Solutions des exercices

9ème édition de Náboj Junior

19 novembre 2021

Remerciements

Propositions d'exercices :

Alžběta Andrýsková, Anežka Čechová, Kateřina Charvátová, Robert Gemrot, Matej Hrmo, Soňa Husáková, Radek Kusek, Viktor Materna, Aleš Opl, Marián Poturnay, Patrik Švančara, Martin Vaněk

Auteurs des énoncés et des solutions :

Jakub Hluško, Matej Hrmo, Nina Hronkovičová, Marián Poturnay, Patrik Rusnák, Ela Vojtková

Vérificateurs des exercices :

Barbora Čemanová, Michal Farnbauer, Filip Hanzely, Matej Hrmo, Nina Hronkovičová, Marián Poturnay, Patrik Rusnák, Ela Vojtková

Traducteurs :

Alžběta Andrýsková, Anežka Čechová, Robert Gemrot, Filip Hanzely, Matej Hrmo, Patrik Kašpárek, Radek Kusek, Karolína Letochová, Viktor Materna, Marcel Palaj, Łukasz Popek, Marián Poturnay, Juraj Rosinský, Patrik Rusnák, Sabína Samporová, Tomáš Šimek, Patrik Švančara, Karolina Szulc, Mateusz Wojtas

Organisateurs locaux :

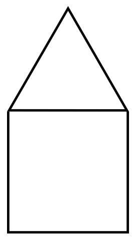
Michaela Dlugošová (SK), Radek Kusek (PL), Juraj Rosinský (FR), Patrik Švančara (CZ)

Problème 1. Mathieu a commandé une glace avec trois boules. La première boule a coûté 0,80 €, la seconde 0,70 € et la troisième 1,05 €. Mathieu a payé sa glace avec un billet de 5 €. Combien d'euros le marchand de glace a-t-il rendu à Mathieu ?

Résulat. 2,45

Solution. Mathieu a payé la glace de trois boules avec un billet de 5 €. Le prix total de sa glace est $0{,}80\,€ + 0{,}70\,€ + 1{,}05\,€ = 2{,}55\,€$. Donc le marchand de glace a rendu à Mathieu $5\,€ - 2{,}55\,€ = 2{,}45\,€$.

Problème 2. Natalie veut dessiner une maison, formée d'un carré et d'un triangle équilatéral (voir figure). Elle veut que la longueur du côté du carré soit 0,5 m. Il faut à Natalie une seconde pour tracer 1 dm de ligne. Combien de temps lui faut-il pour dessiner l'image entière de la maison ?



Résulat. 30 s

Solution. Les quatre côtés du carré ont la même longueur, 0,5 m. Les côtés du triangle équilatéral sont également de même longueur. Une des lignes est un côté à la fois un côté du carré et un côté du triangle. Toutes les lignes de l'image doivent donc avoir la même longueur, c'est-à-dire 0,5 m. Le dessin est composé de six lignes de ce type et la somme de toutes leurs longueurs est donc de $6 \cdot 0{,}5\,\mathrm{m} = 3\,\mathrm{m}$. Chaque seconde, Natalie trace 1 dm de ligne, donc toutes les 10 secondes, elle trace une ligne d'une longueur totale de $10 \cdot 1\,\mathrm{dm} = 10\,\mathrm{dm} = 1\,\mathrm{m}$. Pour terminer l'image complète, elle doit en dessiner trois fois plus, ce qui lui prendra $3 \cdot 10\,\mathrm{s} = 30\,\mathrm{s}$.

Problème 3. Archimède a une balance électronique avec un récipient de 1 l posé dessus. Le récipient pèse 250 g. Ensuite, Archimède remplit le récipient à moitié d'eau, et enfin, il y jette un morceau de bois de masse 300 g et de densité $600\,\mathrm{kg/m^3}$, qui reste flottant sur l'eau. Quelle masse en grammes est affichée sur la balance en ce moment ?

Résulat. 1050

Solution. Même si le bois flotte parce que la portance du fluide le soutient, cela n'affecte pas la masse mesurée. La balance mesure uniquement la masse totale du conteneur et de son contenu, qui n'est pas affectée par les forces entre les objets à l'intérieur du récipient (étant donné que ces objets sont au repos). Par conséquent, nous pouvons simplement additionner les masses des objets : le récipient pèse 250 g, un demi-litre d'eau pèse 500 g, et le morceau de bois pèse 300 g. La balance affichera alors $250\,\mathrm{g} + 500\,\mathrm{g} + 300\,\mathrm{g} = 1050\,\mathrm{g}$.

Problème 4. Patrice est en train d'établir son emploi du temps pour une journée, où il veut mettre 3 heures de mathématiques et 2 heures de physique-chimie, le tout dans un créneau de 5 heures. Combien d'emplois du temps différents peut-il créer ?

Résulat. 10

Solution. Écrivons toutes les possibilités. Commençons par les mathématiques en premier lieu : MMPPP, MPMPP, MPPMP, MPPPM. Maintenant, regardons les combinaisons où la Physique-Chimie est en première place : PMMPP, PMPMP, PMPPM, PPMMP, PPMPM, PPPMM. Patrice peut donc créer 10 emplois du temps différents.

Problème 5. Un escargot se prépare pour un long voyage. Il a décidé de traverser un terrain de football de 100 yards de long. Combien d'heures cet itinéraire prendra t'il si l'escargot parcourt 1 pouce de distance en 10 secondes ?

Résulat. 10

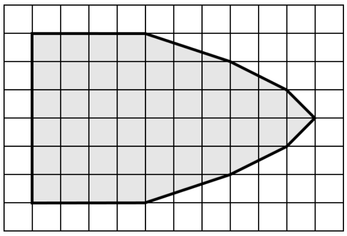
Solution. Il y a 3 pieds dans un yard et 12 pouces dans un pied. Donc 1 yard est égal à $3 \cdot 12 = 36$ pouces. L'escargot doit parcourir 100 yards, ce qui est équivalent à $100 \cdot 36 = 3,600$ pouces. Il faut 10 secondes à l'escargot pour parcourir chaque pouce, ce qui veut dire qu'il lui faut $10 \cdot 3\,600 = 36\,000$ secondes pour traverser tout le stade. Il y a 60 minutes dans une heure et 60 secondes dans une minute. Donc 1 heure $= 60 \cdot 60 = 3\,600$ secondes. Donc, l'escargot va mettre $36\,000 : 3\,600 = 10$ heures pour traverser le stade de football.

Problème 6. Joseph a multiplié le nombre 111 111 111 par lui-même. Quelle est la somme des chiffres du nombre obtenu ?

Résulat. 81

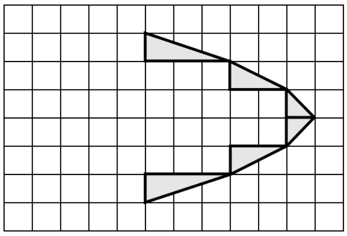
Solution. Si nous multiplions le nombre 111 111 111 avec lui-même nous obtenons le nombre 12 345 678 987 654 321. La somme des chiffres de ce nombre est $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 81$.

Problème 7. Susanne a dessiné un projectile sur du papier millimétré comme nous pouvons le voir sur la photo. Pour remplir 1 carré sur le papier millimétré, il faut 1 gramme d'encre. Combien de grammes d'encre a-t-elle utilisé ?



Résulat. 46

Solution. Comptons d'abord combien de carrés sont entièrement remplis. Il y a 40 carrés entièrement remplis, ce qui correspond à 40 grammes d'encre. En plus de ces carrés, il y a quelques carrés partiellement remplis. Lorsque nous retirons tous les carrés entièrement remplis de l'image, nous pouvons voir 6 triangles peints.



Tous les triangles situés sur la même ligne verticale peuvent être regroupés pour former 3 rectangles différents. Le premier rectangle couvre 3 carrés ; le deuxième couvre 2 carrés et le troisième couvre 1 carré. Pour les remplir, il faut $3 + 2 + 1 = 6$ grammes d'encre. Par conséquent, Susanne a besoin au total de 46 grammes d'encre pour peindre l'ensemble du tableau.

Problème 8.
Un matin, Adam se rend dans un stade d'athlétisme doté d'une piste de course de $400\,\mathrm{m}$. Durant les premières 20 minutes de sa course, il a couru très vite, à tel point que s'il maintenait son rythme de vitesse pendant toute l'heure, il parcourerait 20 fois la piste de 400 mètres. Quelle était la vitesse moyenne d'Adam en km/hdans les premières 20 minutes de sa course ?

Résulat. 8

Solution. Si Adam maintenait son rythme, il parcourerait 20 fois $400\,\mathrm{m}$ et donc $20 \cdot 400\,\mathrm{m} = 8000\,\mathrm{m}$ en une heure. Cela correspond à une vitesse de $8\,\mathrm{km/h}$. Qu'en est-il de sa vitesse moyenne ? Puisque Adam n'a pas changé de vitesse pendant les 20 premières minutes, $8\,\mathrm{km/h}$ doit être sa vitesse moyenne. Donc, sa vitesse moyenne pendant les 20 premières minutes est de $8\,\mathrm{km/h}$.

