Rozwiązania

Náboj Junior IX edycja

19 listopada 2021

Podziękowania

Propozycje zadań:

Alžběta Andrýsková, Anežka Čechová, Kateřina Charvátová, Robert Gemrot, Matej Hrmo, Soňa Husáková, Radek Kusek, Viktor Materna, Aleš Opl, Marián Poturnay, Patrik Švančara, Martin Vaněk

Zadania i rozwiązania:

Jakub Hluško, Matej Hrmo, Nina Hronkovičová, Marián Poturnay, Patrik Rusnák, Ela Vojtková

Korekta:

Barbora Čemanová, Michal Farnbauer, Filip Hanzely, Matej Hrmo, Nina Hronkovičová, Marián Poturnay, Patrik Rusnák, Ela Vojtková

Tłumaczenie:

Alžběta Andrýsková, Anežka Čechová, Robert Gemrot, Filip Hanzely, Matej Hrmo, Patrik Kašpárek, Radek Kusek, Karolína Letochová, Viktor Materna, Marcel Palaj, Łukasz Popek, Marián Poturnay, Juraj Rosinský, Patrik Rusnák, Sabína Samporová, Tomáš Šimek, Patrik Švančara, Karolina Szulc, Mateusz Wojtas

Organizatorzy lokalni:

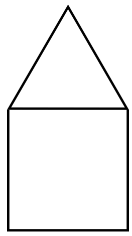
Michaela Dlugošová (SK), Radek Kusek (PL), Juraj Rosinský (FR), Patrik Švančara (CZ)

Zadanie 1. Maciek kupił trzy gałki lodów. Pierwsza gałka kosztowała $0,80$zł, druga $0,70$zł, a trzecia $1,05$zł. Maciek zapłacił monetą 5zł. Ile złotych reszty otrzyma?

Wynik. $2,45$

Rozwiązanie. Maciek zapłacił monetą 5zł za trzy gałki lodów, których łączna cena wynosiła $0,80\text{zł} + 0,70\text{zł} + 1,05\text{zł} = 2,55\text{zł}$. Czyli reszta jaką otrzyma to $5\text{zł} - 2,55\text{zł} = 2,45\text{zł}$.

Zadanie 2. Natalia chce narysować domek - kwadrat z trójkątem równobocznym jako dachem (patrz rysunek). Długość boku kwadratu ma wynosić 0,5 m. Narysowanie 1 dm linii zajmuje Natalii jedną sekundę. Ile sekund zajmie jej narysowanie całego domku?



Wynik. 30 s

Rozwiązanie. Wszystkie boki kwadratu mają tę samą długość 0,5 m. Wszystkie boki trójkąta równobocznego także mają równą długość. Jeden z nich jest równocześnie bokiem kwadratu, więc wszystkie odcinki na obrazku mają tę samą długość 0,5 m. Jest ich sześć, więc suma długości wszystkich odcinków wynosi $6 \cdot 0{,}5\,\text{m} = 3\,\text{m}$. W trakcie sekundy Natalia rysuje 1 dm linii, więc w trakcie każdych 10 sekund rysuje $10 \cdot 1\,\text{dm} = 10\,\text{dm} = 1\,\text{m}$ linii. By stworzyć cały obrazek, musi narysować trzy razy tyle. Zajmie jej to zatem $3 \cdot 10\,\text{s} = 30\,\text{s}$.

Zadanie 3. Archimedes ma wagę elektroniczną. Postawił na niej pojemnik o objętości 1 l i masie 250 g. Następnie Archimedes wypełnił pojemnik do połowy objętości wodą. Na koniec wrzucił do wody kawałek drewna o masie 300 g i gęstości $600\,\text{kg}/\text{m}^3$, który zaczął unosić się na wodzie. Jaką masę (w gramach) wskazuje teraz waga Archimedesa?

Wynik. 1050 g

Rozwiązanie. Chociaż unoszony siłą wyporu kawałek drewna pływa na wodzie, to nie będzie miało to wpływu na wskazanie wagi. Istotna jest tylko masa pojemnika i jego zawartości. Siły działające między będącymi w spoczynku ciałami znajdującymi się wewnątrz pojemnika nie mają wpływu na masę całego układu. Możemy zatem zsumować masę poszczególnych obiektów: pojemnik waży 250 g, pół litra wody waży 500 g, a kawałek drewna waży 300 g. Waga pokaże zatem $250\,\text{g} + 500\,\text{g} + 300\,\text{g} = 1050\,\text{g}$.

Zadanie 4. Patryk tworzy plan nauki na najbliższych pięć godzin. Chce poświęcić trzy jednogodzinne bloki nauki matematyce i dwa jednogodzinne bloki nauki fizyce. Na ile sposobów Patryk może zaplanować te pięć godzin?

Wynik. 10

Rozwiązanie. Wypiszmy wszystkie przypadki. Jeśli Patryk rozpocznie naukę od matematyki, to możliwe są następujące układy: MMMFF, MMFMF, MMFFM, MFMMF, MFMFM, MFFMM. Jeśli zaś zacznie od fizyki, to mamy następujące ewentualności: FMMMF, FMMFM, FMFMM, FFMMM. Łącznie istnieje zatem 10 różnych harmonogramów.

Zadanie 5. Ślimak przygotowuje się do długiej podróży. Planuje pokonać 100-jardowe boisko piłkarskie. Ile godzin zajmie mu podróż, jeśli ślimak pokonuje 1 cal w 10 sekund?

Wynik. 10

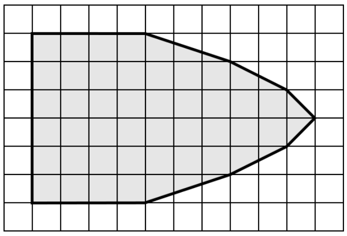
Rozwiązanie. Jard składa się z 3 stóp, a stopa z 12 cali. 1 jard składa się zatem z $3 \cdot 12 = 36$ cali. Ślimak musi pokonać 100 jardów, czyli $100 \cdot 36 = 3\,600$ cali. Pokonanie cala zajmuje mu 10 sekund. Zatem pokonanie całego boiska zajmie mu $10 \cdot 3\,600 = 36\,000$ sekund. Godzina składa się z 60 minut, a minuta z 60 sekund, więc 1 godzina składa się z $60 \cdot 60 = 3\,600$ sekund. Zatem ślimak potrzebuje $36\,000 \div 3\,600 = 10$ godzin na pokonanie całego boiska.

Zadanie 6. Józek pomnożył liczbę $111\,111\,111$ przez nią samą. Jaka jest suma cyfr liczby, która jest wynikiem mnożenia?

Wynik. 81

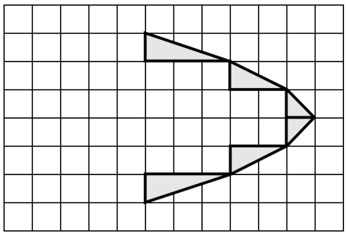
Rozwiązanie. Jeżeli pomnożymy liczbę $111\,111\,111$ przez nią samą to otrzymamy liczbę $12\,345\,678\,987\,654\,321$. Suma cyfr tej liczby wynosi: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 81$.

Zadanie 7. Zuzia namalowała pocisk na kartce w kratkę, jak na rysunku niżej. Do zamalowania jednej kratki potrzebny jest 1 gram atramentu. Ile gramów atramentu zużyła Zuzia?



Wynik. 46

Rozwiązanie. Policzmy najpierw ile kratek zostało całkowicie wypełnionych. Takich kratek jest 40 i odpowiadają one 40 gramom atramentu. Poza nimi są jeszcze kratki wypełnione częściowo. Po usunięciu całkowicie wypełnionych kratek pozostaje 6 namalowanych trójkątów.



Trójkąty leżące jeden nad drugim są tych samych rozmiarów i mogą zostać połączone w prostokąty. Pierwszy taki prostokąt pokrywa 3 kratki, drugi pokrywa 2 kratki, a trzeci pokrywa 1 kratkę. Do ich wypełnienia potrzeba więc $3 + 2 + 1 = 6$ gramów atramentu. Zatem Zuzia potrzebuje 46 gramów atramentu do namalowania całego obrazka.

Zadanie 8. Pewnego poranka Adam wybrał się na stadion lekkoatletyczny z bieżnią o długości 400 m. W trakcie pierwszych 20 minut biegu biegł tak szybko, że gdyby utrzymał swoje tempo przez godzinę, to przebiegłby 400 metrową bieżnię 20 razy. Ile wyniosła średnia prędkość Adama (w kilometrach na godzinę) w trakcie pierwszych 20 minut biegu?

Wynik. 8 km/h

Rozwiązanie. Gdyby Adam utrzymał swoje tempo, to przebiegłby 20 razy po 400 m, a więc $20 \cdot 400\,\mathrm{m} = 8000\,\mathrm{m}$ w jedną godzinę. Odpowiada to prędkości 8 km/h. Jak ta prędkość ma się do jego prędkości średniej? Ponieważ Adam nie zmienił tempa w trakcie pierwszych 20 minut biegu, to właśnie 8 km/h musi być jego prędkością średnią. Stąd jego prędkość średnia pierwszych 20 minut biegu wyniosła 8 km/h.

