ je stranou tohto rovnostranného trojuholníka a že strana oproti uhlu v veľkosťou $30°$ je polovicou strany rovnostranného trojuholníka. V pôvodnom trojuholníku ABC tak platí |AC| = $2 \cdot$ |BC|.



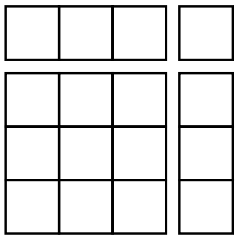
Keďže M je stredom AC, platí |CM| = |AC|/2 = |BC|. Preto je trojuholník BCM rovnoramenný so základňou BM. Uhol BCM má v tomto trojuholníku veľkosť $60°$. Z toho ľahko dopočítame, že aj zvyšné uhly v tomto trojuholníku majú veľkosť $60°$. Preto je tento trojuholník dokonca rovnostranný, a tak platí |BC| = |BM| = |CM|. Z toho, že M je stredom AC, ďalej máme |AM| = |CM| = |BM|, a tak je aj trojuholník ABM rovnoramenný so základňou AB. Takže veľkosť uhla ∡ABM je rovnaká ako veľkosť uhla ∡BAM, čiže $30°$.

Zo zadania napokon máme ešte to, že |BD| = |BC| = |BM|, a tak je aj trojuholník BDM rovnoramenný so základňou BM. Vieme, že veľkosť uhla ∡DBM je 30°. Oba zvyšné uhly tohto trojuholníka tak majú veľkosť $(180° - 30°)/2 = 75°$. To znamená, že veľkosť uhla ∡BMD je 75°.

Úloha 29 ... trpaslíčie dlaždice

Trpaslíci v krajine Nábojovo sa rozhodli vydláždiť svoje námestie švorcovými dlaždicami. Najprv prvý trpaslík položil do rohu námestia prvú dlaždicu. Potom prišiel druhý trpaslík a položil ďalšie dlaždice tak, že kachličky na námestí tvorili štvorec 2×2 dlaždíc. Tretí trpaslík doložil ďalšie dlažidce tak, aby sa počet dlaždíc na strane štvorca opäť zväčšil o 1. Takto trpaslíci pokračovali v dláždení námestia. Koľko dlaždíc položil 2019. trpaslík?

Zamerajme sa na to, ako pridáva každý trpaslík dlaždice. Napríklad sa pozrime na štvrtého trpaslíka. Ten pridáva dlaždice tak ako na obrázku – k dvom zo strán pridá toľko dlaždíc, koľko ich bolo v jednom rade predošlého štvorca, a pridá k tomu ešte jednu dlaždicu. Preto štvrtý trpaslík položil $3 + 3 + 1 = 7$ dlaždíc ako na obrázku. Podobne musí každý trpaslík priložiť dlaždice k dvom stranám predošlého štvorca a priložiť ešte jednu ďalšiu. 2 019. trpaslík tak musí položiť $2\,018 + 2\,018 + 1 = 4\,037$ dlaždíc.



Úloha 30 ... hádzanie lopty

Majo pustil loptu z výšky 10 m. Zakaždým, keď sa lopta odrazila od zeme, stratila polovicu svojej rýchlosti. Koľkokrát sa lopta odrazila do výšky aspoň 1 cm?

Počas skákania lopty dochádza neustále k premene potenciálnej energie na kinetickú a naopak. Ak loptu pustíme z nejakej výšky, tak na začiatku predstavuje celkovú energu lopty jej potenciálna energia. Tesne pred dopadom je už všetka energia premenená z potenciálnej na kinetickú. Pri odraze lopta nejakú kinetickú energiu stratí a potom sa odrazí naspäť do vzduchu. Nakoniec lopta vyletí do novej maximálnej výšky, kde bude znova jej celková energia rovná potenciálnej energii, a celý proces sa opakuje.

Pre kinetickú energiu E_k platí $E_\mathrm{k} = mv^2/2$, kde v je rýchlosť lopty a m je jej hmotnosť. Preto ak sa rýchlosť lopty zmenší na polovicu, zmenší sa hodnota jej kinetickej energie na štvrtinu. Ak teda zmenšíme kinetickú energiu lopty tesne po odraze na štvrtinu, zmenší sa aj jej potenciálna energia v maximálnej výške na štvrtinu. Vzťah pre výpočet potenciálnej energie E_p má tvar $E_\mathrm{p} = mgh$, kde m je hmotnosť, g je tiažové zrýchelnie a h je výška. Takže keď znížime potenciálnu energiu, ktorú bude lopta mať v najvyššom bode, na štvrtinu, musí sa lopta odraziť do štyrikrát menšej výšky.

Už nám preto stačí len zistiť, koľkokrát môžeme vydeliť $10\,\mathrm{m} = 1\,000\,\mathrm{cm}$ štvorkou, aby sme už dostali výšku menšiu ako ako 1 cm. Ľahko zistíme, že po štvrtom odraze sa lopta odrazí do výšky $1\,000\,\mathrm{cm}/4^4 = 1\,000\,\mathrm{cm}/256 > 1\,\mathrm{cm}$. Po piatom odraze by sa lopta odrazila iba do výšky $1\,000\,\mathrm{cm}/4^5 = 1\,000\,\mathrm{cm}/1024 < 1\,\mathrm{cm}$. Do výšky aspoň 1 cm sa preto lopta odrazí práve 4-krát.