Problème 9. Des autobus urbains effectuent des allers-retours entre deux terminus de telle sorte que les passagers n'attendent jamais le bus plus de 10 minutes. Quel est le nombre minimum d'autobus nécessaires pour exploiter cette ligne, étant donné qu'elle mesure $7200\,\mathrm{m}$ de long et que les autobus roulent à une vitesse moyenne de $5\,\mathrm{m/s}$?

Résulat. 5

Solution.
Un voyage aller simple entre les deux terminus prend

$$\frac{7200\,\mathrm{m}}{5\,\mathrm{m/s}} = 1440\,\mathrm{s} = 24\,\mathrm{min}.$$

Par conséquent, un voyage aller-retour de n'importe quel autobus prend $2 \cdot 24\,\mathrm{min} = 48\,\mathrm{min}$. Si l'on veut que les passagers n'attendent jamais plus de $10\,\mathrm{min}$, il doit y avoir au moins 4 bus différents qui quittent la station au moment où le premier bus arrive. Par conséquent, cinq bus sont nécessaires.

Problème 10. Jacques a une imprimante dans son bureau. Cette imprimante imprime 20 pages par minute. Cependant, il y a une autre imprimante dans la salle de réunion capable d'imprimer 25 pages par minute. L'imprimante de la salle de réunion est connectée à l'ordinateur de Jacques afin que celui-ci puisse envoyer des documents à n'importe quelle imprimante instantanément depuis son bureau. Il faut à Jacques 1 minute pour aller de son bureau à la salle de réunion. Quel est le nombre minimal de pages pour que Jacques soit plus rapide en utilisant l'imprimante de la salle de réunion plutôt que celle de son bureau ?

Résulat. 101

Solution.
Lorsqu'il utilise l'imprimante de la salle de réunion, Jacques perd du temps uniquement en retournant à son bureau, soit une minute. Pour préférer imprimer dans la salle de réunion, il doit imprimer un certain nombre de pages de sorte que l'imprimante de la salle de réunion soit au moins 1 minute plus rapide que l'imprimante du bureau de Jacques. Cela signifie que si Jacques commence à imprimer simultanément le même nombre de pages dans son bureau et dans la salle de réunion, au moment où l'imprimante de la salle de réunion se termine, l'imprimante du bureau doit imprimer pendant au moins une minute de plus. Remarquez que l'imprimante du bureau imprime 20 pages par minute, et que l'imprimante de la salle de réunion est plus rapide de $25 - 20 = 5$ pages par minute. Par conséquent, l'imprimante du bureau doit continuer à imprimer pendant au moins 4 minutes pour être à 20 pages derrière l'imprimante plus rapide, et donc le nombre total de pages doit être supérieur à 100 pages. Par conséquent, il est plus rapide pour Jacques d'utiliser l'imprimante de la salle de réunion lorsqu'il imprime au moins 101 pages.

Problème 11.
Pedro a décidé de jouer avec son entier positif préféré. Il l'a d'abord arrondi à la dizaine, puis à la centaine prêt et enfin au millier le plus proche. Il a été très surpris de constater que les trois résultats de ces arrondis étaient identiques, mais jamais zéro. Quel est le plus petit nombre possible qui peut être le nombre préféré de Pedro ?

Résulat. 995

Solution.
Lorsqu'on arrondit à la dizaine, la différence maximale entre le résultat et le nombre préféré de Pedro est de 5. Le plus petit nombre entier positif qui peut résulter de l'arrondi aux milliers est 1 000. Le nombre préféré de Pedro doit donc être au moins égal à $1\,000 - 5 = 995$. On peut facilement remarquer que 995 satisfait toutes les conditions.

Problème 12.
Nina court autour d'un lac dont la circonférence est 6 km. Il lui a fallu 40 minutes pour effectuer le premier tour. Après le deuxième tour, elle remarque que sa vitesse moyenne pendant les deux tours était de 8 km/h. En combien a-t-elle parcouru le deuxième tour ?

Résulat. 50

Solution.
Nina a couru deux tours, la distance totale est donc de $2 \cdot 6\,\mathrm{km} = 12\,\mathrm{km}$, avec une vitesse moyenne de 8 km/h. Par conséquent, la durée totale du parcours doit être de

$$\frac{12\,\mathrm{km}}{8\,\mathrm{km/h}} = 1{,}5\,\mathrm{h} = 90\,\mathrm{min}$$

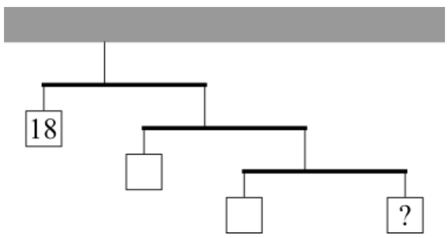
Puisque Nina a couru le premier tour en 40 minutes, elle a dû courir le deuxième tour en $90 - 40 = 50$ minutes.

Problème 13.
Andréas, Béatrice et Constance ont joué aux échecs les uns contre les autres. Aucune partie ne s'est terminée par une égalité. Andréas a gagné 7 fois et perdu 10 fois. Béatrice a gagné 8 fois et perdu 9 fois. Constance a perdu 8 fois. Combien de fois Constance a-t-elle gagné ?

Résulat. 12

Solution.
Le fait que quelqu'un perde s'est produit exactement $10 + 9 + 8 = 27$, ce qui correspond au nombre total de parties jouées. Par conséquent, le nombre total de parties gagnées doit également être de 27. Cela signifie que Constance a dû gagner $27 - 7 - 8 = 12$ parties.

Problème 14. Paul a trois leviers légers et suspendus. Le bras long de chaque levier mesure le double de son bras court. À l'extrémité courte du premier levier, Paul a accroché un poids de 18 kg. À l'extrémité longue du premier levier, il accroche le deuxième levier, et à l'extrémité longue du deuxième levier, il accroche le troisième levier. Ensuite, Paul a accroché différents poids aux extrémités libres restantes des leviers, de sorte que le système de leviers soit équilibré. Quelle est la masse, en kilogrammes, du poids qu'il a accroché à l'extrémité longue du troisième levier ?



Résulat. 1

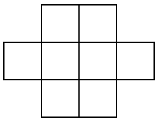
Solution. Le bras long de chaque levier est le double de son bras court. Par conséquent, pour que chaque levier soit en équilibre, la masse de tout ce qui est accroché à son extrémité courte doit être le double de la masse de tout ce qui est accroché à son extrémité longue. À l'extrémité courte du premier levier, il y a le poids 18 kg. À l'extrémité longue, on trouve le deuxième levier, ce qui signifie que la masse de tout ce qui est suspendu au deuxième levier doit être de 18 kg : 2 = 9 kg. Sur le deuxième levier, nous avons un autre poids ainsi que le troisième levier. De même, pour que le deuxième levier soit en équilibre, nous avons besoin que le poids (sur le bras court) soit deux fois plus lourd que le troisième levier (sur le bras long). Ce poids aura donc une masse de 6 kg et les deux poids du troisième levier auront une masse combinée de 3 kg. Enfin, nous divisons cette masse entre les deux poids dans le rapport habituel de 2 : 1. Nous constatons que le poids à l'extrémité longue du troisième levier pèse 1 kg.

Problème 15. La pluie s'est abattue sur la maison de Jeanne. Heureusement, Jeanne dispose d'un système de collecte des eaux sur son toit horizontal. Le système couvre une surface de $100\,\mathrm{m}^2$. Tout au long de la journée, le système a collecté 4000 l d'eau. Jeanne a également une piscine dans son jardin. De combien de millimètres le niveau d'eau de la piscine de Jane a-t-il augmenté après la pluie ?

Résulat. 40

Solution. Si l'eau ne s'écoule pas dans le système de collecte et ne déborde pas des bords du toit, nous trouverons un bloc d'eau sur le toit à la fin de l'orage. En supposant que la pluie soit tombée avec la même densité sur la piscine que sur le toit, l'augmentation du niveau d'eau dans la piscine sera la même que la hauteur de ce bloc d'eau imaginaire sur le toit. Le bloc d'eau a pour volume $4000\,\mathrm{l} = 4000\,\mathrm{dm}^3 = 4\,\mathrm{m}^3$. L'aire de sa base est égale à l'aire du toit : $100\,\mathrm{m}^2$. Nous savons que le volume du bloc est le produit de sa hauteur par l'aire de sa base. Sa hauteur est donc de $\frac{4\,\mathrm{m}^3}{100\,\mathrm{m}^2} = 0{,}04\,\mathrm{m} = 40\,\mathrm{mm}$. Par conséquent, le niveau d'eau de la piscine a augmenté de 40 mm.

Problème 16. Dans le grenier, Serge a trouvé une étrange tablette (voir figure). Il a décidé de graver dans chaque case un des nombres de 1 à 8 de telle sorte que la différence entre deux cases voisines (par le bord ou le coin) soit d'au moins 2. Lorsqu'il a terminé, quelle est la somme des nombres dans les cases voisines (par le bord ou le coin) de la case où est gravé le nombre 4 ?

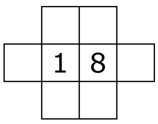


Résulat. 22

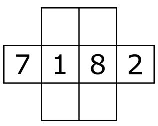
Solution.

La condition selon laquelle les chiffres des cellules voisines doivent différer d'au moins 2 signifie que les chiffres qui ne diffèrent que de 1 ne peuvent pas être voisins.