Zadanie 9. Autobusy miejskie jeżdżą tam i z powrotem między dwoma przystankami końcowymi, tak, żeby pasażerowie nie musieli nigdy czekać na autobus dłużej niż 10 minut. Ile wynosi minimalna liczba autobusów, które muszą jeździć tą trasą, jeśli jej długość wynosi 7200 m, a autobusy jeżdżą ze średnią prędkością 5 m/s?

Wynik. 5

Rozwiązanie. Kurs w jedną stronę między przystankami końcowymi trwa

$$\frac{7200\,\mathrm{m}}{5\,\mathrm{m/s}} = 1440\,\mathrm{s} = 24\,\mathrm{min}.$$

Stąd podróż tam i z powrotem zajmuje $2 \cdot 24\,\mathrm{min} = 48\,\mathrm{min}$. Jeśli chcemy, by pasażerowie nigdy nie czekali na autobus dłużej niż 10 min, to przynajmniej 4 autobusy muszą opuścić przystanek początkowy zanim pierwszy autobus nie powróci. Zatem potrzeba łącznie pięciu autobusów.

Zadanie 10. Jarosław ma drukarkę w swoim biurze. Drukuje ona 20 stron na minutę. Jest jeszcze inna drukarka, w pokoju ogólnodostępnym, która może drukować 25 stron na minutę. Drukarka w pokoju ogólnodostępnym jest połączona z komputerem Jarosława, więc może on wysłać do niej dokumenty do druku wprost ze swojego biura. Jarosław potrzebuje 1 minuty, aby dojść ze swojego biura do pokoju ogólnodostępnego. Jaka jest najmniejsza liczba stron do druku taka, że Jarosław zaoszczędzi czas korzystając z drukarki z pokoju ogólnodostępnego?

Wynik. 101

Rozwiązanie. Używając drukarki w pokoju ogólnodostępnym, Jarosław traci czas tylko wracając do swojego biura: traci więc jedną minutę. Aby drukowanie w pokoju ogólnodostępnym było dla Jarosława opłacalne, tamtejsza drukarka musi skończyć drukowanie o ponad minutę wcześniej niż ta w biurze. Zauważmy, że drukarka w biurze drukuje 20 stron na minutę. Żeby opłacalne było korzystanie z drukarki z pokoju ogólnodostępnego, jej czas drukowania musi być taki, żeby zdążyła wydrukować o ponad 20 stron więcej niż wolniejsza drukarka w tym samym czasie. Drukarka w pokoju ogólnodostępnym drukuje o $25 - 20 = 5$ stron na minutę więcej niż drukarka z biura. Drukarka w pokoju ogólnodostępnym musi zatem drukować przez 4 minuty, aby wydrukować o 20 stron więcej od wolniejszej drukarki. Zatem żeby opłacalne było korzystanie z szybszej drukarki, musi ona pracować dłużej niż 4 minuty. Stąd użycie drukarki w pokoju ogólnodostępnym będzie szybsze, gdy Jarosław będzie drukował co najmniej 101 stron.

Zadanie 11. Piotr bawi się swoją ulubioną dodatnią liczbą całkowitą. Najpierw zaokrąglił ją z dokładnością do dziesiątek, następnie z dokładnością do setek, a na końcu z dokładnością do tysięcy. Okazało się, że wszystkie trzy wyniki zaokrąglania były równe, ale różne od zera. Jaka jest najmniejsza liczba, która mogłaby być ulubioną liczbą Piotra?

Wynik. 995

Rozwiązanie. Po zaokrągleniu do dziesiątek, maksymalna różnica między wynikiem a ulubioną liczbą Piotra wynosi 5. Najmniejsza liczba dodatnia, która może być wynikiem zaokrąglania do tysięcy to 1000. Tak więc ulubiona liczba Piotra nie może być mniejsza niż $1000 - 5 = 995$. Łatwo sprawdzamy, że liczba 995 spełnia wszystkie warunki.

Zadanie 12. Nina biega dookoła jeziora posiadającego obwód długości 6 km. Przebiegnięcie pierwszego okrążenia zajęło jej 40 minut. Po przebiegnięciu drugiego okrążenia zauważyła, że jej średnia prędkość podczas całego biegu wyniosła 8 km/h. Ile minut zajęło jej przebiegnięcie drugiego okrążenia?

Wynik. 50

Rozwiązanie. Nina przebiegła dwa okrążenia - więc całkowity dystans wyniósł $2 \cdot 6\,\text{km} = 12\,\text{km}$ - ze średnią prędkością 8 km/h. Stąd całkowity czas biegu musiał wynieść

$$\frac{12\,\text{km}}{8\,\text{km/h}} = 1{,}5\,\text{h} = 90\,\text{min}$$

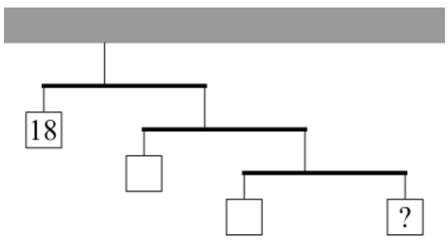
Ponieważ Nina przebiegła pierwsze okrążenie w 40 minut, to drugie okrążenie musiała przebiec w $90 - 40 = 50$ minut.

Zadanie 13. Ania, Basia i Celina grały ze sobą w szachy. Żadna z gier nie skończyła się remisem. Ania wygrała 7 gier i przegrała 10. Basia wygrała 8 razy i przegrała 9. Celina przegrała 8 razy. Ile razy wygrała Celina?

Wynik. 12

Rozwiązanie. Liczba przegranych gier wynosi $10 + 9 + 8 = 27$. Oznacza to, że wszystkich gier było dokładnie 27. To oznacza, że Celina wygrała $27 - 7 - 8 = 12$ gier.

Zadanie 14. Patrycja ma trzy lekkie dźwignie, które można zawiesić. Dłuższe ramię każdej dźwigni jest dwa razy dłuższe od krótszego ramienia. Na końcu krótszego ramienia pierwszej dźwigni Patrycja zawiesiła ciężarek o masie 18 kg. Na końcu dłuższego ramienia pierwszej dźwigni zawiesiła drugą dźwignię, a na końcu dłuższego ramienia drugiej dźwigni zawiesiła trzecią dźwignię. Na pozostałych końcach ramion dźwigni Patrycja zawiesiła ciężarki o takich masach, że cały układ pozostał w równowadze. Ile wynosi masa ciężarka zawieszonego na dłuższym końcu trzeciej dźwigni (w kilogramach)?



Wynik. 1 kg

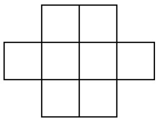
Rozwiązanie. Dłuższe ramię każdej dźwigni jest dwa razy dłuższe od krótszego ramienia. Stąd, żeby każda dźwignia była w równowadze, masa ciała zawieszonego na krótszym ramieniu musi być dwukrotnością masy ciała zawieszonego na dłuższym ramieniu. Na krótszym ramieniu pierwszej dźwigni zawieszony jest ciężar o masie 18 kg. Na dłuższym ramieniu wisi druga dźwignia, więc masa wszystkiego co jest zawieszone na tej dźwigni wynosi $18\,\text{kg} : 2 = 9\,\text{kg}$. Na drugiej dźwigni mamy zawieszony kolejny ciężarek i trzecią dźwignię. Żeby druga dźwignia znajdowała się w równowadze, to masa ciężarku zawieszonego na jej krótszym ramieniu musi być dwukrotnością masy wszystkiego co jest zawieszone na trzeciej dźwigni. Stąd ten ciężarek musi mieć masę 6 kg i dwa ostatnie ciężarki muszą mieć łączną masę 3 kg. Dzielimy tę masę między oba ciężarki w stosunku $2 : 1$. Ciężarek zawieszony na dłuższym ramieniu trzeciej dźwigni musi mieć zatem masę 1 kg.

Zadanie 15. W miejscowości Joasi od paru dni intensywnie pada. Na szczęście Joasia ma na swoim poziomym dachu system zbierania wody, który obejmuje powierzchnię $100\,\mathrm{m}^2$. W ciągu całego dnia system ten zebrał $4000\,\mathrm{l}$ wody. Joasia ma również w pobliżu domu basen. O ile milimetrów podniósł się poziom wody w basenie po deszczu?