Úloha 31 . . . hustý elixír

Čarodejník Bubu vložil pohár do vody, pričom sa ponorili $3/5$ *jeho objemu. Potom tento istý pohár vložil do čarovného elixíru, kde sa ponoril do* $3/4$ *svojho objemu. Aká je hustota čarovného elixíru?*

Keď si vezmeme nejaké teleso s hustotou ϱ_1 a objemom V a necháme ho plávať na kvapaline s hustotou ϱ_2 ($\varrho_2 > \varrho_1$), bude objem ponorenej časti telesa V' rovný

$$V' = \frac{\varrho_1}{\varrho_2} V\,.$$

Hustota pohára sa preto rovná 3/5 hustoty vody, čiže $600\,\mathrm{kg/m^3}$. Zároveň sa táto hustota rovná 3/4 hustoty čarovného elixíru. Ten má tak hustotu $800\,\mathrm{kg/m^3}$.

Úloha 32 . . . riešte UFO

Ufón Kubo a Ufónka Jonka žijú na planéte, ktorá centrálnu hviezdu obieha v smere hodinových ručičiek a okolo svojej osi sa točí tiež v smere hodinových ručičiek. „Ufónskym dňom“ nazývajú časový úsek medzi dvoma nasledujúcimi západmi centrálnej hviezdy. Každý ufónsky deň trvá 6 hodín. *Centrálnu hviezdu planéta obehne za* 35 *ufónskych dní. Ako dlho (v pozemských jednotkách) trvá otočenie planéty okolo svojej osi?*

Mohlo by sa zdať, že jedno otočenie planéty okolo svojej osi trvá rovnako dlho ako jeden ufónsky deň. Ale tak to nie je. Vyberme si nejaký bod na planéte v momente, keď v ňom vychádza centrálna hviezda. Po tom, ako sa planéta otočí okolo vlastnej osi, bude planéta otočená presne rovnako vzhľadom na okolitý vesmír ako predtým. Avšak sa ešte o niečo otočila vzhľadom na centrálnu hviezdu. Keďže sa planéta točí rovnakým smerom ako obieha okolo hviezde, bude v tomto čase na planéte ešte len tesne pred východom centrálnej hviezdy. Počas jedného obehu planéty okolo centrálnej hviezdy sa takéto posuny nasčítajú tak, že počas 35 ufónskych dní sa planéta otočí okolo vlastnej osi 36-krát. To si vieme vysvetliť takto: planéta sa síce otočí okolo vlastnej osi 36-krát, ale jeden obeh okolo centrálnej hviezdy spôsobí, že pozorovateľ na planéte uvidí vychádzať centrálnu hviezdu o jedenkrát menej, teda iba 35-krát. 35 ufónskych dní trvá $35 \cdot 6 \cdot 60\,\mathrm{min} = 12\,600\,\mathrm{min}$. Takže planéte trvá otočenie sa okolo vlastnej osi $12\,600\,\mathrm{min}/36 = 350\,\mathrm{min}$.

Úloha 33 . . . násobenie z osobáku

Keď sa Hanka nudila vo vlaku, rozhodla sa vypočítať, koľko je $2\,019 \cdot 2\,019 \cdot 2\,019 \cdot 2\,019$. *Potom sčítala cifry výsledku, ktorý dostala. Dostala nové číslo, ktorému opäť sčítala cifry. Takto pokračovala až kým jej nezostalo jednociferné číslo. Aké číslo to bolo?*

Všimnime si, že číslo 2 019 je deliteľné tromi ($2\,019 = 3 \cdot 673$). Súčin štyroch čísel 2 019 je preto určite deliteľný deviatkou. Ak je ale nejaké číslo deliteľné deviatkou, je aj jeho ciferný súčet deliteľný deviatkou. Ale keď je ciferný súčet nejakého čísla deliteľný deviatkou, je deviatkou deliteľný aj ciferný súčet tohto ciferného súčtu. Takto by sme mohli pokračovať. To ale znamená, že výsledné jednociferné číslo musí tiež byť deliteľné deviatkou. Keďže také čísla sú dve - 0 a

9, sú obe vhodným kandidátom na výsledné jednociferné číslo. Avšak žiadne číslo okrem nuly nemá ciferný súčet 0, a tak musela Hanka nutne dostať číslo 9.

Úloha 34 ... kúpeľ koruny

Archimedes dostal od kráľa za úlohu zistiť, či je nová kráľova koruna vyrobená z čistého zlata alebo bolo do nej pridané striebro. Archimedes ponoril korunu do vody a zistil, že jej objem je 0,14 l*. To isté spravil s čistým zlatom a čistým striebrom rovnakej hmotnosti, ako mala koruna. Zlato malo objem* 0,11 l *a striebro malo objem* 0,20 l*. Potom vyhlásil, že koruna nie je ukovaná z čistého zlata. Akú časť hmotnosti koruny tvorilo zlato?*

Nech zlato tvorí p hmotnosti koruny, kde p je číslo medzi 0 a 1. Striebro potom tvorí $1-p$ hmotnosti koruny. Keď zlato tvorí p hmotnosti koruny, je jeho objem v korune pV_{Au}. Podobne je objem striebra v korune $(1-p)V_{\mathrm{Ag}}$. Súčet týchto objemov by sa mal rovnať objemu celej koruny. Preto má platiť