Examinons la deuxième et troisième cases de la rangée du milieu. Ces deux cases sont voisines de toutes les autres cases, sauf une. Quels nombres pouvons-nous placer sur ces cellules ? Uniquement les nombres qui diffèrent de 1 d'exactement un autre nombre compris entre 1 et 8. De toute évidence, seuls les nombres 1 et 8 remplissent cette condition. En raison de la symétrie de la tablette, l'ordre dans lequel nous plaçons ces chiffres n'a pas d'importance, et nous allons donc procéder de cette façon



Les nombres 1 et 8 n'ont tous deux qu'un seul autre nombre dont ils diffèrent de 1. Il s'agit de 2 et 7, respectivement. Nous devons donc placer 2 et 7 dans les deux cellules restantes de la rangée du milieu.



La cellule portant le numéro 2 ne peut pas être voisine de la cellule portant le numéro 3, qui doit donc être située au-dessus ou au-dessous du numéro 1. Pour des raisons similaires, le nombre 6 doit être situé au-dessus ou au-dessous du nombre 8. Il nous reste donc deux possibilités. Si nous plaçons 3 et 6 dans une rangée, dans la rangée restante, nous devrons placer les nombres 4 et 5 l'un à côté de l'autre, ce qui est interdit. Nous devons donc choisir la deuxième option, c'est-à-dire placer 3 et 6 dans des rangées différentes. Nous remarquons maintenant que 4 et 3 ne peuvent pas être voisins, ce qui laisse exactement une façon de remplir le tableau :

	3	5	
7	1	8	2
	4	6	

Enfin, nous calculons que la somme des nombres voisins de la cellule contenant le nombre 4 sera 22.

Problème 17. Gilles est assis dans un train qui avance à une vitesse de 108 km/h. Soudain, le train entre dans un tunnel qui, d'après le livre sur les trains de Gilles, fait 2 km de long. Gilles a remarqué que le train est sorti du tunnel 75 s après y être entré. Quelle est la longueur du train en mètres ?

Résulat. 250

Solution. Pour plus de commodité, remplaçons la vitesse en kilomètres par heure par la vitesse en mètres par seconde :

$$108\,\mathrm{km/h} = 30\,\mathrm{m/s}$$

Un train allant à une vitesse 30 m/s pendant 75 s parcourt une distance $75\,\mathrm{s} \cdot 30\,\mathrm{m/s} = 2250\,\mathrm{m}$. Par conséquent, la locomotive passe à 2250 m de l'entrée du tunnel. Comme le tunnel fait2000 m de long, après 75 secondes, la locomotive était $2250\,\mathrm{m} - 2000\,\mathrm{m} = 250\,\mathrm{m}$ derrière le tunnel. AInsi, le train doit faire 250 m de long.

Problème 18. Ella a six crayons préférés de différentes longueurs qu'on mesure en millimètres. La longueur moyenne d'un crayon est de 12 mm. Quelle est la plus grande longueur possible (en millimètres) d'un crayon qu'Ella peut avoir ?

Résulat. 57 mm

Solution. Puisque la moyenne des crayons d'Ella est de 12 mm, la somme de leurs longueurs doient être de $6 \cdot 12\,\mathrm{mm} = 72\,\mathrm{mm}$. Pour qu'un crayon donné soit le plus long, les 5 autres doivent être aussi courts que possible. Ils doivent donc avoir respectivement les longueurs $1\,\mathrm{mm}, 2\,\mathrm{mm}, 3\,\mathrm{mm}, 4\,\mathrm{mm}, 5\,\mathrm{mm}$, soit au total 15 mm. Pour le crayon le plus long, il restera $72\,\mathrm{mm} - 15\,\mathrm{mm} = 57\,\mathrm{mm}$.

Problème 19. Jim s'entraîne au curling sur un lac gelé. Il prend une pierre de curling de masse 18,6 kg et la fait glisser sur la glace avec une vitesse initiale de 2 m/s. Le coefficient de frottement de la glace et de la pierre est de $0,05$. Quelle distance en mètres la pierre va-t-elle parcourir en glissant depuis la main de Jim ?

Résulat. 4

Solution. Par la loie de conservation de l'énergie, la pierre perd de l'énergie cinétique lorsqu'une force agissante exerce un travail sur elle. Au départ, la pierre de masse $m = 18{,}6\,\mathrm{kg}$ et de vitesse $v = 2\,\mathrm{m/s}$ possède une énergie cinétique $E_k = \frac{1}{2}mv^2$. La force qui ralentit la pierre est la force de friction F_t, qui est égale au produit de la force normale de la glace et du coefficient de friction f. Dans cette situation, la force normale est la force de gravité de la Terre $F_G = mg$ où g est la gravité de la Terre. Si la pierre glisse sur une distance s, la force de frottement effectue un travail sur la pierre $W = F_t s = F_G f s = mgfs$. Lorsque la pierre cesse de glisser, sa vitesse et donc son énergie cinétique sont nulles. Nous pouvons alors calculer la distance s comme suit :

$$\begin{aligned}
\Delta E_k &= W \\
\frac{1}{2}m\Delta v^2 &= mgfs \\
\frac{1}{2}(v^2 - 0^2) &= fgs \\
\frac{1}{2}v^2 &= fgs \\
s &= \frac{v^2}{2fg}
\end{aligned}$$

Compte tenu des valeurs ci-dessus, la pierre glissera sur une distance $s = \frac{(2\,\mathrm{m/s})^2}{2 \cdot 0.05 \cdot 10\,\mathrm{m/s^2}} = 4\,\mathrm{m}$ depuis la main de Jim.

Problème 20. Alors que Kamila se promenait dans les couloirs de l'école, elle aperçut sur l'un des tableaux une figure étrange. La figure était constituée d'un segment BC et sur sa médiatrice se trouvaient les points A et D de telle sorte que le point D soit à l'intérieur du triangle ABC. La taille de l'angle BAC était 40° et celle de BDC était 140°. Quelle était la taille de l'angle ACD en degrés ?

Résulat. 50

Solution. Puisque les points A et D sont sur la médiatrice du segment de droite BC, on voit que les triangles ABC et DBC sont isocèles de base BC. En utilisant ce fait, nous pouvons calculer les tailles des angles à la base du triangle ABC comme étant $\frac{180° - 40°}{2} = 70°$ et dans le triangle DBC comme étant $\frac{180° - 140°}{2} = 20°$. La taille de l'angle ACD est donc $|\measuredangle ACD| = |\measuredangle ACB| - |\measuredangle DCB| = 70° - 20° = 50°$.

Problème 21. Karine est partie en randonnée dans les montagnes. Comme il faisait froid, elle a décidé de se faire un thé. Karine avait 0,5 l d'eau à 0 °C. Elle a fait infuser le thé sur un feu de camp avec un rendement de $0,5\%$. Quelle est la masse de bois en kilogrammes qu'elle a dû utiliser pour faire bouillir le volume d'eau total ?

Résulat. 2

Solution. La chaleur de combustion du bois est $21\,\mathrm{MJ/kg} = 21\,000\,\mathrm{kJ/kg}$. Comme le rendement de la combustion du bois dans un feu de camp n'est que de $0,5\%$, en brûlant un kilogramme de bois, on obtient $21\,000\,\mathrm{kJ/kg} \cdot 0.005 \cdot 1\,\mathrm{kg} = 105\,\mathrm{kJ}$ d'énergie. Pour faire bouillir l'eau, c'est à dire augmenter sa température de $0\,°\mathrm{C}$ à $100\,°\mathrm{C}$, Karine a besoin de $(100\,°\mathrm{C} - 0\,°\mathrm{C}) \cdot 4{,}2\,\mathrm{kJ/(kg\,°C)} \cdot 0{,}5\,\mathrm{kg} = 210\,\mathrm{kJ}$. Cela représente exactement 105 kJ. Donc Karine a besoin de 2 kg de bois.

Problème 22. Sybille a acheté un paquet de bonbons, qui contient des bonbons à la pomme et à la banane. Dans un paquet, il y avait deux fois plus de bonbons à la pomme que de bonbons à la banane. Elle a immédiatement mangé 17 de bonbons à la pomme et 17 de bonbons à la banane. Puis, elle a remarqué qu'il y avait trois fois plus de bonbons à la pomme que de bonbons à la banane. Combien de bonbons à la pomme y avait-il dans le paquet au début ?

Résulat. 68

Solution. On désigne par A le nombre de bonbons à la pomme et par B le nombre de bonbons à la banane. Au début, il y avait deux fois plus de bonbons à la pomme que de bonbons à la banane, ce qui signifie $A = 2 \cdot B$. Après que Sybille a mangé 17 de bonbons à la pomme et 17 de bonbons à la banane, elle avait trois fois plus de bonbons à la pomme que de bonbons à la banane, ce qui signifie $A - 17 = 3 \cdot (B - 17)$. En remplaçant A par $2 \cdot B$ (nous le savons grâce à la première équation), nous obtenons :

$$\begin{aligned} 2 \cdot B - 17 &= 3 \cdot (B - 17) \\ 2 \cdot B - 17 &= 3 \cdot B - 51 \\ B &= 34 \end{aligned}$$

Par conséquent, il y avait initialement 34 de bonbons à la banane et 68 de bonbons à la pomme dans le paquet.