Wynik. 40

Rozwiązanie. Gdyby woda nie spływała do systemu zbierania wody ani nie przelewała się przez krawędzie dachu, to po zakończeniu ulewy na dachu znajdowałby się prostopadłościenny blok wody. Zakładając, że deszcz spadł równie gęsto nad basenem jak nad dachem, wzrost poziomu wody w basenie będzie taki sam, jak wysokość tego wyimaginowanego bloku wody na dachu. Blok wody ma objętość $4000\,\mathrm{l} = 4000\,\mathrm{dm}^3 = 4\,\mathrm{m}^3$. Powierzchnia jego podstawy jest równa powierzchni dachu: $100\,\mathrm{m}^2$. Wiemy, że objętość bloku jest równa iloczynowi jego wysokości i pola podstawy. Zatem jego wysokość wynosi $\frac{4\,\mathrm{m}^3}{100\,\mathrm{m}^2} = 0{,}04\,\mathrm{m} = 40\,\mathrm{mm}$. Stąd poziom wody w basenie podniósł się o $40\,\mathrm{mm}$.

Zadanie 16. Magda znalazła na strychu dziwną tabliczkę (patrz obrazek). Postanowiła wygrawerować w każdym z jej pól jedną z liczb od 1 do 8 tak, żeby każda z tych liczb pojawiła się na tabliczce dokładnie raz i żeby różnica między każdymi dwoma liczbami z sąsiadujących (bokiem lub narożnikiem) pól wynosiła przynajmniej 2. Ile będzie wynosiła suma liczb z pól sąsiadujących (bokiem lub narożnikiem) z polem, na którym wygrawerowana została liczba 4?



Wynik. 22

Rozwiązanie. Z treści zadania wiemy, że liczby różniące się o 1 nie mogą ze sobą sąsiadować.
Spójrzmy na drugą i trzecią kratkę w środkowym rzędzie. Każda z nich sąsiaduje ze wszystkimi kratkami poza jedną. Jedynymi liczbami z przedziału 1-8, które posiadają w tym przedziale tylko jedną liczbę różniącą się od niej o 1 są 1 i 8, zatem to one muszą być wpisane do rozważanych kratek. Ze względu na symetrię tabliczki nie ma znaczenia kolejność w jakiej wpiszemy te liczby. Bez straty ogólności możemy zrobić to tak:

	1	8	

Liczby 1 i 8 mają tylko jedną liczbę, która różni się od nich o 1: są to 2 i 7 odpowiednio. Musimy zatem umieścić liczby 2 i 7 w pozostałych kratkach w środkowym rzędzie.

7	1	8	2

Kratka z liczbą 2 nie może sąsiadować z kratką zawierającą liczbę 3, zatem 2 musi się znajdować powyżej lub poniżej liczby 1. Podobnie liczba 6 musi się znajdować powyżej lub poniżej liczby 8. Mamy zatem dwa przypadki. Jeśli umieścimy liczby 3 i 6 w jednym rzędzie, to w pozostałym rzędzie będziemy musieli umieścić liczby 4 i 5 obok siebie, co jest zabronione. Musimy zatem umieścić liczby 3 i 6 w osobnych rzędach. Zauważmy teraz, że liczby 4 i 3 nie mogą sąsiadować, musimy zatem dokończyć wypełnianie tabliczki w następujący sposób:

	3	5	
7	1	8	2
	4	6	

Możemy teraz policzyć, że suma liczb sąsiadujących z liczbą 4 wynosi 22.

Zadanie 17. Jakub siedzi w pociągu, który porusza się z prędkością $108\,\mathrm{km/h}$. Nagle pociąg wjeżdża do tunelu, który, jak wynika z mapy Jakuba, ma długość 2 km. Jakub zauważył, że pociąg wyjechał z tunelu 75 sekund po wjechaniu do niego. Ile metrów długości ma ten pociąg?

Wynik. $250\,\mathrm{m}$

Rozwiązanie. Dla ułatwienia zamieńmy prędkość z kilometrów na godzinę na metry na sekundę: $108\,\mathrm{km/h} = 30\,\mathrm{m/s}$. Pociąg poruszający się z prędkością $30\,\mathrm{m/s}$ przez $75\,\mathrm{s}$ przejeżdża odległość $75\,\mathrm{s} \cdot 30\,\mathrm{m/s} = 2250\,\mathrm{m}$. Zatem lokomotywa przejechała $2250\,\mathrm{m}$ od wjazdu do tunelu. Ponieważ tunel ma długość $2000\,\mathrm{m}$, to po 75 sekundach lokomotywa znajdowała się $2250\,\mathrm{m} - 2000\,\mathrm{m} = 250\,\mathrm{m}$ za tunelem. Długość pociągu musi zatem wynosić $250\,\mathrm{m}$.

Zadanie 18. Ela posiada sześć ulubionych ołówków o różnych długościach. Każdy ołówek ma długość wyrażającą się całkowitą liczbą milimetrów. Średnia długość ołówka wynosi 12 mm. Ile (w milimetrach) wynosi największa możliwa długość ołówka Eli?

Wynik. 57 mm

Rozwiązanie. Ponieważ średnia długość ołówka Eli wynosi 12 mm, to suma długości jej ołówków wynosi $6 \cdot 12\,\text{mm} = 72\,\text{mm}$. Jeśli chcemy, by jeden z ołówków miał jak największą długość, to pozostałe ołówki muszą być jak najkrótsze. Muszą zatem mieć długości 1 mm, 2 mm, 3 mm, 4 mm, 5 mm odpowiednio, co łącznie daje 15 mm. Najdłuższy ołówek będzie miał wtedy $72\,\text{mm} - 15\,\text{mm} = 57\,\text{mm}$.

Zadanie 19. Kuba ćwiczy grę w curling na zamarzniętym jeziorze. Bierze kamień do curlingu o masie 18,6 kg i posyła go w ślizg po lodzie z prędkością początkową 2 m/s. Współczynnik tarcia lodu o kamień wynosi 0,05. Jak daleko (w metrach) kamień wyślizgnie się z ręki Kuby?

Wynik. 4 m

Rozwiązanie. Ze względu na zasadę zachowania energii, kamień traci energię kinetyczną w wyniku działania siły tarcia wykonującej pracę nad kamieniem. Początkowo kamień o masie $m = 18{,}6\,\text{kg}$ i prędkości $v = 2\,\text{m/s}$ ma energię kinetyczną $E_k = \frac{1}{2}mv^2$. Siłą spowalniającą kamień jest siła tarcia F_t, która jest równa iloczynowi siły normalnej pochodzącej od lodu i współczynnika tarcia f. W tej sytuacji siła normalna jest siłą ciężkości Ziemi $F_G = mg$, gdzie g jest przyspieszeniem grawitacyjnym. Jeżeli kamień porusza się na pewną odległość, to siła tarcia wykonuje pracę nad kamieniem $W = F_t s = F_G f s = mgfs$. Gdy kamień przestaje się poruszać, ma zerową prędkość, a więc zerową energię kinetyczną. Możemy więc obliczyć odległość s w następujący sposób:

$$\begin{aligned}\Delta E_k &= W\\ \frac{1}{2}m\Delta v^2 &= mgfs\\ \frac{1}{2}(v^2 - 0^2) &= fgs\\ \frac{1}{2}v^2 &= fgs\\ s &= \frac{v^2}{2fg}\end{aligned}$$

Wstawiając do powyższego wzoru odpowiednie wartości obliczamy, że kamień wyślizgnie się na odległość $s = \frac{(2\,\text{m/s})^2}{2 \cdot 0{,}05 \cdot 10\,\text{m/s}^2} = 4\,\text{m}$ od ręki Kuby.

Zadanie 20. Przemierzając szkolne korytarze, Kaja zauważyła na jednej z tablic dziwny rysunek. Składał się on z odcinka BC i jego symetralnej, na której zaznaczono punkty A i D tak, że punkt D znalazł się wewnątrz trójkąta ABC. Miara kąta BAC wynosiła 40° zaś miara kąta BDC wynosiła 140°. Ile wynosiła miara kąta ACD (w stopniach)?

Wynik. 50°

Rozwiązanie. Ponieważ punkty A i D leżą na symetralnej odcinka BC, to trójkąty ABC i DBC są równoramienne, o podstawie BC. Możemy stąd wyznaczyć miary katów przy podstawie trójkąta ABC jako $\frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$ i miary kątów przy podstawie trójkąta DBC jako $\frac{180^\circ - 140^\circ}{2} = 20^\circ$. Stąd miara kąta ACD wynosi $|\measuredangle ACD| = |\measuredangle ACB| - |\measuredangle DCB| = 70^\circ - 20^\circ = 50^\circ$.

Zadanie 21. Kasia wybrała się na wycieczkę w góry. Było zimno, więc postanowiła zrobić sobie herbatę. Miała 0,5 l wody o temperaturze 0 °C. Zaparzyła herbatę nad ogniskiem z wydajnością $0,5\%$. Ile kilogramów drewna musiała użyć, aby zagotować całą objętość wody?