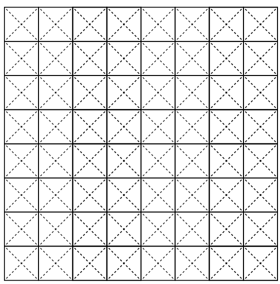
$$V = pV_{\mathrm{Au}} + (1-p)\,V_{\mathrm{Ag}}\,, \quad \Rightarrow \quad p = \frac{V_{\mathrm{Ag}} - V}{V_{\mathrm{Ag}} - V_{\mathrm{Au}}} = \frac{0{,}20\,\mathrm{l} - 0{,}14\,\mathrm{l}}{0{,}20\,\mathrm{l} - 0{,}11\,\mathrm{l}} = \frac{2}{3}\,.$$

Zlato tvorí 2/3 hmotnosti koruny.

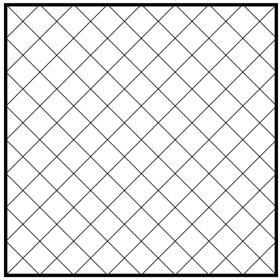
Úloha 35 ... strihanie papiera

Terka má štvorec z papiera s rozmermi 8 cm × 8 cm*. Dvakrát ho preloží na polovicu a dostane štvorec s rozmermi* 4 cm × 4 cm*. Toto zopakuje ešte dvakrát, čím získa štvorec s rozmermi* 1 cm × 1 cm*. Následne zoberie nožnice a malý štvorec rozstrihne po oboch diagonálach. Na koľko kúskov sa rozpadne papier?*

Keby sme papier nerozstrihali, tak by po rozložení tvorili stopy po ohybe papiera štvorčekovú sieť 8×8 štvorčekov. Keď však papier rozstriháme, vznikne v každom štvorčeku tejto štvorčekovej siete krížik po prestrihnutí. Takže rozstrihnutia na tejto štvorčekovej sieti budú vyzerať tak ako na obrázku nižšie.



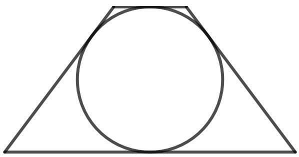
Keďže na tomto obrázku nevidno dobre, ako z tohoto vzniknú jednotlivé časti papiera, nakreslime si ešte jeden obrázok, ktorý neobsahuje hrany štvorčekovej siete:



Z toho hneď vidíme, že môžeme dostať dva typy útvarov – štvorce vo vnútornej časti papiera a trojuholníky na jeho okraji. Všimnime si, že každý štvorec aj trojuholník v sebe obsahuje iba jednu hranu štvorčekovej siete a navyše si všimnime to, že každá strana štvorčekovej siete je v práve jednom štvorci alebo trouholníku. Takže počet jednotlivých častí je rovnaký ako počet hrán štvorčekovej siete 8×8. Ľahko spočítame, že v každom smere je presne $8 \cdot 9 = 72$ hrán, čiže všetkých hrán je $2 \cdot 72 = 144$. Preto sa Terke rozpadne papier na 144 častí.

Úloha 36 ... hodina kreslenia

Laura si nakreslila rovnoramenný lichobežník s ramenami dĺžky 5 cm*. Zistila, že do svojho lichobežníka vie vpísať kružnicu s polomerom* 2 cm*. Aký bol obsah Laurinho lichobežníka?*



Nie každému štvoruholníku sa dá vpísať kružnica. Vlastnosť, že sa to dá, tak musí byť niečím špeciálna. Zoberme si ľubovoľný taký štvoruholník. Rozdeľme si každú zo strán bodom, v ktorom sa vpísaná kružnica dotýka tejto strany štvoruholníka. Každá zo strán sa tak rozdelí na dve úsečky, pričom každá z nich sa bude dotýkať vpísanej kružnice. Pre každý vrchol štvoruholníka ale máme dve takéto úsečky, ktoré v ňom majú jeden zo svojich krajných bodov. Ak by sme si nakreslili obrázok, ktorý by obsahoval iba tieto dve úsečky a vpísanú kružnicu, bol by symetrický podľa osi uhla, ktorý by tieto úsečky zvierali. Preto musia mať tieto úsečky rovnakú dĺžku. Keď sa teraz pozrieme na všetky štyri úsečky, na ktoré sa rozdelili dve protiľahlé strany tohto štvoruholníka, zistíme zaujímavú vec. Každá z týchto štyroch úsečiek má nejakú dvojičku, úsečku s rovnakou dĺžkou (z toho, čo sme si pred chvíľou povedali) medzi úsečkami, na ktoré sa rozdelili zvyšné dve strany. Preto v takomto štvoruholníku platí, že súčet oboch dvojíc navzájom protiľahlých strán je rovnaký.