Problème 23. Quelqu'un a volé les énoncés de Náboj ! C'était l'une de ces quatre personnes : Marion, Marieu, Sybille ou Marcel. Ces suspects ont dit ce qui suit au shérif :

— Marion : *Je n'ai pas les énoncés de Náboj. C'est Mathieu qui les a.*
— Mathieu : *Marcel a les énoncés de Náboj. Si Marcel a les énoncés de Náboj, alors Marion ne les a pas.*
— Sybille : *Exactement l'une de mes phrases est vraie. Marcel dira soit deux phrases vraies, soit deux phrases fausses.*
— Marcel : *Chaque suspect a dit au moins une phrase fausse. Je n'ai pas les énoncés de Náboj.* Parmi les phrases que le shérif a entendu, combien sont vraies ? Trouvez le produit de toutes les possibilités de réponse.

Résulat. 20

Solution.

Tout d'abord, considérons la première phrase de Sybille. Si elle était vraie, elle serait elle-même la seule phrase vraie de Sybille, et sa deuxième phrase devrait donc être fausse. Si la première phrase était fausse, alors la deuxième phrase ne pourrait pas non plus être vraie - sinon la première phrase devrait être vraie également. Nous pouvons donc dire avec certitude que la deuxième phrase de Jerry est fausse. Mais nous ne pouvons encore rien dire au sujet de sa première phrase.

La deuxième phrase de Sybille est fausse. Par conséquent, Marcel doit avoir dit une phrase vraie et une phrase fausse. Voyons ce qui se passerait si sa première ou sa deuxième phrase était la vraie.

S'il était vrai que « tous les suspects ont dit au moins une phrase fausse », alors la phrase de Marcel, selon laquelle il n'a pas le Naboj, serait fausse. Par conséquent, il devrait être le voleur. Mais alors, les deux phrases de Mathieu devraient être vraies, ce qui serait impossible, puisque nous considérons que la phrase de Marcel « tous les suspects ont dit au moins une phrase fausse » est correcte.

La phrase vraie doit donc être la deuxième phrase de Marcel, à savoir qu'il n'a pas les énoncés de Náboj, et comme sa première phrase est fausse, il doit y avoir quelqu'un qui a dit deux phrases vraies. Cela ne peut être maintenant que Marion ou Mathieu. Mais comme Marcel n'a pas les énoncés de Náboj, Mathieu ne peut pas avoir dit deux phrases vraies. Par conséquent, celle dont les deux phrases sont vraies est Marion, qui dit que Mathieu a les énoncés de Náboj. Par conséquent, Mathieu est le voleur.

Enfin, nous devons examiner combien de phrases peuvent être correctes. Nous avons prouvé que les deux phrases de Marion étaient vraies. Parmi les phrases de Mathieu, seule la deuxième était correcte. De même, seule la deuxième des phrases de Marcel était correcte. Nous voyons maintenant que la première phrase de Sybille peut être soit vraie, soit fausse. Il aurait donc pu y avoir 4 ou 5 phrases vraies. Le produit des quantités possibles de phrases vraies est donc de $4 \cdot 5 = 20$.

Problème 24. Marie s'est acheté 8 livres, chacun en forme de pavé droit de côtés 5 cm, 15 cm and 20 cm. Chacun des livres avait une densité de 1200 kg/m^3. Les livres ont été emballés dans une grande boîte avec un couvercle, en plaçant les livres les uns sur les autres de façon à ce que les livres se touchent par le côté avec la plus grande surface. Marie apporte la boîte dans sa maison et la pose sur le sol. Ensuite, elle ouvre le couvercle et souhaite maintenant placer les livres sur une étagère située à 1,6 m au-dessus du sol de sorte à ce que tous les livres touchent l'étagère par le côté avec la plus petite surface. Quel travail, exprimé en joules, Marie doit-elle fournir pour y parvenir ?

Résulat. 216

Solution. Les livres posés au sol forment un pavé droit d'une hauteur de $8 \cdot 5\,\mathrm{cm} = 40\,\mathrm{cm}$, leur centre de masse est une hauteur de $20\,\mathrm{cm} = 0{,}2\,\mathrm{m}$ au dessus du sol. Si les livres étaient placés sur l'étagère, ils formeraient un parallélépipède d'une hauteur de 20 cm et dont le centre de masse se trouverait à la hauteur de $10\,\mathrm{cm} = 0{,}1\,\mathrm{m}$ au-dessus de l'étagère. Comme l'étagère se trouve à 1,6 m au-dessus du sol, la différence de hauteur du centre de masse des livres avant et après leur soulèvement sur l'étagère est de $1{,}6\,\mathrm{m} - 0{,}2\,\mathrm{m} + 0{,}1\,\mathrm{m} = 1{,}5\,\mathrm{m}$. Le volume des livres est $15\,\mathrm{cm} \cdot 20\,\mathrm{cm} \cdot 40\,\mathrm{cm} = 12\,000\,\mathrm{cm}^3 = 12\,\mathrm{dm}^3$ et leur densité est $1200\,\mathrm{kg/m}^3 = 1{,}2\,\mathrm{kg/dm}^3$. Leur masse est donc de $12\,\mathrm{dm}^3 \cdot 1{,}2\,\mathrm{kg/dm}^3 = 14{,}4\,\mathrm{kg}$. La différence d'énergie potentielle entre le fait d'avoir les livres sur le sol et sur l'étagère est donc égale à $14{,}4\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} \cdot 1{,}5\,\mathrm{m} = 216\,\mathrm{J}$. Cela signifie que Marie doit faire un travail de 216 J.

Problème 25. Georges transporte dans son sac à dos un triangle ABC, dont les côtés sont des nombres entiers (en centimètres). Le côté AB mesure au plus 21 cm, mais pas plus que 28 cm. Le côté AC mesure au moins 11 cm, mais au plus 18 cm. Le côté BC mesure au plus 8 cm et au moins 1 cm. Quel est le périmètre maximal en centimètres du triangle ?

Résulat. 51

Solution.
Le concept clé de cet exercice est l'inégalité triangulaire, qui valable pour n'importe quel triangle. En particulier, l'inégalité triangulaire dit que la somme de deux côtés d'un triangle donné doit être strictement plus grande que le troisième côté. Examinons les deux côtés les plus courts du triangle : BC et AC. Nous savons que leurs longueurs peuvent être au maximum de 8 cm et 18 cm, respectivement. Sur cette base, on peut affirmer que pour que le triangle existe, son troisième côté doit être plus court que $8\,\mathrm{cm} + 18\,\mathrm{cm} = 26\,\mathrm{cm}$, donc au maximum 25 cm. Le triangle dont les côtés ont pour longueur 8 cm, 18 cm et 25 cm satisfait l'inégalité triangulaire et peut donc exister. De plus, ses deux petits côtés ont leurs longueurs maximales autorisée et son troisième côté doit être plus court que la somme de ces deux-là, donc le périmètre de $8\,\mathrm{cm} + 18\,\mathrm{cm} + 25\,\mathrm{cm} = 51\,\mathrm{cm}$ est le plus grand possible.

Problème 26. Sabine a acheté une nouvelle voiture. Cette voiture a une caractéristique intéressante : elle transforme toujours l'énergie du carburant en énergie cinétique de la voiture avec la même efficacité, quelle que soit l'accélération de la voiture. À l'arrêt en ville, Sabine a accéléré jusqu'à atteindre la vitesse de 40 km/h, tout en utilisant 700 kJ d'énergie. Elle est ensuite allée sur l'autoroute, où elle a accéléré jusqu'à la vitesse de 120 km/h. Combien d'énergie en kilojoules a-t-elle utilisé pour accélérer sur l'autoroute ?

Résulat. 5600

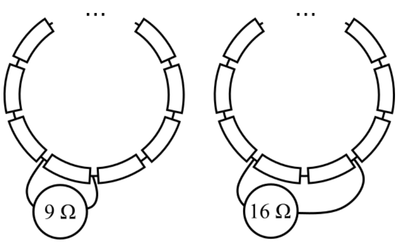
Solution. L'énergie cinétique augmente avec le carré de la vitesse. Par conséquent, pour obtenir une vitesse 3 fois supérieure, il faut utiliser $3 \cdot 3 = 9$ fois plus d'énergie. Ainsi, pour accélérer de zéro à 120 km/h Sabine doit utiliser $9 \cdot 700\,\mathrm{kJ} = 6300\,\mathrm{kJ}$ d'énergie. Par conséquent, pour accélérer de 40 km/h à 120 km/h, Sabine a utilisé $6300\,\mathrm{kJ} - 700\,\mathrm{kJ} = 5600\,\mathrm{kJ}$ d'énergie.

Problème 27. Raphaël a écrit tous les nombres entiers positifs de 1 à 100 sur une feuille de papier. Puis, sur une deuxième feuille de papier, il a écrit toutes les différences positives de toutes les paires de nombres de la première feuille de papier. Quel est le nombre qui apparaît le plus souvent sur la deuxième feuille de papier ?