Wynik. 2 kg

Rozwiązanie. Ciepło spalania drewna wynosi 21 MJ/kg = 21 000 kJ/kg, ciepło właściwe wody 4,2 kJ/(kg °C). Ponieważ sprawność spalania drewna w ognisku wynosi tylko $0,5\%$, to spalając jeden kilogram otrzymujemy $21\,000\,\text{kJ/kg} \cdot 0{,}005 \cdot 1\,\text{kg} = 105\,\text{kJ}$ energii. Aby doprowadzić wodę do wrzenia, czyli podnieść jej temperaturę z 0 °C do 100 °C, Kasia potrzebuje energii $(100\,^\circ\text{C} - 0\,^\circ\text{C}) \cdot 4{,}2\,\text{kJ/(kg}\,^\circ\text{C)} \cdot 0{,}5\,\text{kg} = 210\,\text{kJ}$, czyli dokładnie dwa razy więcej niż 105 kJ. Zatem potrzebuje 2 kg drewna.

Zadanie 22. Lena kupiła paczkę słodyczy składającą się z cukierków jabłkowych i bananowych. Cukierków jabłkowych było w niej dwa razy więcej niż bananowych. Lena zjadła natychmiast 17 cukierków jabłkowych i 17 cukierków bananowych. Następnie zorientowała się, że pozostało jej trzy razy więcej cukierków jabłkowych niż bananowych. Ile cukierków jabłkowych znajdowało się na początku w paczce?

Wynik. 68

Rozwiązanie. Niech A oznacza początkową liczbę cukierków jabłkowych, a B początkową liczbę cukierków bananowych. Wiemy, że $A = 2 \cdot B$. Po tym, gdy Lena zjadła 17 cukierków jabłkowych i 17 cukierków bananowych, zostało jej trzy razy więcej cukierków jabłkowych niż bananowych, więc $A - 17 = 3 \cdot (B - 17)$. Zastępując A przez $2 \cdot B$ (z pierwszego równania) dostajemy:

$$\begin{aligned} 2 \cdot B - 17 &= 3 \cdot (B - 17) \\ 2 \cdot B - 17 &= 3 \cdot B - 51 \\ B &= 34 \end{aligned}$$

Stąd na początku w paczce znajdowały się 34 cukierki bananowe i 68 cukierków jabłkowych.

Zadanie 23. Ktoś ukradł tabliczkę z napisem Naboj! Mamy czterech podejrzanych: Marka, Mateusza, Jacka i Marcela. Podczas przesłuchania podejrzani powiedzieli Szeryfowi:

- Marek: *Nie mam tabliczki. Mateusz ma tabliczkę.*
- Mateusz: *Marcel ma tabliczkę. Jeżeli Marcel ma tabliczkę, to Marek nie ma tabliczki.*
- Jacek: *Dokładnie jedno z moich zdań jest prawdziwe. Marcel powie dwa zdania prawdziwe albo dwa zdania fałszywe.*
- Marcel: *Każdy z podejrzanych powiedział co najmniej jedno fałszywe zdanie. Ja nie mam tabliczki.*

Ile prawdziwych zdań usłyszał Szeryf? Znajdź iloczyn wszystkich możliwych odpowiedzi.

Wynik. 20

Rozwiązanie. Rozważmy najpierw pierwsze zdanie Jacka. Gdyby było prawdziwe, to jego drugie zdanie musiałoby być fałszywe. Jeśli zaś byłoby fałszywe, to drugie zdanie, znowu musiałoby być fałszywe (w przeciwnym przypadku pierwsze zdanie byłoby prawdziwe). A zatem na pewno drugie zdanie Jacka jest fałszywe. Nie możemy natomiast powiedzieć nic o prawdziwości jego pierwszego zdania.
Drugie zdanie Jacka jest fałszywe. Zatem Marcel musiał powiedzieć jedno zdanie prawdziwe i jedno fałszywe. Rozpatrzmy dwa przypadki.
Gdyby pierwsze zdanie Marcela było prawdziwe, to jego drugie zdanie musiałoby być fałszywe, co oznaczałoby, że to on jest złodziejem. Jednakże wtedy oba zdania Mateusza byłyby prawdziwe, co byłoby sprzeczne, z założeniem o tym, że pierwsze zdanie Marcela jest prawdziwe.
Stąd prawdziwe musi być drugie zdanie Marcela: Marcel nie jest więc złodziejem, a jego pierwsze zdanie musi być fałszywe. Musi zatem istnieć osoba, która powiedziała dwa prawdziwe zdania. Może być to tylko Marek lub Mateusz. Jednakże Marcel nie ma tabliczki, więc Mateusz nie mógł powiedzieć dwóch prawdziwych zdań. Stąd dwa zdania prawdziwe musiał powiedzieć Marek, co oznacza, że złodziejem jest Mateusz.
Policzmy ile prawdziwych zdań mogli wypowiedzieć podejrzani. Oba zdania Marka są prawdziwe, drugie zdanie Mateusza jest prawdziwe i drugie zdanie Marcela jest prawdziwe. Pierwsze zdanie Jacka może być prawdziwe lub fałszywe. Pozostałe zdania są na pewno fałszywe. Szeryf usłyszał zatem 4 lub 5 prawdziwych zdań. Stąd iloczyn możliwych odpowiedzi wynosi $4 \cdot 5 = 20$.

Zadanie 24. Marysia kupiła sobie 8 książek, każdą w kształcie prostopadłościanu o bokach $5\,\mathrm{cm}$, $15\,\mathrm{cm}$ i $20\,\mathrm{cm}$. Gęstość każdej z książek wynosiła $1200\,\mathrm{kg/m^3}$. Książki zapakowała do wysokiego pudełka z pokrywką, układając je jedną na drugiej tak, aby stykały się bokami o największej powierzchni. Marysia przyniosła pudełko do swojego domu i położyła je na ziemi. Otworzyła wieko i teraz chciałaby umieścić książki na półce, która znajduje się $1{,}6\,\mathrm{m}$ nad ziemią, tak aby wszystkie książki dotykały półki jednym z boków o najmniejszej powierzchni. Jaką pracę (ile dżuli) musi wykonać Marysia, aby to osiągnąć?

Wynik. $216\,\mathrm{J}$

Rozwiązanie. Rozwiązanie: Książki leżące na podłodze tworzą prostopadłościan o wysokości $8 \cdot 5\,\mathrm{cm} = 40\,\mathrm{cm}$, a więc ich środek masy znajduje się na wysokości $20\,\mathrm{cm} = 0{,}2\,\mathrm{m}$ nad ziemią. Gdyby te książki położyć na półce, to utworzyłyby prostopadłościan o wysokości $20\,\mathrm{cm}$ i środku masy na wysokości $10\,\mathrm{cm} = 0{,}1\,\mathrm{m}$ powyżej półki. Ponieważ półka znajduje się $1{,}6\,\mathrm{m}$ nad ziemią, to różnica wysokości środka masy książek przed i po podniesieniu na półkę wynosi $1{,}6\,\mathrm{m} - 0{,}2\,\mathrm{m} + 0{,}1\,\mathrm{m} = 1{,}5\,\mathrm{m}$. Objętość książek wynosi $15\,\mathrm{cm} \cdot 20\,\mathrm{cm} \cdot 40\,\mathrm{cm} = 12\,000\,\mathrm{cm^3} = 12\,\mathrm{dm^3}$, a ich gęstość $1200\,\mathrm{kg/m^3} = 1{,}2\,\mathrm{kg/dm^3}$, zatem ich masa wynosi $12\,\mathrm{dm^3} \cdot 1{,}2\,\mathrm{kg/dm^3} = 14{,}4\,\mathrm{kg}$. Różnica energii potencjalnej pomiędzy położeniem książek na ziemi i na półce jest równa $14{,}4\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} \cdot 1{,}5\,\mathrm{m} = 216\,\mathrm{J}$. Oznacza to, że Marysia musi wykonać pracę o wartości $216\,\mathrm{J}$.

Zadanie 25. Jurek nosi w plecaku trójkąt ABC o bokach całkowitej długości (w centymetrach). Wiadomo, że bok AB jest nie krótszy niż 21 cm i nie dłuższy niż 28 cm. Długość boku AC wynosi przynajmniej 11 cm i najwyżej 18 cm. Bok BC jest nie dłuższy niż 8 cm i nie krótszy niż 1 cm. Jaki jest największy możliwy obwód trójkąta ABC (w centymetrach)?

Wynik. 51 cm

Rozwiązanie. Wiadomo, że trzy odcinki mogą tworzyć trójkąt wtedy i tylko wtedy, gdy suma długości każdych dwóch z nich jest większa niż długość trzeciego. Zauważmy, że długości odcinków BC i AC wynoszą najwyżej 8 cm i 18 cm odpowiednio. Stąd trzeci odcinek musi być krótszy niż $8\,\text{cm} + 18\,\text{cm} = 26\,\text{cm}$, czyli może mieć długość najwyżej 25 cm. Trójkąt o bokach długości 8 cm, 18 cm i 25 cm spełnia nierówność trójkąta, więc istnieje. Ponadto dwa krótsze boki mają maksymalną dozwoloną długość, a trzeci odcinek musi być krótszy od ich sumy, więc obwód długości $8\,\text{cm} + 18\,\text{cm} + 25\,\text{cm} = 51\,\text{cm}$ jest największym możliwym.