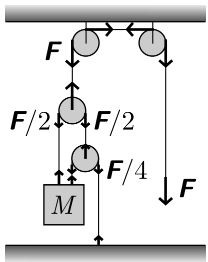
Vráťme sa teraz k Laurinmu lichobežníku. Ten je zo zadania rovnoramenný, a tak je oproti ramenu tohto lichobežníka dlhému 5 cm druhé rameno, taktiež dlhé 5 cm. Keďže sa ale tomuto lichobežníku dá vpísať kružnica, majú zvyšné dve strany (základne) rovnaký súčet dĺžok, teda 10 cm. To je užitočná informácia, pretože súčet dĺžok základní lichobežníka figuruje vo vzťahu, pomocou ktorého vieme vypočítať obsah lichobežníka. Aby sme tento vzťah vedeli použiť, potrebujeme ešte vypočítať výšku tohto lichobežníka.

Uvedomme si ale, že úsečka, ktorá spája stred vpísanej kružnice s bodom dotyku tejto kružnice so stranou, je kolmá na túto stranu. Špeciálne tak máme, že máme dve takéto úsečky, každú kolmú na jednu zo základní. Základne sú ale rovnobežné, a tak musia byť rovnobežné aj tieto úsečky. Obe ale prechádzajú stredom vpísanej kružnice, takže musia ležať na spoločnej priamke kolmej na obe základne. Ich súčtom je ale priemer tejto kružnice, čo znamená, že priemer tejto kružnice je zároveň výškou Laurinho lichobežníka.

Máme tak to, že súčet dĺžok základní Laurinho lichobežníka je $10\,\mathrm{cm}$ a jeho výška je $4\,\mathrm{cm}$. Preto je obsah tohto lichobežníka rovný $10\,\mathrm{cm} \cdot 4\,\mathrm{cm}/2 = 20\,\mathrm{cm}^2$.

Úloha 37 ... Bob staviteľ

Bob staviteľ si chcel uľahčiť prácu na stavbe, na ktorú bol zavolaný. Miešačka Julča mu ale poradila, aby si na zdvíhanie bremien postavil kladkostroj ako na obrázku. Bob ho hneď použil na vytiahnutie krabice s hmotnosťou $15\,\mathrm{kg}$*. Akou najmenšou silou* $\boldsymbol{F}$ *musí Bob ťahať za lano, aby bol schopný krabicu zdvihnúť?*



Keď chce Bob ťahať krabicu nahor pomocou tohto kladkostroja, musí na lano pôsobiť rovnakou silou, ako potrebuje na to, aby krabicu pomocou kladkostroja vôbec udržal. V tomto prípade sa žiadne z lán nehýbe, žiadna z kladiek netočí a žiadna z voľných kladiek nehýbe. Na každý kúsok lana tak musia pôsobiť dve sily rovnakej veľkosti ale opačného smeru. Sila F, ktorou pôsobí Bob sa tak presunie lanom na pravú z pevných kladiek. V nej sa majú rovnať momenty síl, a tak sa táto sila prenesie aj na ľavú z pevných kladiek. Pomocou nej sa sila presunie až na hornú voľnú kladku. Aby sa na nej rovnali momenty síl, musia mať sily, ktorými na ňu pôsobia zvyšné dve laná, rovnakú veľkosť. Táto voľná kladka sa ale nehýbe, a tak musí byť sila, ktorá ju ťahá nahor, rovnako veľká ako obe sily, ktoré ju ťahajú nadol. Obe sily smerom nadol tak majú veľkosť $F/2$. Jedno z týchto lán prenesie silu $F/2$ priamo na krabicu. Druhé ju prenesie na spodnú voľnú kladku. Podobne sa aj tu rozdelí sila na polovice, a tak bude každé lano pôsobiť na túto kladku nadol silou $F/4$. Iba jedna z týchto síl sa prenesie až na krabicu. Na krabicu tak bude pôsobiť sila $F/2 + F/4 = 3F/4$. Aby sa táto krabica nehýbala, musí byť táto sila rovnaká ako tiažová sila, ktorá pôsobí na túto krabicu. Vieme tak vyjadriť veľkosť sily, ktorou má Bob pôsobiť, ako

$$F = \frac{4Mg}{3} = \frac{4 \cdot 15\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2}}{3} = 200\,\mathrm{N}\,.$$

Bob musí pôsobiť silou $200\,\mathrm{N}$.

Úloha 38 ... najobľúbenejšie čísla

Majo zobral svoje dve rôzne najobľúbenejšie prirodzené čísla. Ak by ich medzi sebou vynásobil, dostal by sedemkrát väčší výsledok, ako keby ich sčítal. Aký je súčet Majových dvoch najobľúbenejších čísel?

Označme x a y Majove najobľúbenejšie čísla. Keďže je jedno, ktoré z nich je väčšie, tak povedzme, že $x > y$ (rovnosť nám zakazuje zadanie). Zo zadania vieme, že platí

$$x \cdot y = 7 \cdot (x + y)\,.$$

Keď presunieme všetky členy na jednu stranu, dostaneme tak

$$x \cdot y - 7 \cdot x - 7 \cdot y = 0\,.$$

Tvar, do ktorého by bolo fajn sa dopracovať, je nejaký súčin zátvoriek, pričom každá zátvorka bude obsahovať iba jedno z čísel x a y. Tu by nám mohlo napadnúť, že ľavá strana predošlej rovnosti sa podobá na súčin zátvoriek $(x-7)\cdot(y-7)$ v roznásobenom tvare $x\cdot y-7\cdot x-7\cdot y+49$. Ak teda k rovnosti $x \cdot y - 7 \cdot x - 7 \cdot y = 0$ pripočítame číslo 49, vieme ju teda upraviť do tvaru

$$(x - 7) \cdot (y - 7) = 49.$$

Ak by niektorá zo zátvoriek bola záporná, musela by aj druhá zátvorka byť záporná. Keďže x a y sú prirodzené čísla, tak by tieto zátvorky mohli nadobúdať iba hodnoty -1, -2, -3, -4, -5 alebo -6. Najväčšia možná hodnota súčinu $(x - 7) \cdot (y - 7)$ by tak bola $(-6) \cdot (-6) = 36$, čo je ale menšie číslo ako 49.