Résulat. 1

Solution.
Examinons toutes les paires de chiffres de la première feuille. Nous commençons par les paires qui contiennent le nombre 1. Les différences de nombres parmi ces paires sont exactement tous les nombres de 1 à 99. Ensuite, examinons toutes les paires qui contiennent 2 mais pas 1 (ou alternativement, les paires où 2 est le plus petit nombre). Les différences de nombres parmi ces paires sont exactement tous les nombres de 1 à 98. De même, nous pourrions continuer jusqu'à ce que nous examinions toutes les paires où 99 est le plus petit nombre ; dans ce cas, nous n'avons qu'une seule paire dont la différence de nombre est de 1. Dans tous ces cas, seul le nombre 1 figure toujours parmi les différences, et donc le nombre 1 apparaît le plus souvent sur le deuxième morceau de papier.

Problème 28. Nina a fabriqué un collier avec les mêmes résistances en les joignant pour former un cercle. Elle a connecté le multimètre de façon à ce qu'il n'y ait qu'une seule résistance entre les pinces du multimètre. Le multimètre a mesuré une résistance de $9\,\Omega$. Lorsqu'elle a connecté le multimètre de telle sorte qu'il y ait deux résistances entre les pinces du multimètre, le multimètre a mesuré une résistance de $16\,\Omega$. De combien de résistances est composé le collier de Nina ?



Résulat. 10

Solution. Disons qu'il y a n résistances et que chaque résistance a une résistance R. Lorsque nous connectons le multimètre sur une résistance, nous mesurons la résistance dans un circuit avec des résistances connectées en parallèle. Dans une branche, nous avons 1 résistance et dans la deuxième branche, $n-1$ résistances. De même, si nous connectons le multimètre sur deux résistances, nous avons 2 de résistances dans une branche et $n-2$ de résistances dans la seconde. Cela nous conduit au système d'équations :

$$\frac{1}{9\,\Omega} = \frac{1}{R} + \frac{1}{(n-1)R}$$
$$\frac{1}{16\,\Omega} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{(n-2)R}$$

Après avoir multiplié les équations par les dénominateurs, on obtient le système :

$$(n-1)R = (n-1)(9\,\Omega) + 9\,\Omega$$
$$(n-2)R = (n-2)(8\,\Omega) + 16\,\Omega$$

En développant les parenthèses, nous obtenons :

$$nR - R = 9n\Omega$$
$$nR - 2R = 8n\Omega$$

Maintenant, soustrayons la deuxième équation de la première :

$$R = n\Omega$$

Ainsi, la valeur numérique d'une résistance en ohms est égale au nombre de résistances. Divisons l'ensemble de l'équation par des ohms et introduisons cette information dans l'équation $nR - R = 9n\Omega$:

$$n^2 - n = 9n$$
$$n^2 - 10n = 0$$
$$n(n-10) = 0$$

Il y a donc soit $n = 0$ soit $n = 10$ résistances. Le cas $n = 0$ n'a cependant aucun sens, il doit donc y avoir $n = 10$ résistances.

Problème 29. Laura a dessiné un octogone régulier $ABCDEFGH$. Elle veut dessiner 4 segments qui ne se coupent pas (les segments ne peuvent pas se couper aux extrémités) de sorte que leurs extrémités se trouvent aux sommets de l'octogone. De combien de façons possibles peut-elle le faire ?

Résulat. 14

Solution. Distinguons les cas selon le sommet avec lequel est relié le sommet A. Si le sommet A est connecté avec certains des sommets C, E ou G, alors ce segment divise les autres sommets en deux groupes avec un nombre impair de sommets. Cependant, ils ne peuvent pas être divisés en paires, donc nous ne pouvons pas dessiner de segments satisfaisant les conditions du problème. Si le sommet A est relié au sommet B, il nous reste les 6 autres sommets à relier. Nous avons ces 5 façons de le faire :

$$(CD)(EF)(GH)$$
$$(CD)(EH)(FG)$$

$$(CF)(DE)(GH)$$
$$(CH)(DE)(FG)$$
$$(CH)(DG)(EF)$$

Similairement, on obtiendrait 5 chemins si nous relions le sommet A au sommet H. En connectant le sommet A avec le sommet D, nous devrons immédiatement connecter les sommets B et C. Pour les 4 autres sommets, nous avons ces deux possibilités :

$$(EF)(GH)$$
$$(EH)(FG)$$

. De manière analogue, nous obtenons 2 possibilités si nous connectons les sommets A et H. Nous avons considéré tous les cas où le sommet A peut être relié, il y a donc exactement $5 + 5 + 2 + 2 = 14$ façons dont Laura peut tracer les segments.

Problème 30. Archimède prit une balance digitale et y plaça un récipient de volume 1 l et de masse 250 g. Il le remplit à moitié d'eau. Ensuite, il a mis dans le récipient avec de l'eau un caillou sur une ficelle de sorte que le caillou en entier était dans l'eau mais ne touchait pas les côtés du récipient. La balance indiquait une masse de 1 kg. Finalement, Archimède a placé sur la balance uniquement le caillou. La balance indique à nouveau la masse 1 kg. Quelle est la densité du caillou en $\mathrm{kg/m^3}$?

Résulat. 4000

Solution. Si nous posons un récipient de masse $m_{récipient} = 250\,\mathrm{g}$ sur la balance et que nous y versons de l'eau de volume $V = 0{,}5\,\mathrm{l}$, la balance indique la masse :

$$m_{total} = m_{récipient} + \rho_{eau} V$$

Après avoir rajouté le caillou sur une ficelle, la balance indique une masse de $m = 1\,\mathrm{kg}$. Quelle est la cause de cette augmentation de masse ? Deux forces agissent sur le caillou : la force gravitationnelle et la portance. C'est par la portance que l'eau agit sur le caillou. D'après la loi d'action-réaction, le caillou doit agir sur l'eau avec une force de même grandeur mais de direction opposée. C'est la seule force qui modifiera la masse indiquée sur l'échelle. La grandeur de la force F, sur la base de laquelle la balance indique la masse, doit donc être égale à la somme de la force gravitationnelle F_G et de la portance de l'eau sur le caillou F_b :

$$\begin{aligned} F &= F_G + F_b \\ mg &= m_{total} g + V_{récipient} \rho_{eau} g \\ m &= m_{récipient} + \rho_{eau} V + V_{caillou} \rho_{eau} \end{aligned}$$

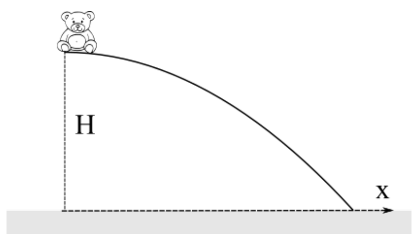
On en déduit que le volume du caillou est :

$$V_{caillou} = \frac{m - m_{récipient} - \rho_{eau} V}{\rho_{eau}}$$

Grâce à la deuxième pesée, nous savons que la masse du caillou est $m_{caillou} = 1\,\mathrm{kg}$. Par conséquent, la densité du caillou doit être :

$$\rho_{caillou} = \frac{m_{caillou}}{V_{caillou}} = \frac{m_{caillou} \rho_{eau}}{m - m_{caillou} - \rho_{eau} V} = \frac{1\,\mathrm{kg} \cdot 1000\,\mathrm{kg/m^3}}{1\,\mathrm{kg} - 0{,}25\,\mathrm{kg} - 1000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 0{,}0005\,\mathrm{m^3}} = 4000\,\mathrm{kg/m^3}$$

Problème 31.
Alex a posé son jouet Winnie l'ourson au sommet d'une rampe, dont la forme ressemble à une courbe $h(x) = H - ax^2$, telle que $a = 0{,}2\,\mathrm{m}$ et $h(0) = H = 2{,}5\,\mathrm{m}$. Cependant, il a oublié que la rampe est tellement que le frottement est négligeable, si bien que Winnie a commencé à s'éloigner de lui en glissant très rapidement. Quelle sera la vitesse de Winnie l'ourson en m/s quand il sera à une distance horizontale de $x = 3\,\mathrm{m}$ d'Alex ?



Résulat. 6

Solution. Comme Winnie l'ourson glisse vers le bas, l'énergie mécanique totale se conserve. La diminution de l'énergie potentielle de Winnie l'ourson doit donc être égale à son énergie cinétique. La diminution de la hauteur est de $\Delta h = ax^2$. Donc les égalités suivantes sont vraies :

$$\begin{aligned} \Delta E_p &= E_c \\ mg\Delta h &= \frac{1}{2}mv^2 \\ g\Delta h &= \frac{1}{2}v^2 \\ 2g\Delta h &= v^2 \\ v &= \sqrt{2g\Delta h} \\ v &= \sqrt{2gax^2} \\ v &= x\sqrt{2ga} \end{aligned}$$

Lorsque nous substituons par les valeurs de l'exercice, nous trouvons que Winnie l'ourson aura une vitesse de :

$$v = 3\,\mathrm{m} \cdot \sqrt{2 \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} \cdot 0{,}2/\mathrm{m}} = 6\,\mathrm{m/s}$$

Problème 32. Lucas avait un cube blanc. Il a décidé de peindre chaque côté soit en bleu, soit en rouge, de sorte que deux côtés opposés n'aient pas la même couleur. Ensuite, il a découpé le cube en 125 petits cubes de taille identique. Combien de ces cubes ont exactement une face bleue et en même temps exactement une face rouge ?