Zadanie 26. Sabina kupiła nowy samochód. Samochód ten ma ciekawą cechę: zawsze zamienia energię paliwa na energię kinetyczną samochodu z taką samą sprawnością, niezależnie od tego w jaki sposób samochód przyspiesza. Sabina przyspieszyła w mieście ze spoczynku do prędkości 40 km/h, zużywając przy tym 700 kJ energii. Następnie pojechała na autostradę, gdzie rozpędziła się do prędkości 120 km/h. Ile energii (w kilodżulach) zużyła, aby rozpędzić się na autostradzie?

Wynik. 5600 kJ

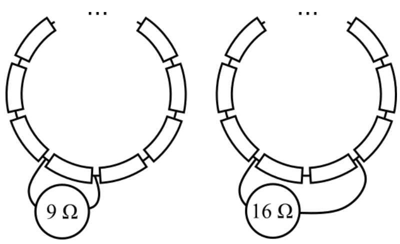
Rozwiązanie. Energia kinetyczna rośnie proporcjonalnie do drugiej potęgi prędkości. Stąd, aby uzyskać 3 razy większą prędkość, trzeba zużyć $3 \cdot 3 = 9$ razy więcej energii. Tak więc, aby przyspieszyć od zera do 120 km/h Sabina musi zużyć $9 \cdot 700\,\text{kJ} = 6300\,\text{kJ}$ energii. Zatem, aby przyspieszyć z 40 km/h do 120 km/h, Sabina zużyła $6300\,\text{kJ} - 700\,\text{kJ} = 5600\,\text{kJ}$ energii.

Zadanie 27. Radek napisał na pierwszej kartce papieru wszystkie dodatnie liczby całkowite od 1 do 100. Na drugiej kartce wypisał dodatnie różnice wszystkich par liczb znajdujących się na pierwszej kartce. Jaka liczba pojawia się na drugiej kartce najczęściej?

Wynik. 1

Rozwiązanie. Przeanalizujmy wszystkie pary liczb z pierwszej kartki. Zacznijmy od par zawierających liczbę 1. Różnice między liczbami tworzącymi takie pary to wszystkie liczby całkowite od 1 do 99. Następnie popatrzmy na pary liczb zawierające liczbę 2, ale nie zawierające liczby 1 (równoważnie: pary, w których 2 jest mniejszą liczbą). Różnice między liczbami tworzącymi takie pary to wszystkie liczby całkowite od 1 do 98. Kontynuujemy to rozumowanie dochodząc do par, w których mniejszą liczbą jest 99 - taka para jest tylko jedna i różnica wchodzących w jej skład liczb wynosi 1. Zauważmy, że tylko liczba 1 pojawiła się we wszystkich przypadkach, zatem na drugiej kartce występuje ona najczęściej.

Zadanie 28. Nina zrobiła naszyjnik z takich samych oporników, łącząc je w okrąg. Podłączyła multimetr w taki sposób, że pomiędzy jego zaciskami znajdował się tylko jeden opornik. Multimetr zmierzył opór $9\,\Omega$. Gdy podłączyła multimetr w taki sposób, że między zaciskami multimetru znajdowały się dwa oporniki, multimetr zmierzył opór $16\,\Omega$. Z ilu oporników zbudowany jest naszyjnik Niny?



Wynik. 10

Rozwiązanie. Załóżmy, że oporniki są jednakowe, a każdy z nich ma opór R. Gdy podłączymy multimetr do opornika, zmierzymy opór w obwodzie z równolegle połączonymi opornikami. W jednej gałęzi mamy 1 opornik, a w drugiej gałęzi n-1 oporników. Analogicznie, jeśli podłączymy multimetr do dwóch oporników, to w jednej gałęzi mamy 2 oporniki, a w drugiej n-2 oporniki. W ten sposób otrzymujemy układ równań:

$$\frac{1}{9\,\Omega} = \frac{1}{R} + \frac{1}{(n-1)R}$$
$$\frac{1}{16\,\Omega} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{(n-2)R}$$

Po przemnożeniu równań przez mianowniki otrzymujemy układ:

$$(n-1)R = (n-1)(9\,\Omega) + 9\,\Omega$$
$$(n-2)R = (n-2)(8\,\Omega) + 16\,\Omega$$

Po rozwinięciu nawiasów otrzymujemy:

$$nR - R = 9n\Omega$$
$$nR - 2R = 8n\Omega$$

Teraz od pierwszego równania odejmujemy drugie równanie:

$$R = n\Omega$$

Więc wartość liczbowa oporu opornika w omach jest równa liczbie oporników. Podzielmy całe równanie przez omy i wpiszmy tę informację do równania $nR - R = 9n\Omega$:

$$n^2 - n = 9n$$
$$n^2 - 10n = 0$$
$$n(n-10) = 0$$

Więc jest albo $n = 0$ albo $n = 10$ oporników. Przypadek $n = 0$ jest jednak niefizyczny, więc musiało być $n = 10$ rezystorów.

Zadanie 29. Luiza narysowała ośmiokąt foremny $ABCDEFGH$. Chce teraz narysować 4 odcinki w ten sposób, żeby żadne dwa z nich się nie przecinały (w szczególności żeby nie miały wspólnych końców) i żeby ich końce leżały w wierzchołkach ośmiokąta. Na ile sposobów może to uczynić?

Wynik. 14

Rozwiązanie. Zauważmy, że każdy wierzchołek ośmiokąta musi zostać połączony odcinkiem z jednym z pozostałych wierzchołków. Rozważmy kilka przypadków, w zależności od tego z jakim punktem będzie połączony wierzchołek A. Jeśli A będzie połączony z C, E lub G, to ten odcinek podzieli pozostałe wierzchołki ośmiokąta na dwie grupy zawierające nieparzystą liczbę wierzchołków. Wierzchołki każdej z takich grup nie mogą być podzielone na pary, więc nie można będzie narysować odcinków spełniających warunki zadania. Jeśli A będzie połączony z B, to pozostałe wierzchołki będziemy mogli połączyć na 5 sposobów:

$$(CD)(EF)(GH)$$
$$(CD)(EH)(FG)$$
$$(CF)(DE)(GH)$$
$$(CH)(DE)(FG)$$
$$(CH)(DG)(EF)$$

Jeśli połączymy A z wierzchołkiem H, to dostaniemy 5 podobnych możliwości. Jeśli połączymy A z wierzchołkiem D, to będziemy musieli połączyć wierzchołki B i C. Dla pozostałych 4 wierzchołków będziemy mieli 2 możliwości:

$$(EF)(GH)$$
$$(EH)(FG)$$

Podobnie dostaniemy 2 możliwości, jeśli połączymy wierzchołki A i F. Rozważyliśmy wszystkie możliwe wierzchołki, z którymi A może być połączony. Istnieje zatem $5 + 5 + 2 + 2 = 14$ sposobów na jakie Luiza może narysować odcinki.

Zadanie 30. Archimedes wziął wagę cyfrową i położył na niej naczynie o objętości 1 l i masie 250 g. Następnie napełnił je wodą do połowy. Następnie włożył do naczynia z wodą kamyk na sznurku w taki sposób, że cały kamyk znalazł się pod wodą, ale nie dotykał ścianek naczynia. Waga pokazała masę 1 kg. W końcu położył na wadze tylko sam kamyk. Waga znów pokazała masę 1 kg. Jaka była gęstość tego kamyka (w kilogramach na metr sześcienny)?

Wynik. $4000\,\mathrm{kg/m^3}$

Rozwiązanie. Jeśli na wadze umieścimy naczynie o masie $m_{naczynia} = 250\,\mathrm{g}$ i wlejemy do niego wodę o objętości $V = 0{,}5\,\mathrm{l}$, to waga pokaże masę:

$$m_{całkowita} = m_{naczynia} + \rho_{wody} V$$

Po włożeniu kamyka na sznurku waga pokazała masę 1 kg. Co spowodowało wzrost masy? Na kamyk działają dwie siły - grawitacyjna i wyporu. Jest to siła wyporu, z jaką woda działa na kamyk. Z III zasady Dynamiki Newtona wynika, że kamyk musi działać na wodę siłą o tej samej wielkości, ale o przeciwnym zwrocie i jest to jedyna siła, która zmieni odczyt, jaki pokazuje waga. Wielkość siły F, na podstawie której waga pokazuje masę, musi być równa sumie wielkości siły grawitacji F_G i wielkości siły wyporu wody na kamyku F_W:

$$\begin{aligned} F &= F_G + F_W \\ m_{odczytane} g &= m_{całkowita} g + V_{kamyka} \rho_{wody} g \\ m_{odczytane} &= m_{naczynia} + \rho_{wody} V + V_{kamyka} \rho_{wody} \end{aligned}$$