Preto majú obe zátvorky kladnú hodnotu. Hodnoty oboch zátvoriek sú navyše celé čísla, a tak to musia byť delitele čísla 49. Toto číslo sa dá rozdeliť na súčin iba dvomi spôsobmi: $49 = 49 \cdot 1 = 7 \cdot 7$. Ak by platila druhá z možností, muselo by platiť $x = y = 14$. Ale zo zadania majú byť čísla x a y rôzne. Preto musí mať jedna zo zátvoriek hodnotu 49 a druhá 1. Vzhľadom na predpoklad $x > y$ z úvodu riešenia tak máme $x - 7 = 49$ a $y - 7 = 1$. To znamená, že $x = 56$ a $y = 8$. Toto je jediné riešenie, a tak je súčet Majových čísel $56 + 8 = 64$.

Úloha 39 ... skoky do vody

Duško je homogénna kocka so stranou dlhou $2\,\mathrm{m}$ *a hustotou* $800\,\mathrm{kg/m^3}$*. Z výšky* $6\,\mathrm{m}$ *od jeho spodnej steny padá do jazera. Ako najhlbšie sa ponorí jeho vrchná stena? Vodu v jazere považujte za ideálnu kvapalinu.*

Nech d je hĺbka, do ktorej sa ponorí Duškova vrchná stena. Jeho spodná stena sa preto ponorí do hĺbky $d + a$, kde $a = 2\,\mathrm{m}$ je dĺžka hrany kocky. Počas Duškovho pádu do najhlbšieho miesta tak výška spodnej steny klesla o $h + d + a$, kde $h = 6\,\mathrm{m}$ je výška, z ktorej bola kocka spustená. Pádom klesla Duškova potenciálna energia o $mg\,(h + d + a)$, kde g je tiažové zrýchlenie a m je Duškova hmotnosť, ktorú vieme naviac vyjadriť v tvare $m = a^3\varrho$ (a^3 je objem kocky).

Otázkou je, na čo sa táto energia premenila. Odpoveď je pomerne jednoduchá. Na mieste, kde sa Duško nachádza, keď je najhlbšie, bola predtým voda. Ale teraz tam je Duško, a tak sa voda musela niekam presunúť. No voda je nestlačiteľná, a tak jediné miesto, kam sa voda mohla presunúť, je na hladinu. Táto vytlačená voda na hladine vytvorí nejaký kváder vody. No keďže Duško skáče do jazera, má podstava tohto kvádra obrovské rozmery, a tak je výška tohto kvádra veľmi malá. Preto ju môžeme zanedbať a predpokladať, že sa všetka vytlačená voda dostala prakticky na úroveň hladiny.

Zmenu potenciálnej energie vody tak už vieme vypočítať. Vytlačená voda pôvodne tvorila rovnakú kocku, ako je Duško. Hmotnosť tejto vody tak je $m = a^3 \varrho_{\text{voda}}$. Aby sa nám lepšie počítalo, uvažujme, že všetka táto hmotnosť je sústredená do ťažiska tejto kocky. Táto kocka vytlačenej vody mala pôvodne ťažisko v hĺbke $d+a/2$ (uvažujúc prípad, že Duško už je najhlbšie, ako vie). To znamená, že sa jej zmení potenciálna energia o energiu $a^3 \varrho_{\text{voda}} g(d + a/2)$. Tým sme dostali dve energie, z ktorých sa jedna zmenila na druhú. Platí preto rovnosť

$$a^3 \varrho g\,(h + d + a) = a^3 \varrho_{\text{voda}} g \left(d + \frac{a}{2}\right) .$$

Po predelení a^3 a g dostávame

$$\varrho\,(h + d + a) = \varrho_{\text{voda}} \left(d + \frac{a}{2}\right) .$$

Po roznásobení zátvoriek už jednoducho vyjadríme hĺbku d

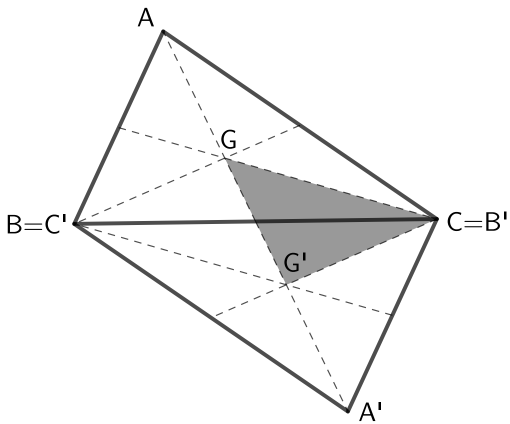
$$d = \frac{\varrho\,(h + a) - \varrho_{\text{voda}} \frac{a}{2}}{\varrho_{\text{voda}} - \varrho} = 27\,\text{m} .$$

Po dosadení hodnôt veličín dostávame, že Duškova vrchná stena sa ponorila do hĺbky najviac 27 m. V reálnom prípade by sa ale Duško nepotopil takto hlboko. Časť Duškovej potenciálnej energie by sa totiž stratila kvôli odporu vody, vzniku vĺn alebo kvôli vymršteniu nejakej vody do vzduchu. Výsledná hĺbka tak bude výrazne menšia. V reálnom prípade tiež Duško neváži $\varrho a^3 = 6{,}4\,\text{t}$. Keď ale všetky tieto vplyvy odstránime predpokladom, že voda je ideálna kvapalina, dostaneme, že Duško sa ponorí do hĺbky až 27 m.