Résulat. 18

Solution. Trois des côtés du cube original doivent être peints en bleu et trois en rouge. De plus, pour que des côtés opposés aient des couleurs opposées, les trois côtés de la même couleur doivent avoir eu un sommet commun. Voyons donc quels petits cubes peuvent avoir un côté bleu et un côté orange. Ce type de cube doit avoir une arête en commun avec le cube original - une arête qui était partagée par un côté bleu et un côté rouge du cube original. Le long de chacune de ces arêtes du cube original ont été créés 5 plus petits cubes. Mais parmi ceux-ci, 2 ont également un sommet commun avec le cube initial, et ils ont donc en fait un troisième côté peint. Par conséquent, le long de chaque arête du cube initial où les côtés bleu et orange se rencontrent, il n'y aura que $5 - 2 = 3$ petits cubes qui ont exactement 1 côté bleu et exactement 1 côté rouge. Parmi les arêtes du cube initial, il y a 6 arêtes où un côté bleu et un côté rouge se rencontrent, donc il y a $6 \cdot 3 = 18$ petits cubes du type que nous recherchons.

Problème 33. Adam a programmé son ordinateur de telle sorte que lorsqu'il saisit un nombre entier positif, l'ordinateur le multiplie par lui-même 2 021 fois et renvoie le nombre de chiffres du résultat. Lorsqu'Adam a entré le nombre 2, l'ordinateur a renvoyé le nombre 609. Lorsqu'il a entré le chiffre 3, l'ordinateur a renvoyé le chiffre 965. Enfin, lorsqu'il a entré le chiffre 4, l'ordinateur a renvoyé le chiffre 1 217. Quel sera le résultat de l'ordinateur lorsque Adam aura entré le chiffre 5 ?

Résulat. 1 413

Solution.
Le nombre qui est le produit de b copies de a est noté $a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{b\text{-fois}}$

Remarquons que si on multiplie 2 021 fois le nombre 2 ($2^{2\,021}$) et ensuite 2 021 fois le nombre 5 ($5^{2\,021}$), on obtient le même résultat que si on multipliait 2 021 fois le nombre 10 ($10^{2\,021}$). On sait que à quoi ressemble ce nombre - il commence par le chiffre 1 et il est suivi par 2 021 zéros, comme cela : $1\underbrace{00\ldots0}_{2\,021\text{-fois}}$.

L'exercice nous dit que $2^{2\,021}$ a 609 chiffres. Alors il est plus grand que $1\overbrace{00\ldots0}^{608\text{-fois}}$ (ces deux nombres sont différents parce que $2^{2\,021}$ n'est pas un multiple de 5, donc il ne peut pas se terminer par un zéro). De plus, ce nombre est plus petit que $1\underbrace{00\ldots0}_{609\text{-fois}}$. En mettant tout ensemble, on obtient :

$$1\underbrace{00\ldots0}_{608\text{-fois}} < 2^{2\,021} < 1\underbrace{00\ldots0}_{609\text{-fois}}$$

Notons n le nombre de chiffres danas $5^{2\,021}$. Comme dans le paragraphe précédent, ce nombre est plus grand que $1\overbrace{00\ldots0}^{(n-1)\text{-fois}}$ (ces deux nombres sont différents parce que $5^{2\,021}$ n'est pas un multiple de 2, donc il ne peut pas se terminer par un zéro). De plus, ce nombre est plus petit que $1\underbrace{00\ldots0}_{n\text{-fois}}$. En mettant tout ensemble, on obtient :

$$1\underbrace{00\ldots0}_{(n-1)\text{-fois}} < 5^{2\,021} < 1\underbrace{00\ldots0}_{n\text{-fois}}$$

Rassemblons toutes ces informations. Regardons le produit de $2^{2\,021}$ et $5^{2\,021}$. Si on remplace les nombres par des nombres leurs étant inférieurs, on obtient un produit plus petit. Donc nous avons :

$$1\underbrace{00\ldots0}_{608\text{-fois}} \cdot 1\underbrace{00\ldots0}_{(n-1)\text{-fois}} < 2^{2\,021} \cdot 5^{2\,021}$$

Similairement :

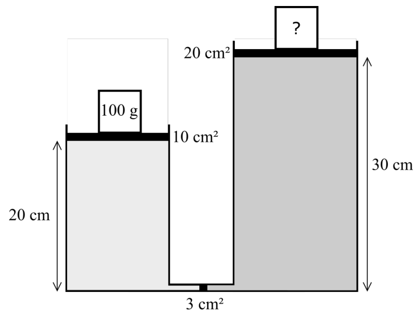
$$2^{2\,021} \cdot 5^{2\,021} < 1\underbrace{00\ldots0}_{609\text{-fois}} \cdot 1\underbrace{00\ldots0}_{n\text{-fois}}$$

Recall that by multiplication of numbers ending with zeros, the number of zeros is being added, so we get : Rappelons que lors d'une multiplication de nombres se terminant par des zéros, les zéros s'ajoutent. On obtient alors :

$$1\underbrace{00\ldots0}_{(n+607)\text{-fois}} < 2^{2\,021} \cdot 5^{2\,021} < 1\underbrace{00\ldots0}_{(n+609)\text{-fois}}$$

De cette manière, on a encadré le nombre $2^{2\,021} \cdot 5^{2\,021}$ entre les nombres $1\overbrace{00\ldots0}^{(n+607)\text{-fois}}$ et $1\overbrace{00\ldots0}^{(n+609)\text{-fois}}$. Le seul nombre entre ces bornes qui est formé d'un chiffre 1 suivi que par des zéros est un nombre avec $n+608$ zéros. Mais on sait que $2^{2\,021} \cdot 5^{2\,021}$ a cette forme, ça doit donc être le même nombre. Comme on a trouvé l'équation $2^{2\,021} \cdot 5^{2\,021} = 1\underbrace{00\ldots0}_{2021\text{-fois}}$, alors on obtient $n + 608 = 2\,021$.
À partir de là, on trouve que le nombre de chiffres de $5^{2\,021}$ est $n = 2\,021 - 608 = 1\,413$.

Problème 34. Mathieu a obtenu un dispositif hydraulique que vous pouvez voir sur la figure. Il se compose de deux parties. L'une est remplie d'eau et l'autre d'huile. Ces deux parties sont reliées par un piston mobile de surface $3\,\mathrm{cm}^2$. La partie remplie d'eau possède un autre piston de surface $10\,\mathrm{cm}^2$ et d'une hauteur de $20\,\mathrm{cm}$. La partie remplie d'huile a aussi un autre piston mais celui-ci a une surface de $20\,\mathrm{cm}^2$ et une hauteur de $30\,\mathrm{cm}$. Mathieu pose un poids de masse $100\,\mathrm{g}$ sur le piston dans la partie avec de l'eau. Quelle doit être la masse du poids en grammes que Mathieu doit mettre sur le piston dans la partie avec de l'huile pour que le système reste au repos ?



Résulat. 60

Solution. Si les pistons ne bougent pas, il doit y avoir la même force agissant sur le piston des deux côtés, donc la somme des forces est de 0. Comme le piston a la même surface des deux côtés, la pression sur le piston doit être la même. La pression agissant sur le petit piston depuis la direction du piston avec l'eau, a deux composantes : la pression hydrostatique et la pression induite par une force externe (poids de l'objet sur le 1. piston). La pression hydrostatique de la colonne d'eau de hauteur $h_1 = 20\,\mathrm{cm}$ est :

$$p_{h1} = h_1 \rho_{eau} g$$

La pression induite par un objet de poids $m_1 = 100\,\mathrm{g}$ posé sur un piston de surface $S_1 = 10\,\mathrm{cm}^2$ est :

$$p_{t1} = \frac{m_1 g}{S_1}$$

De même, la pression hydrostatique d'une colonne d'huile d'une hauteur de $h_2 = 30\,\mathrm{cm}$ et la pression induite par un objet de poids inconnu m_2 posé sur un piston d'une surface de $S_2 = 20\,\mathrm{cm}^2$ sont :

$$p_{h2} = h_2 \rho_{oil} g$$
$$p_{t2} = \frac{m_2 g}{S_2}$$

Comme nous l'avons dit $p_{h1} + p_{t1} = p_{h2} + p_{t2}$. Donc on peut dire :

$$h_1 \rho_{eau} g + \frac{m_1 g}{S_1} = h_2 \rho_{oil} g + \frac{m_2 g}{S_2}$$
$$h_1 \rho_{eau} + \frac{m_1}{S_1} = h_2 \rho_{oil} + \frac{m_2}{S_2}$$

A partir de là, nous pouvons exprimer m_2 :

$$m_2 = S_2 \left(h_1 \rho_{eau} - h_2 \rho_{huile} + \frac{m_1}{S_1} \right) = 20\,\mathrm{cm}^2 \cdot \left(20\,\mathrm{cm} \cdot 1\,\mathrm{g/cm}^3 - 30\,\mathrm{cm} \cdot 0{,}9\,\mathrm{g/cm}^3 + \frac{100\,\mathrm{g}}{10\,\mathrm{cm}^2} \right) = 60\,\mathrm{g}$$

Mathieu doit mettre un objet avec un poids de 60 g sur le deuxième piston.