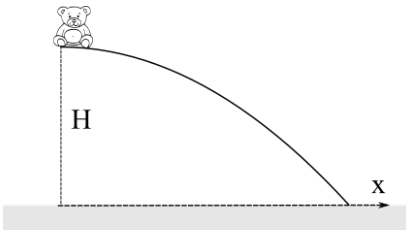
Wynika z tego, że objętość kamyka wynosi:

$$V_{kamyka} = \frac{m_{odczytane} - m_{naczynia} - \rho_{wody} V}{\rho_{wody}}$$

Z drugiego ważenia wiemy, że masa kamyka wynosi $m_{kamyka} = 1\,\mathrm{kg}$. Stąd gęstość kamyka musi wynosić:

$$\rho_{kamyka} = \frac{m_{kamyka}}{V_{kamyka}} = \frac{m_{kamyka} \rho_{wody}}{m_{odczytane} - m_{naczynia} - \rho_{wody} V} = \frac{1\,\mathrm{kg} \cdot 1000\,\mathrm{kg/m^3}}{1\,\mathrm{kg} - 0{,}25\,\mathrm{kg} - 1000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 0{,}0005\,\mathrm{m^3}} = 4000\,\mathrm{kg/m^3}$$

Zadanie 31. Aleks umieścił misia na szczycie pochylni, której kształt przypominał krzywą $h(x) = H - ax^2$, taką, że $a = 0{,}2/\mathrm{m}$. Zapomniał jednak, że pochylnia jest gładka (w takim stopniu, że tarcie jest pomijalne), więc zabawka zaczęła się bardzo szybko zsuwać. Jaka będzie prędkość misia (w metrach na sekundę), gdy znajdzie się on w odległości w kierunku poziomym $x = 3\,\mathrm{m}$ od Aleksa?



Wynik. 6 m/s

Rozwiązanie. W miarę jak miś zsuwa się w dół, całkowita energia mechaniczna jest zachowana. Spadek energii potencjalnej Kubusia musi być więc równy jego energii kinetycznej. Spadek wysokości wynosi $\Delta h = ax^2$. Stąd musi wynikać:

$$\begin{aligned} \Delta E_p &= E_k \\ mg\Delta h &= \frac{1}{2} m v^2 \\ g\Delta h &= \frac{1}{2} v^2 \\ 2g\Delta h &= v^2 \\ v &= \sqrt{2g\Delta h} \\ v &= \sqrt{2gax^2} \\ v &= x\sqrt{2ga} \end{aligned}$$

Gdy podstawimy wartości z treści zadania, okaże się, że miś będzie miał prędkość:

$$v = 3\,\mathrm{m} \cdot \sqrt{2 \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} \cdot 0{,}2/\mathrm{m}} = 6\,\mathrm{m/s}$$

Zadanie 32. Łukasz ma biały sześcian. Postanowił pomalować każdą jego ścianę na niebiesko lub pomarańczowo w ten sposób, żeby żadne dwie przeciwległe ściany nie były tego samego koloru. Następnie rozciął sześcian na 125 identycznych mniejszych sześcianów. Ile spośród tych sześcianów ma dokładnie jedną ścianę niebieską i dokładnie jedną ścianę pomarańczową?

Wynik. 18

Rozwiązanie. Trzy ściany pierwotnego sześcianu zostały pomalowane na niebiesko, a trzy na pomarańczowo. Ponadto, by przeciwległe ściany były różnej barwy, każde trzy ściany tego samego koloru musiały mieć jeden wspólny wierzchołek. Zastanówmy się, które z małych sześcianów mogą mieć jedną ścianę niebieską, a jedną pomarańczową. Takie sześciany muszą mieć wspólną krawędź z wyjściowym sześcianem i musi być to krawędź wspólna dla dwóch ścian - jednej niebieskiej i jednej pomarańczowej. Wzdłuż każdej krawędzi wyjściowego sześcianu znajdowało się 5 takich małych sześcianów. 2 z nich miały wspólny wierzchołek z wyjściowym sześcianem, mają więc pomalowaną także trzecią ścianę. Zatem wzdłuż każdej krawędzi pierwotnego sześcianu, która należała do jednej ściany niebieskiej i jednej pomarańczowej było $5 - 2 = 3$ mniejszych sześcianów o dokładnie jednej ścianie niebieskiej i dokładnie jednej ścianie pomarańczowej. W wyjściowym sześcianie istniało 6 takich krawędzi. Stąd istnieje $6 \cdot 3 = 18$ szukanych sześcianów.

Zadanie 33. Ewa napisała program komputerowy, który po wprowadzeniu dodatniej liczby całkowitej mnoży ją przez siebie 2 021 razy i zwraca liczbę cyfr otrzymanego iloczynu. Po wprowadzeniu liczby 2 Ewa otrzymała liczbę 609, po wprowadzeniu liczby 3 otrzymała 965, zaś po wprowadzeniu liczby 4 otrzymała 1 217. Jaką liczbę zwróci program, gdy Ewa wprowadzi liczbę 5?

Wynik. 1 413

Rozwiązanie. Liczbę będącą iloczynem b kopii liczby a, oznaczamy przez $a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{b\text{-razy}}$

Zauważmy, że jeśli pomnożymy przez siebie 2 021 dwójek ($2^{2\,021}$) i 2 021 piątek ($5^{2\,021}$), to dostaniemy ten sam wynik, co gdybyśmy pomnożyli przez siebie 2 021 dziesiątek ($10^{2\,021}$). Wiemy jak taka liczba wygląda - jest to 1 i 2 021 zer, to znaczy $1\underbrace{00\ldots0}_{2\,021\text{-razy}}$.

Z treści zadania wiemy, że $2^{2\,021}$ ma 609 cyfr. Jest zatem liczbą większą niż $1\overbrace{00\ldots0}^{608\text{-razy}}$ (te dwie liczby są różne, bo liczba $2^{2\,021}$ nie jest wielokrotnością liczby 5, więc nie może kończyć się zerem). Ponadto liczba $2^{2\,021}$ jest mniejsza niż $1\underbrace{00\ldots0}_{609\text{-razy}}$. Mamy zatem:

$$1\underbrace{00\ldots0}_{608\text{-razy}} < 2^{2\,021} < 1\underbrace{00\ldots0}_{609\text{-razy}}$$

Oznaczmy przez n liczbę cyfr liczby $5^{2\,021}$. Podobnie jak poprzednio, widzimy, że liczba $5^{2\,021}$ jest większa niż $1\overbrace{00\ldots0}^{(n-1)\text{-razy}}$ (te liczby są różne, bo liczba $5^{2\,021}$ nie jest wielokrotnością liczby 2, więc nie może kończyć się zerem). Ponadto liczba $5^{2\,021}$ jest mniejsza niż $1\underbrace{00\ldots0}_{n\text{-razy}}$. Stąd mamy:

$$1\underbrace{00\ldots0}_{(n-1)\text{-razy}} < 5^{2\,021} < 1\underbrace{00\ldots0}_{n\text{-razy}}$$

Połączmy powyższe informacje. Rozważmy iloczyn liczb $2^{2\,021}$ i $5^{2\,021}$. Gdy zastąpimy je przez mniejsze liczby dodatnie, to otrzymamy mniejszy iloczyn, a zatem:

$$1\underbrace{00\ldots0}_{608\text{-razy}} \cdot 1\underbrace{00\ldots0}_{(n-1)\text{-razy}} < 2^{2\,021} \cdot 5^{2\,021}$$

Podobnie:

$$2^{2\,021} \cdot 5^{2\,021} < 1\underbrace{00\ldots0}_{609\text{-razy}} \cdot 1\underbrace{00\ldots0}_{n\text{-razy}}$$

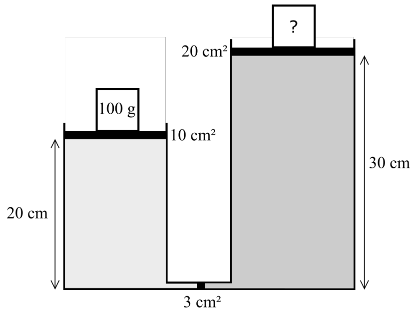
Przypomnijmy, że przy mnożeniu liczb zakończonych zerami liczba zer się sumuje, zatem:

$$1\underbrace{00\ldots0}_{(n+607)\text{-razy}} < 2^{2\,021} \cdot 5^{2\,021} < 1\underbrace{00\ldots0}_{(n+609)\text{-razy}}$$

Ograniczyliśmy w ten sposób liczbę $2^{2\,021} \cdot 5^{2\,021}$ przez liczby $1\overbrace{00\ldots0}^{(n+607)\text{-razy}}$, $1\overbrace{00\ldots0}^{(n+609)\text{-razy}}$. Jedyną liczbą pomiędzy nimi, która składa się z jednej 1 i samych zer, jest liczba z $n + 608$ zerami. Wiemy jednak, że liczba $2^{2\,021} \cdot 5^{2\,021}$ ma właśnie taką postać, a zatem musi być tą liczbą. Ponieważ wiemy, że $2^{2\,021} \cdot 5^{2\,021} = 1\underbrace{00\ldots0}_{2021\text{-razy}}$, to musi zachodzić $n + 608 = 2\,021$.