Úloha 40 ... ťažná úloha

Jožo si nakreslil na papier trojuholník ABC, *ktorého ťažnice majú dĺžky* 6 cm, 8 cm *a* 10 cm. *Vypočítajte obsah tohoto trojuholníka.*

Ťažnice trojuholníka sa pretínajú v ťažisku G, ktoré delí každú ťažnicu v pomere $2 : 1$, pričom dlhšia časť sa nachádza vždy pri vrchole. To tiež znamená, že vzdialenosť ťažiska od nejakej strany sa rovná tretine dĺžky výšky na túto stranu.



Vezmime si trojuholník s vrcholom G a dvomi vrcholmi pôvodného trojuholníka, napríklad trouholník BCG. Tento trojuholník má výšku na stranu BC dlhú $v_a/3$, takže jeho obsah je $S_{BCG} = a(v_a/3)/2 = S/3$, kde $S = av_a/2$ je hľadaný obsah trojuholníka ABC.

Navyše vidíme, že trojuholníkom BCG prechádza ťažnica, ktorá ho rozdeľuje na dva menšie trojuholníky s rovnako dlhou výškou $v_a/3$ a rovnako dlhou základňou $a/2$. Preto majú rovnaký obsah $S_{BCG}/2 = S/6$. Ak si na začiatku vyberieme trojuholníky ABG alebo ACG, dospejeme k rovnakému výsledku. Platí teda, že ťažnice rozdeľujú trojuholník ABC na 6 častí s rovnakým obsahom.

Problémom, ktorý máme pri práci s dĺžkami ťažníc, je, že ich v obrázku nemáme rozumne v jednom trojuholníku. Pomôcť k tomu, aby sa dostali do jedného trojuholníka, môže to, že si celý obrázok zobrazíme v stredovej súmernosti. Zobrazme preto trojuholník ABC napríklad podľa stredu strany BC tak ako na obrázku. V takto rozšírenom nákrese si všimnime trojuholník $GG'C$ (vyfarbený), ktorý obsahuje 2 trojuholníky tvorené ťažnicami. Jeho obsah je tak $S_{GG'C} = 2 \cdot S/6 = S/3$. Navyše si môžeme všimnúť, že dĺžky jeho strán sú dlhé $2/3$ dĺžok jednotlivých ťažníc, teda $4\,\mathrm{cm}$, $16/3\,\mathrm{cm}$ a $20/3\,\mathrm{cm}$.

Vypočítať obsah tohto trojuholníka je omnoho jednoduchšie, keď si všimneme, že dĺžky ťažníc (aj ich $2/3$ častí) spĺňajú Pytagorovu vetu. Trojuholník $GG'C$ je tak pravouhlý s odvesnami dlhými $4\,\mathrm{cm}$ a $16/3\,\mathrm{cm}$. Jeho obsah je potom

$$S_{GG'C} = \frac{4\,\mathrm{cm} \cdot \frac{16}{3}\,\mathrm{cm}}{2} = \frac{32}{3}\,\mathrm{cm}^2\,, \quad \Rightarrow \quad S = 3S_{GG'C} = 32\,\mathrm{cm}^2$$

Takže obsah Laurinho trojuholníka je $32\,\mathrm{cm}^2$.

Úloha 41 ... bežecký okruh

Andrej a Miška bežia na bežeckom okruhu, Andrej beží rýchlejšie. Vyštartovali z jedného miesta rovnakým smerom a po $420\,\mathrm{s}$ sa opäť stretli. Potom sa rozbehli každý iným smerom a stretli sa po $70\,\mathrm{s}$. O koľko sekúnd dlhšie trvá jedno kolo Miške než Andrejovi?

Označme T_A čas, za ktorý Andrej zabehne jedno kolo, T_M čas, za ktorý Miška zabehne jedno kolo, a s dĺžku jedného kola. Z toho vieme, že rýchlosť Andreja v_A je rovná s/T_A a rýchlosť Mišky v_M je s/T_M. Keď bežia rovnakým smerom, tak sa vzhľadom na seba pohybujú rýchosťou v_1, ktorá je rovná rozdielu ich rýchlostí, teda $v_1 = v_\mathrm{A} - v_\mathrm{M}$. Túto rýchlosť ale pomocou informácie zo zadania vieme vyjadriť ako $v_1 = s/t_1$, kde $t_1 = 420\,\mathrm{s}$. Porovnaním týchto vzťahov tak dostávame