Problème 35. Dix personnes ont assisté à une pièce en deux actes dans un théâtre. Pendant le premier acte, les dix personnes étaient toutes assises au premier rang. Cependant, le groupe a échangé ses sièges entre les deux actes. Tout le monde est resté au premier rang, mais seuls deux d'entre eux étaient assis à leur place initiale. En outre, chacune des huit personnes qui n'étaient pas assises sur leur siège d'origine était assise sur le siège d'un de leurs voisins d'origine. De combien de façons auraient-elles pu échanger leurs sièges ?

Résulat. 15

Solution. Choisissons d'abord les deux personnes qui n'ont pas changé de siège. Ces deux personnes divisent le reste des personnes en trois groupes - à gauche des deux sièges fixes, au milieu, entre les sièges fixes et à droite des deux sièges fixes. Dans cette division, nous considérons qu'un groupe d'aucune personne est néanmoins un « groupe ». Remarquez qu'un membre de chaque groupe doit s'asseoir sur un siège qui appartenait auparavant à un autre membre du même groupe afin de s'assurer qu'il s'agit bien du siège de son voisin.
Examinons maintenant un bord d'un groupe non vide - un siège voisin du siège d'une personne fixe ou du bord de la rangée. Puisque le siège n'a qu'un seul voisin au sein du groupe, la personne initialement assise sur ce siège avant que l'échange ne prenne place n'a qu'une seule option pour s'asseoir. De même, la personne assise au bord du groupe après l'échange n'a qu'une seule possibilité de s'asseoir. Cela signifie toutefois que le couple mentionné a échangé ses sièges, créant ainsi un nouveau « bord ». Par conséquent, dans un groupe, nous pouvons jumeler des personnes qui doivent simplement échanger leurs sièges. Cela signifie que chaque groupe doit avoir un nombre égal de membres pour que nous puissions les placer tous en accord avec l'énoncé du problème.
Nous pouvons ensuite «fusionner» chacune de ces paires en une seule personne, créant ainsi 4 «personnes fusionnées». Il reste maintenant à savoir de combien de façons nous pouvons placer les personnes fixes parmi elles. Avec les deux personnes fixes, nous disposons de 6 positions pour placer une personne. Par conséquent, nous pouvons placer la première personne fixe de 6 façons et l'autre personne fixe ensuite de 5 façons, ce qui nous donne $6 \cdot 5 = 30$ options. Cependant, jusqu'à présent, nous avons compté chaque option deux fois, car si nous échangeons les deux personnes fixes, nous n'aurons pas de nouvelle option. Cela signifie que les personnes ont pu échanger leurs sièges de 15 façons différentes.

Problème 36. Jonas a deux ressorts. L'un a une constante de raideur de 3 N/cm et l'autre une constante de raideur de 6 N/cm. Il les a relié point par point. Quelle est la constante de raideur, en N/cm du ressort qu'il a obtenu ?

Résulat. 2

Solution. Lorsque l'on étire les ressorts connectés avec une force F, les deux ressorts sont étirés avec cette force. Le ressort dont la constante de raideur est $k_1 = 3\,\mathrm{N/cm}$ s'allonge de $\frac{F}{k_1}$. De même, le ressort de constante $k_2 = 6\,\mathrm{N/cm}$ s'allonge de $\frac{F}{k_2}$. Si nous désignons la constante de raideur inconnue des ressorts connectés par k, alors les ressorts connectés doivent s'allonger de $\frac{F}{k}$, ce qui doit être la somme des allongements des ressorts. Par conséquent, il doit être vrai que :

$$\frac{F}{k} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}$$
$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$
$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

Les ressorts connectés ont donc une constante de raideur de :

$$k = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2} = \frac{3\,\mathrm{N/cm} \cdot 6\,\mathrm{N/cm}}{3\,\mathrm{N/cm} + 6\,\mathrm{N/cm}} = 2\,\mathrm{N/cm}$$

Problème 37. Jean a reçu un jeu de société comme cadeau de Noël. Son jeu se joue sur un plateau, composé de 2 020 cases disposées en cercle. Il place un jeton sur n'importe quelle case. Puis il joue comme suit : au premier tour, il déplace le jeton de 2 cases dans le sens des aiguilles d'une montre, au deuxième tour de 4 cases dans le sens des aiguilles d'une montre, au troisième de 6 cases toujours dans le sens des aiguilles d'une montre et ainsi de suite, à chaque tour il déplace le jeton de 2 cases de plus dans le sens des aiguilles d'une montre que lors du mouvement précédent. Quel est le nombre minimal de déplacements que Jean doit effectuer jusqu'à ce que le jeton s'arrête à nouveau sur la tuile où il l'a posé au début ?

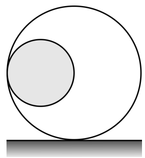
Résulat. 100

Solution.

$$2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + n) = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$$

Après que Jean ait effectué n coups, le jeton se déplace de $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n$ tuiles. En factorisant le numéro deux et en utilisant une expression pour la somme des n premiers entiers positifs, on obtient : $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = 2(1 + 2 + 3 + \cdots + n) = 2 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$. Pour obtenir le jeton de départ après s'être déplacé de $n(n+1)$ tuiles sur la tuile où il a commencé, le nombre $n(n+1)$ doit être divisible par 2 020. La factorisation en nombres premiers du nombre 2 020 est $2\,020 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101$. Donc, en particulier, le nombre $n(n+1)$ doit être divisible par le nombre premier 101. Le plus petit n pour lequel cela se produit est $n = 100$ lorsque $n + 1 = 101$. Dans ce cas, $n = 100$ est également un facteur de $2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$. Donc pour $n = 100$ le nombre $n(n+1)$ est divisible par 2 020. Ainsi nous avons montré qu'après 100 coups le jeton arrive sur la case de départ et que cela n'arrivera pas après moins de coups. Par conséquent, Jean effectué au moins 100 coups.

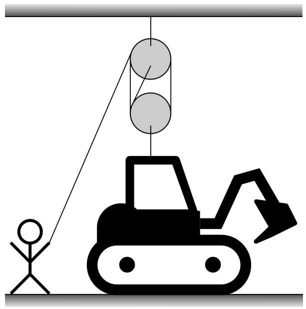
Problème 38. Le magicien Marc a mis par magie une balle de rayon 20 cm et de masse 0,5 kg dans une plus grosse balle de rayon 40 cm et de masse 0,5 kg comme sur la figure. Il a ensuite dissipé le sort qui maintenait la petite boule en place, et la petite boule a commencé à bouger. Un peu plus tard, la petite balle s'est arrêtée au pied de la grande balle. Quelle distance en centimètres la plus grosse balle a-t-elle parcourue depuis son point de contact initial avec la surface ?



Résulat. 10

Solution. La seule force extérieure agissant sur chaque boule est la force de gravité et la force normale de la surface, toutes agissant dans la direction verticale. Par conséquent, le centre de masse du système ne peut pas se déplacer dans la direction horizontale. Lorsque le système s'arrête de bouger, le centre de masse du système doit se trouver au-dessus du point de contact de la plus grosse boule avec la surface. Il nous suffit de déterminer à quelle distance du point de contact initial, dans la direction horizontale, se trouve le centre de masse du système avant le mouvement. Le centre de masse de la plus grosse balle se trouve au-dessus du point de contact à une distance de 0 cm dans la direction horizontale. Le centre de masse de la petite balle se trouve par contre à une distance de 20 cm dans la direction horizontale. Puisque les balles ont la même masse, le centre de masse du système se trouve au milieu du segment de droite reliant les centres de masse des billes. Cela signifie que le centre de masse original du système est situé à une distance de 10 cm horizontalement du point de contact original avec la surface. La boule la plus grande se déplace donc de 10 cm de son point de contact initial avec la surface.

Problème 39. Bob le bricoleur, veut faciliter son travail sur le chantier. Diane lui conseille de construire un système de poulies comme sur la figure. L'essentiel est que la corde passe plusieurs fois autour des poulies sans que la corde ne glisse. Bob peut tirer la corde avec une force maximale de 800 N et doit soulever sa tractopelle Scoup qui pèse 3500 kg. Quel est le nombre minimal de fois que la corde doit passer sous la poulie mobile pour soulever Scoup ?



Résulat. 22

Solution. Bob le bricoleur tire la corde avec une force $F = 800\,\mathrm{N}$. La tension de la corde est donc égale à la force F en tout point de la corde. Ceci est également vrai sur la poulie inférieure et sur les deux côtés de la corde autour de la poulie inférieure. La corde agit donc avec une force de $2F$, la déplaçant vers le haut. Ceci, bien sûr, est vrai à chaque fois que la corde passe autour de la poulie inférieure. Si la corde fait le tour de la poulie n fois, la force agissant sur la poulie inférieure est de $2nF$. Pour soulever Scoup avec sa masse $m = 3500\,\mathrm{kg}$, cette force doit être supérieure à la force de gravité agissant sur Scoup. Par conséquent,

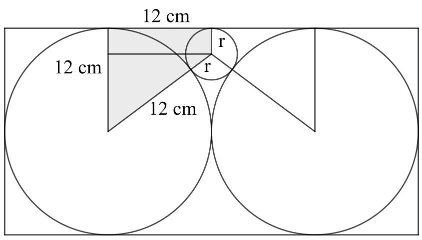
$$2nF \geq mg$$
$$n \geq \frac{mg}{2F} = \frac{3500\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2}}{2 \cdot 800\,\mathrm{N}} = 21.875$$

Et nous pouvons voir que la corde doit passer autour de la poulie du bas au moins 22 fois.