Stąd szukana liczba cyfr liczby $5^{2\,021}$ wynosi $n = 2\,021 - 608 = 1\,413$.

Zadanie 34. Maciek dostał urządzenie hydrauliczne, które widać na rysunku. Składa się ono z dwóch części. Jedna z nich jest wypełniona wodą, a druga olejem. Te dwie części połączone są ruchomym tłokiem o polu powierzchni $3\,\mathrm{cm}^2$. Część wypełniona wodą ma jeszcze jeden tłok o polu powierzchni $10\,\mathrm{cm}^2$, znajdujący się na wysokości 20 cm. W części wypełnionej olejem też jest tłok, ale ma on pole powierzchni $20\,\mathrm{cm}^2$ i znajduje się na wysokości 30 cm. Maciek umieścił na tłoku w części z wodą odważnik o masie 100 g. Jaka musi być masa ciężarka (w gramach), który Maciek musi położyć na tłoku w części z olejem, aby układ pozostał w spoczynku?



Wynik. 60 g

Rozwiązanie. Jeśli tłoki nie poruszają się, to na tłoki musi działać taka sama siła z obu stron, a więc suma sił wynosi 0. Skoro tłok ma taką samą powierzchnię po obu stronach, to musi na niego działać takie samo ciśnienie. Ciśnienie działające na mały tłok z kierunku tłoka z wodą, ma dwie składowe - ciśnienie hydrostatyczne i ciśnienie wywołane siłą zewnętrzną (ciężar obiektu na tłoku). Ciśnienie hydrostatyczne słupa wody o wysokości $h_1 = 20\,\mathrm{cm}$ wynosi:

$$p_{h1} = h_1 \rho_{wody} g$$

Ciśnienie wywołane przez przedmiot o masie $m_1 = 100\,\mathrm{g}$ nałożony na tłok o powierzchni $S_1 = 10\,\mathrm{cm}^2$ wynosi:

$$p_{t1} = \frac{m_1 g}{S_1}$$

Podobnie, ciśnienie hydrostatyczne słupa oleju o wysokości $h_2 = 30\,\mathrm{cm}$ i ciśnienie wywołane przez obiekt o nieznanej masie m_2 nałożony na tłok o powierzchni $S_2 = 20\,\mathrm{cm}^2$ wynoszą:

$$p_{h2} = h_2 \rho_{oleju} g$$
$$p_{t2} = \frac{m_2 g}{S_2}$$

Jak powiedzieliśmy $p_{h1} + p_{t1} = p_{h2} + p_{t2}$. Możemy więc powiedzieć, że:

$$h_1 \rho_{wody} g + \frac{m_1 g}{S_1} = h_2 \rho_{oleju} g + \frac{m_2 g}{S_2}$$
$$h_1 \rho_{wody} + \frac{m_1}{S_1} = h_2 \rho_{oleju} + \frac{m_2}{S_2}$$

Stąd możemy wyrazić m_2:

$$m_2 = S_2 \left(h_1 \rho_{wody} - h_2 \rho_{oleju} + \frac{m_1}{S_1} \right) = 20\,\mathrm{cm}^2 \cdot \left(20\,\mathrm{cm} \cdot 1\,\mathrm{g/cm}^3 - 30\,\mathrm{cm} \cdot 0{,}9\,\mathrm{g/cm}^3 + \frac{100\,\mathrm{g}}{10\,\mathrm{cm}^2} \right) = 60\,\mathrm{g}$$

Maciek musi zatem umieścić przedmiot o masie 60 g na drugim tłoku.

Zadanie 35. Dziesięć osób wybrało się na dwuaktowy spektakl do teatru. Podczas pierwszego aktu cała dziesiątka siedziała w pierwszym rzędzie. W trakcie przerwy grupa pozamieniała się miejscami. Wszyscy pozostali w tym samym rzędzie, ale tylko dwie osoby siedziały na swoich poprzednich miejscach. Ponadto każda z ośmiu pozostałych osób siedziała na miejscu, które zajmował wcześniej jej sąsiad z pierwszego aktu. Na ile różnych sposobów grupa mogła zamienić się miejscami?

Wynik. 15

Rozwiązanie. Wybieramy najpierw dwie osoby, które nie zmieniły miejsca. Dzielą one pozostałą część grupy na trzy podgrupy - na lewo od obu osób które nie zmieniły miejsca, pomiędzy nimi i na prawo od nich (podgrupa może być pusta). Zauważmy, że członek każdej podgrupy musi siedzieć na miejscu, które należało przed przerwą do innego członka tej samej podgrupy.
Popatrzmy na kraniec niepustej podgrupy - miejsce obok osoby, która nie zmieniła siedzenia lub miejsce na skraju rzędu. Dla tego miejsca istnieje tylko jedno miejsce sąsiadujące w danej podgrupie, więc osoba siedząca na krańcowym miejscu

po przerwie musiała siedzieć przed przerwą właśnie na nim. Podobnie osoba siedząca przed przerwą na krańcowym miejscu może siedzieć po przerwie tylko na tym jedynym miejscu sąsiednim w danej podgrupie. To oznacza, że te dwie osoby musiały zamienić się miejscami. Kontynuując rozumowanie widzimy, że wewnątrz każdej podgrupy możemy dobrać w pary osoby, które zamieniły się w trakcie przerwy miejscami. W szczególności każda podgrupa musi liczyć parzystą liczbę członków.
„Połączmy“ każde dwie osoby, które zamieniły się miejscami w jedną nową osobę. Stworzyliśmy zatem 4 nowe „podwójne osoby“ - razem z dwa osobami, które nie zmieniły miejsca mamy więc 6 osób i odpowiadające im 6 miejsc (4 miejsca są podwójne). Zauważmy, że każdej zamianie miejsc odpowiada wybór dwóch z tych 6 miejsc - wybór miejsc zajmowanych przez osoby, które nie przesiadły się w czasie przerwy. Pierwsze takie miejsce można wybrać na 6 sposobów, a drugie na 5 sposobów. Zauważmy jednak, że każdą opcję policzyliśmy dwa razy - zamiana kolejności wyboru tych dwóch miejsc daje nam ten sam przypadek. To oznacza, że grupa mogła zamienić się miejscami na 15 sposobów.

Zadanie 36. Janek ma dwie sprężyny: jedną o stałej sprężystości $3\,\mathrm{N/cm}$, drugą o stałej sprężystości $6\,\mathrm{N/cm}$. Połączył je w jedną długą sprężynę. Ile w N/cm wynosi stała sprężystości sprężyny skonstruowanej przez Janka?

Wynik. 2

Rozwiązanie. Gdy rozciągamy połączone sprężyny z siłą F, to obie sprężyny są rozciągane z tą siłą. Sprężyna o stałej sprężystości $k_1 = 3\,\mathrm{N/cm}$ wydłuża się o $\frac{F}{k_1}$. Analogicznie, sprężyna o stałej sprężystości $k_2 = 6\,\mathrm{N/cm}$ wydłuża się o $\frac{F}{k_2}$. Jeśli oznaczymy nieznaną stałą sprężystości połączonych sprężyn przez k, to połączone sprężyny wydłużą się o $\frac{F}{k}$, co musi być sumą wydłużeń sprężyn. Stąd wynika, że:

$$\frac{F}{k} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}$$
$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$
$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

Więc połączone sprężyny mają stałą sprężystości:

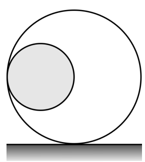
$$k = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2} = \frac{3\,\mathrm{N/cm} \cdot 6\,\mathrm{N/cm}}{3\,\mathrm{N/cm} + 6\,\mathrm{N/cm}} = 2\,\mathrm{N/cm}$$

Zadanie 37. Janusz dostał na Święta grę planszową. Rozgrywka toczy się na planszy złożonej z 2 020 pól ułożonych wzdłuż okręgu. Janusz kładzie żeton na dowolnym polu. Gra toczy się w następujący sposób: w pierwszym ruchu Janusz przesuwa żeton o 2 pola w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara. W drugim ruchu przesuwa żeton o 4 pola zgodnie z ruchem wskazówek zegara, w trzecim ruchu przesuwa żeton o 6 pól zgodnie z ruchem wskazówek zegara i tak dalej: w każdym ruchu przesuwa żeton o 2 pola dalej niż w poprzednim posunięciu, w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara. Jaka jest najmniejsza liczba ruchów, które Janusz musi wykonać, by żeton znalazł się z powrotem na polu, na którym został położony na początku?