$$\frac{s}{t_1} = \frac{s}{T_\mathrm{A}} - \frac{s}{T_\mathrm{M}}\,.$$

Po predelení dráhou s, ktorá sa vyskytuje vo všetkých členoch, tak máme

$$\frac{1}{t_1} = \frac{1}{T_\mathrm{A}} - \frac{1}{T_\mathrm{M}}\,.$$

Keď budú Andrej s Miškou bežať navzájom opačnými smermi, tak sa vzhľadom na seba budú pohybovať rýchlosťou v_2, ktorá je rovná súčtu ich rýchlostí, čiže $v_2 = v_\mathrm{A} + v_\mathrm{M}$. Pomocou času $t_2 = 70\,\mathrm{s}$ ju tiež vieme vyjadriť v tvare $v_2 = s/t_2$. Porovnaním v_2 v týchto vzťahoch a po predelení s máme

$$\frac{1}{t_2} = \frac{1}{T_\mathrm{A}} + \frac{1}{T_\mathrm{M}}\,.$$

Tým pádom sme dostali dve rovnice, v ktorých máme dve neznáme T_A a T_M. Ak ich spolu sčítame, dostaneme

$$\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} = \frac{2}{T_\mathrm{A}}\,, \quad \Rightarrow \quad T_\mathrm{A} = \frac{2 \cdot t_1 \cdot t_2}{t_1 + t_2}\,.$$

Podobne môžeme obe rovnice navzájom odčítať a z nich vyjadriť čas T_M ako

$$T_\mathrm{M} = \frac{2 \cdot t_1 \cdot t_2}{t_1 - t_2}\,.$$

Z týchto vzťahov ľahko dopočítame, že $T_\mathrm{A} = 120\,\mathrm{s}$ a $T_\mathrm{M} = 168\,\mathrm{s}$. Z toho vyplýva, že Miške trvá zabehnúť jedno kolo o $T_\mathrm{M} - T_\mathrm{A} = 48\,\mathrm{s}$ dlhšie ako Andrejovi.

Úloha 42 ... šachový turnay

Šachového turnaja sa zúčastnilo 13 šachistov. Každý hral s každým práve raz. Po odohratí všetkých partií zistili, že každý šachista 6-krát vyhral a 6-krát prehral, ani jedna partia neskončila remízou. Koľkými spôsobmi vieme vybrať trojicu šachistov tak, aby každý šachista vyhral práve s jedným z ostatných v tejto trojici?

Pozrime sa na to, ako môžu vyzerať trojice šachistov. Sú dva typy. Prvým typom trojice je taká, ktorá spĺňa podmienku zo zadania, že každý vyhral nad niekým z tejto trojice práve raz. Druhý typ je taký, že niekto z tejto trojice vyhral v rámci tejto trojice dvakrát, niekto raz a niekto ani raz. Žiadne iné trojice vzniknúť nemôžu, keďže šachisti v každej trojici majú spolu tri víťazstvá z ich vzájomných partií. Preto ak chceme spočítať počet trojíc, v ktorých každý šachista vyhral práve raz, môžeme spočítať počet všetkých trojíc šachistov a od neho odčítať počet takých trojíc, v ktorých niekto vyhral dvakrát. To presne spravíme.

Začnime jednoduchšou časťou, spočítame počet všetkých trojíc šachistov. Keď si vyberáme nejakú trojicu, tak si prvého vyberieme spomedzi 13 šachistov, druhého spomedzi 12 šachistov a tretieho spomedzi 11 šachistov. Spolu tak budeme mať $13 \cdot 12 \cdot 11$ možností, ako si vybrať túto trojicu. Všimnime si, že ak sa pozrieme na nejakú konkrétnu trojicu šachistov, tak sme ju započítali viackrát. Konkrétne sme ju započítali raz za každé poradie šachistov v tejto trojici. Celkový počet možností, ktorý sme tak dostali, preto musíme ešte predeliť počtom spôsobov, ako sa šachisti v tejto trojici vedia zoradiť. Na prvé miesto vieme dať ktoréhokoľvek z 3 šachistov v trojici, na druhé miesto ktoréhokoľvek zo zvyšných 2 a na posledné miesto dáme jednoznačne posledného a na to máme 1 možnosť. Spolu ich teda vieme zoradiť $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ spôsobmi, a preto je všetkých trojíc šachistov $13 \cdot 12 \cdot 11/6 = 286$.

Ďalej poďme spočítať počet trojíc šachistov, v ktorých niekto vyhral dvakrát. Otázkou ale je, ako ich spočítať tak, aby sme každú takúto trojicu započítali práve raz. Povedali sme si, že táto trojica sa vyznačuje tým, že v nej je niekto, kto vyhral dvakrát. Túto vlastnosť navyše majú iba trojice tohto typu. Každej takejto trojici teda vieme priradiť šachistu, ktorý v nej dvakrát vyhral. Ale platí to aj naopak. Každému šachistovi vieme priradiť všetky trojice, v ktorých vyhral dvakrát. Pre každého šachistu vieme spočítať to, v koľkých takýchto trojiciach sa nachádza. Keď sčítame tento počet pre všetkých šachistov, tak by sme chceli, aby sme tým započítali každú takúto trojicu práve raz. A to sa presne aj stane, pretože každú trojicu započítame iba vtedy, keď ju započítame z pohľadu toho, kto v nej dvakrát vyhral. Tak to poďme spočítať. Keď chceme nájsť pre nejakého šachistu trojicu, v ktorej dvakrát vyhral, tak musíme vybrať dvoch zo šiestich ľudí, ktorých v celom turnaji porazil. Prvého do dvojice vieme vybrať 6 spôsobmi a druhého 5 spôsobmi. Keďže nám nezáleží na tom, v ako poradí vyberieme ľudí v nejakej dvojici, tak tento počet potrebujeme ešte predeliť 2. Dostaneme tak, že každý šachista je v $6 \cdot 5/2 = 15$ trojiciach, v ktorých je v pozícii toho, kto dvakrát vyhral. Keď toto sčítame pre všetkých šachistov, dostaneme počet všetkých takýchto trojíc, ktorých je $13 \cdot 15 = 195$.