Problème 40.
Laura veut dessiner un nouveau modèle de drapeau pour les Jeux Olympiques. Elle a dessiné un rectangle dont les côtés ont pour longueur 24 cm et 48 cm. Elle a ensuite tracé à l'intérieur deux cercles de rayon 12 cm de sorte que ces cercles soient tangents à l'extérieur. Enfin, elle a tracé un cercle plus petit, qui est tangent aux deux cercles et au côté le plus long du rectangle. Quel est le rayon de ce petit cercle en centimètres ?

Résulat. 3

Solution.
Notons par r la longueur du rayon du plus petit cercle. Si on dessine une figure, on peut écrire certaines de ces longueurs :

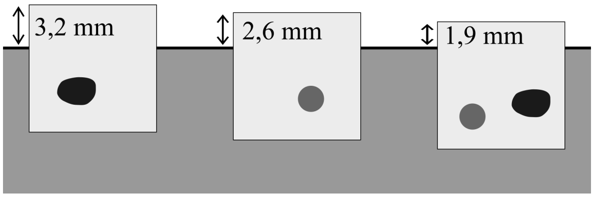


Concentrons-nous sur le trapèze droit mis en évidence. Ses bases sont les rayons du plus grand et du plus petit cercle. La partie perpendiculaire à la base a la même longueur que le rayon du plus grand cercle. Enfin, la dernière partie a une longueur égale à la somme des longueurs des rayons du plus petit et du plus grand cercle. Divisons ce trapèze en un rectangle et un triangle rectangle. Dans le triangle rectangle se trouvent les longueurs des côtés : $12\,\mathrm{cm}$, $12\,\mathrm{cm} - r$, $12\,\mathrm{cm} + r$. Ce triangle est droit, donc le théorème de Pythagore nous dit que :

$$(12\,\mathrm{cm})^2 + (12\,\mathrm{cm} - r)^2 = (12\,\mathrm{cm} + r)^2$$
$$144\,\mathrm{cm}^2 + 144\,\mathrm{cm}^2 - r \cdot (24\,\mathrm{cm}) + r^2 = 144\,\mathrm{cm}^2 + r \cdot (24\,\mathrm{cm}) + r^2$$
$$144\,\mathrm{cm}^2 = 2 \cdot r \cdot (24\,\mathrm{cm})$$
$$r = 3\,\mathrm{cm}$$

Cela signifie que le rayon du plus petit cercle a une longueur de $r = 3\,\mathrm{cm}$.

Problème 41. Lucie joue avec de la glace. Elle prend un petit caillou et le congèle dans un cube d'eau pour en faire un glaçon avec le caillou à l'intérieur. Elle prend ensuite un bol d'eau et pose le glaçon à la surface de l'eau. La partie du glaçon au-dessus de l'eau est haute de 3,2 mm. Ensuite, Lucie prend une petite bille et la congèle en un glaçon cubique de la même taille que le précédent. Lorsqu'elle met ce glaçon dans l'eau, la partie au-dessus de l'eau n'a plus qu'une hauteur de 2,6 mm. Cependant, Lucie n'est toujours pas satisfaite. Elle fait donc fondre les deux cubes et congèle le caillou et la bille pour former un troisième glaçon cubique de la même taille que les deux précédents. Lorsqu'elle met ce cube dans l'eau, la partie hors de l'eau a une hauteur de 1,9 mm. Quelle est la longueur du côté des trois cubes en millimètres ?



Résulat. 39

Solution. Lorsque Lucie congèle le caillou ou la bille pour en faire un cube, elle ne change pas le volume, mais elle augmente la masse. Cela modifie la densité moyenne du cube. Si le cube ne coule pas, le volume de la partie immergée du cube est directement proportionnel à sa densité moyenne, donc la hauteur de la partie immergée doit également être directement proportionnelle à la densité moyenne. De plus, l'ajout d'un caillou (ou d'une bille) augmente toujours la densité moyenne de la même valeur. Par conséquent, cela augmente toujours la hauteur de la partie immergée du cube de la même valeur, ce qui signifie également que cela diminue toujours la hauteur de la partie au-dessus de la surface de l'eau de la même valeur.

Lorsque nous avions dans un cube uniquement le caillou et que nous avons ajouté la bille, la hauteur de la partie au-dessus de l'eau a diminué de 3,2 mm − 1,9 mm = 1,3 mm. Par conséquent, l'ajout de la bille diminue toujours la hauteur de la partie au-dessus de l'eau de 1,3 mm. Si on prend le cube avec seulement la bille et qu'on enlève la bille, le cube contenant seulement de la glace aura une hauteur de la partie au-dessus de l'eau de 2,6 mm. + 1,3 mm = 3,9 mm. Pour un cube de côté a, dont le volume de la partie immergée est V' et de hauteur de la partie au-dessus de l'eau $h = 3{,}9\,\mathrm{mm}$, nous obtenons par le principe d'Archimède, que :

$$\begin{aligned}
mg &= V'\rho_{eau}g\\
V\rho_{glace} &= V'\rho_{eau}\\
Sa\rho_{glace} &= S(a-h)\rho_{eau}\\
a\rho_{glace} &= (a-h)\rho_{eau}\\
a(\rho_{eau}-\rho_{glace}) &= h\rho_{eau}\\
a &= h\frac{\rho_{eau}}{\rho_{eau}-\rho_{glace}} = 3{,}9\,\mathrm{mm}\frac{1000\,\mathrm{kg/m^3}}{1000\,\mathrm{kg/m^3}-900\,\mathrm{kg/m^3}} = 39\,\mathrm{mm}
\end{aligned}$$

Donc le côté du cube de Lucie mesure 39 mm.

Problème 42. Marcel a commencé à écrire une liste de nombres : 1, 2, 4, 8, 16, 32 et ainsi de suite, chaque nombre étant le double du nombre du précédent. De cette façon, il a écrit 555 nombres. Puis il a créé une deuxième liste composée des premiers chiffres des nombres de la première liste. Ainsi, la deuxième liste commençait par les nombres 1, 2, 4, 8, 1, 3 . . .et se terminait par les nombres 1, 3, 7, 1, 2, 5. Majo a remarqué que le chiffre 8 est écrit 30 fois dans la deuxième liste et que le dernier nombre de la première liste a 167 chiffres. Combien de fois le chiffre 9 est-il écrit dans la deuxième liste ?

Résulat. 24

Solution. Il semble qu'il n'y ait pas de motif dans les premiers chiffres des nombres de la première liste. Cependant, l'inverse est vrai. Si nous notons certains des premiers chiffres de la deuxième liste, nous pouvons remarquer que le chiffre 1 y apparaît étrangement souvent. À partir de ce chiffre, les nombres augmentent jusqu'à ce qu'ils reviennent au chiffre 1.

Concentrons-nous sur cette observation et regardons quels nombres peuvent suivre un nombre donné :

— Le chiffre 1 ne peut être suivi que par 2 ou 3.

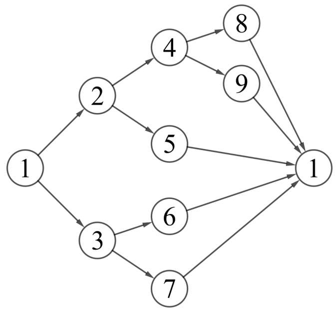
— Le chiffre 2 ne peut être suivi que par 4 ou 5.

— Le chiffre 3 ne peut être suivi que par 6 ou 7.

— Le chiffre 4 ne peut être suivi que par 8 ou 9.

— Les chiffres 5, 6, 7, 8, 9 ne peuvent être suivis que par 1 parce que l'on passe à la dizaine suivante.

On peut représenter ces informations par le schéma suivant, où les flèches représentent les chiffres suivants possibles.



On voit ici que les uns vont diviser les nombres de la deuxième liste en blocs. De plus, presque tous les blocs seront formés d'exactement 3 chiffres (y compris le chiffre 1). Il n'y a que deux blocs possibles qui contiennent 4 nombres - le bloc 1, 2, 4, 8 et le bloc 1, 2, 4, 9. De plus, ce sont les seuls blocs qui contiennent les chiffres 8 et 9.
Nous devons remarquer une dernière chose. Lorsque nous atteignons un chiffre 1 dans la deuxième liste, le nombre correspondant dans la première liste aura un chiffre de plus que le nombre qui le précède dans la première liste - c'est parce que le nombre 1 apparaît comme premier chiffre après le passage à la dizaine supérieure.
Maintenant, nous rassemblons tout. Nous savons que les trois derniers chiffres de la deuxième liste sont 1, 2, 5, ce qui nous permet de compléter le bloc entier. Le premier bloc est constitué des 4 premières puissances de 2 et le dernier bloc correspond aux nombres à 167 chiffres de la première liste. Il doit donc y avoir 167 blocs. Si tous les blocs étaient de taille 3, alors on aurait seulement $3 \cdot 167 = 501$ nombres au total. Donc il doit y avoir $555 - 501 = 54$ blocs de 4 chiffres. Ainsi, dans 54 blocs, il y aura soit le chiffre 8, soit le chiffre 9. Comme on sait que le chiffre 8 apparaît 30 fois, cela veut dire que le chiffre 9 apparaît $54 - 30 = 24$ fois.