Zostáva už len určiť počet trojíc, v ktorých každý vyhral práve raz. Ako sme si povedali, tak všetky trojice sa dajú rozdeliť na trojice tohto typu a trojice, v ktorých niekto vyhral dvakrát. Preto je počet trojíc, v ktorých každý šachista vyhral práve raz, rovný $286 - 195 = 91$.

Náboj Junior 2019

Bánovce nad Bebravou – Gymnázium Janka Jesenského • **Banská Bystrica** – Gymnázium Andreja Sládkoviča • **Białystok** – Liceum Ogólnokształcące Politechniki Białostockiej • **Bielsko-Biała** – V Liceum Ogólnokształcące • **Bratislava** – UPeCe sv. Jozefa Freinandemetza • **Brezno** – Gymnázium Jána Chalupku • **Brno** – Gymnázium Matyáše Lercha • **Bytča** – Gymnázium Bytča • **Česká Lípa** – Gymnázium Žitavská • **České Budějovice** – Gymnázium Jírovcova • **Frýdlant nad Ostravicí** – Gymnázium Frýdlant • **Grodzisk Mazowiecki** – Szkoła Podstawowa nr 5 im. Leonida Teligi • **Hlohovec** – Gymnázium Ivana Kupca • **Hradec Králové** – Univerzita Hradec Králové, Přírodovědecká fakulta • **Kadaň** – Sluníčková základní škola Kadaň • **Karlovy Vary** – První české gymnázium v Karlových Varech • **Košice** – Gymnázium Alejová • **Kraków** – Uniwersytet Jagielloński, Wydział Matematyki i Informatyki • **Krosno** – I Liceum Ogólnokształcące im. Mikołaja Kopernika • **Levice** – Gymnázium Andreja Vrábla • **Liberec** – Doctrina – Podještědské gymnázium • **Liptovský Mikuláš** – Gymnázium Michala Miloslava Hodžu • **Łódź** – I Liceum Ogólnokształcące im. Mikołaja Kopernika • **Lučenec** – CVČ Magnet • **Michalovce** – Gymnázium Pavla Horova • **Námestovo** – Gymnázium Antona Bernoláka • **Nitra** – Gymnázium Párovská • **Olomouc** – Gymnázium Olomouc-Hejčín • **Ostrava** – Gymnázium Olgy Havlové • **Pardubice** – Gymnázium Dašická • **Partizánske** – Dom kultúry • **Piešťany** – Gymnázium Pierra de Coubertina • **Písek** – SPŠ a VOŠ Písek • **Plzeň** – Gymnázium Mikulášské náměstí • **Poprad** – Gymnázium Kukučínova • **Praha** – Gymnázium Voděradská • **Praha** – Gymnázum Christiana Dopplera • **Prešov** – Gymnázium Jána Adama Raymana • **Prievidza** – Gymnázium Vavrinca Benedikta Nedožerského • **Púchov** – Gymnázium Púchov • **Šahy** – Gymnázium Mládežnícka • **Sokolov** – Gymnázium a KVC Sokolov • **Sosnowiec** – IV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica • **Sučany** – Bilingválne gymnázium Milana Hodžu • **Šurany** – Gymnázium Bernolákova • **Tarnów** – III Liceum Ogólnokształcące im. Adama Mickiewicza • **Třebíč** – Katolické gymnázium • **Trenčín** – Gymnázium Ľudovíta Štúra • **Trnava** – UPeCe sv. Stanislava Kostku • **Trstená** – Gymnázium Martina Hattalu • **Ústí nad Labem** – Univerzita Jana Evangelisty Purkyně, Fakulta sociálně ekonomická • **Warszawa** – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica • **Wrocław** – Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu • **Zlín** – Gymnázium Zlín-Lesní čtvrť

Námety úloh

Marián Poturnay • Patrik Švančara • Radek Kusek • Marek Murin

Autori zadaní a riešení úloh

Marián Poturnay • Matej Hrmo • Daniel Onduš • Lukáš Gáborik • Jakub Parada • Marek Murin

Prekladatelia

Andrzej Komisarski • Radek Kusek • Kamil Rychlewicz • Beata Czernecka • Marián Poturnay • Sabína Samporová • Marcel Palaj • Daniel Onduš • Lukáš Gáborik • Matej Hrmo • Miroslav Hanzelka • Kateřina Stodolová • Patrik Švančara

Recenzenti

Marián Poturnay • Matej Hrmo • Daniel Onduš • Lukáš Gáborik • Marek Murin • Veronika Paulinyová • Radek Kusek • Ela Vojtková • Jakub Parada