Wynik. 100

Rozwiązanie. Po wykonaniu n ruchów żeton jest przesunięty o $2+4+6+\cdots+2n$ pól. Po wyciągnięciu liczby 2 przed nawias i zastosowaniu wzoru na sumę pierwszych n dodatnich liczb całkowitych, dostajemy $2+4+6+\cdots+2n = 2\cdot(1+2+3+\cdots+n) = 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$. By żeton po przesunięciu o $n(n+1)$ pól znalazł się na polu wyjściowym, liczba $n(n+1)$ musi być podzielna przez 2 020. Rozkład liczby 2 020 na czynniki pierwsze ma postać $2\,020 = 2\cdot2\cdot5\cdot101$. W szczególności, liczba $n(n+1)$ musi być zatem podzielna przez 101. Najmniejsze n, dla którego tak się dzieje wynosi $n = 100$: wtedy $n+1 = 101$. W tym przypadku $n = 100$ jest także podzielne przez $2\cdot2\cdot5 = 20$. Zatem dla $n = 100$ liczba $n(n+1)$ jest podzielna przez 2 020. Pokazaliśmy zatem, że po 100 ruchach żeton powróci na wyjściowe pole i że nie stanie się to wcześniej. Stąd Janusz musi wykonać przynajmniej 100 ruchów.

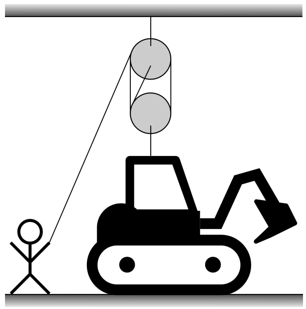
Zadanie 38. Mag Mateusz w magiczny sposób umieścił kulę o promieniu 20 cm i masie 0,5 kg w większej kuli o promieniu 40 cm i masie 0,5 kg jak na rysunku. Następnie rozwiał zaklęcie utrzymujące mniejszą kulę w miejscu i mniejsza kula zaczęła się poruszać. Chwilę później mniejsza kula zatrzymała się na dnie większej kuli. Jak daleko w centymetrach przesunęła się większa kula od swojego pierwotnego punktu styku z powierzchnią?



Wynik. 10

Rozwiązanie. Jedyną siłą zewnętrzną działającą na każdą kulę jest siła ciężkości oraz siła normalna od powierzchni, wszystkie działające w kierunku pionowym. W związku z tym środek masy układu nie może poruszać się w kierunku poziomym. Gdy układ przestanie się poruszać, środek masy układu musi znajdować się powyżej początkowego punktu styku większej kuli z powierzchnią. Musimy tylko dowiedzieć się, jak daleko w kierunku poziomym od pierwotnego punktu styku znajduje się środek masy układu przed rozpoczęciem ruchu. Środek masy większej kuli znajduje się nad punktem styku z powierzchnią w odległości 0 cm w kierunku poziomym. Środek masy mniejszej kuli znajduje się natomiast w odległości 20 cm w kierunku poziomym. Ponieważ kule mają jednakową masę, środek masy układu znajduje się w punkcie środkowym odcinka łączącego środki mas kul. Oznacza to, że pierwotny środek masy układu znajduje się w odległości 10 cm w kierunku poziomym od pierwotnego punktu styku z powierzchnią. Większa kula przesuwa się więc o 10 cm od pierwotnego punktu styczności z powierzchnią.

Zadanie 39. Bob Budowniczy chce ułatwić sobie pracę na budowie. Betoniarka poradziła mu, aby zbudował system kół pasowych, jak na rysunku. Lina ma zostać wielokrotnie owinięta wokół kół pasowych, tak, że nie będzie się ślizgała. Bob może ciągnąć linę z maksymalną siłą 800 N i musi podnieść Koparkę, która waży 3500 kg. Jaką minimalną liczbę razy lina powinna przejść pod ruchomym kołem pasowym, by Bob zdołał podnieść Koparkę?



Wynik. 22

Rozwiązanie. Bob ciągnie linę z siłą $F = 800\,\mathrm{N}$. Napięcie w linie jest więc równe sile F w każdym jej punkcie. Jest to również prawdą w dolnym kole pasowym, po obu stronach liny wokół dolnego koła pasowego, dlatego na linę działa siła $2F$, przesuwając ją do góry. Jest to oczywiście prawdą za każdym razem, gdy lina okrąża dolne koło pasowe. Jeśli lina zapętli się wokół krążka kilka razy, siła działająca na dolny krążek wynosi $2nF$. Aby podnieść koparkę o masie $m = 3500\,\mathrm{kg}$, siła ta musi być większa niż siła grawitacji działająca na koparkę. Dlatego:

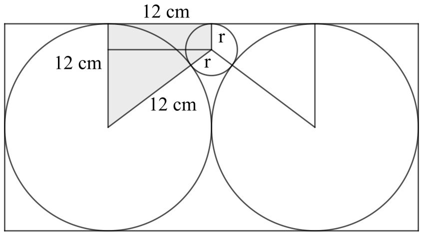
$$2nF \geq mg$$
$$n \geq \frac{mg}{2F} = \frac{3500\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2}}{2 \cdot 800\,\mathrm{N}} = 21.875$$

I widzimy, że lina musi okrążyć dolny krążek co najmniej 22 razy.

Zadanie 40. Laura chce zaprojektować nowy wzór flagi olimpijskiej. Narysowała prostokąt o bokach długości 24 cm i 48 cm. Następnie narysowała wewnątrz dwa styczne zewnętrznie okręgi o promieniu 12 cm. Wreszcie narysowała mniejszy okrąg styczny do obu okręgów i do dłuższego boku prostokąta. Ile wynosi promień tego mniejszego okręgu (w centymetrach)?

Wynik. 3 cm

Rozwiązanie. Oznaczmy przez r długość promienia mniejszego okręgu. Po narysowaniu obrazka, możemy wypisać długości niektórych odcinków:

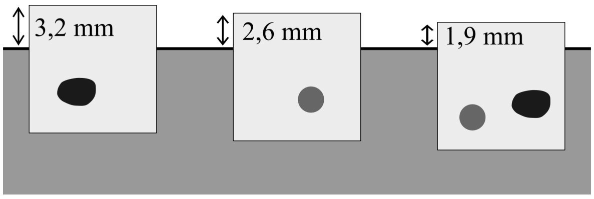


Popatrzmy na zamalowany trapez. Jego podstawy to promienie mniejszego i większego okręgu. Ramię prostopadłe do podstaw także ma długość promienia większego okręgu. Wreszcie drugie ramię trapezu ma długość równą sumie długości promieni większego i mniejszego okręgu. Podzielmy trapez na prostokąt i trójkąt prostokątny. W trójkącie prostokątnym długości boków wynoszą 12 cm, 12 cm − r, 12 cm + r. Z twierdzenia Pitagorasa:

$$
\begin{aligned}
(12\,\mathrm{cm})^2 + (12\,\mathrm{cm} - r)^2 &= (12\,\mathrm{cm} + r)^2 \\
144\,\mathrm{cm}^2 + 144\,\mathrm{cm}^2 - r \cdot (24\,\mathrm{cm}) + r^2 &= 144\,\mathrm{cm}^2 + r \cdot (24\,\mathrm{cm}) + r^2 \\
144\,\mathrm{cm}^2 &= 2 \cdot r \cdot (24\,\mathrm{cm}) \\
r &= 3\,\mathrm{cm}
\end{aligned}
$$

Stąd promień mniejszego okręgu ma długość $r = 3\,\mathrm{cm}$.

Zadanie 41. Łucja bawi się lodem. Bierze mały kamyk i zamraża go w sześciennej kostce lodu. Następnie bierze miskę z wodą i kładzie kostkę na powierzchni wody. Część kostki znajdująca się nad wodą ma wysokość 3,2 mm. Następnie Łucja bierze mały marmur i zamraża go w kostce lodu o takiej samej długości boku jak poprzednia. Gdy włożyła tę kostkę do wody, okazało się, że jej część nad wodą ma wysokość tylko 2,6 mm. Jednak Łucja nadal nie jest zadowolona. Dlatego roztapia obie kostki i zamraża kamyk i marmur w trzeciej kostce o tej samej długości boku co poprzednie dwie. Po włożeniu tego sześcianu do wody okazało się, że część nad wodą ma wysokość 1,9 mm. Jaka była długość boku wszystkich trzech sześcianów w milimetrach?



Wynik. 39*mm*

Rozwiązanie. Gdy Łucja zamraża kamyk lub marmur w sześcianie, sześcian nie zmienia objętości, ale zwiększa masę. Zmienia to średnią gęstość sześcianu. Jeśli sześcian nie tonie, to objętość podwodnej części sześcianu jest wprost proporcjonalna do jego średniej gęstości, a więc również wysokość podwodnej części musi być wprost proporcjonalna do średniej gęstości. Ponadto, dodanie kamyka (lub marmuru) zawsze zwiększa gęstość średnią o tę samą wartość. Stąd zawsze zwiększa to wysokość podwodnej części sześcianu o tę samą wartość, co oznacza również, że zawsze zmniejsza wysokość części nad powierzchnią wody o tę samą wartość. Gdy w sześcianie mieliśmy tylko kamyk, a dodaliśmy marmur, to wysokość części nad wodą zmniejszyła się o 3,2 mm − 1,9 mm = 1,3 mm. Zatem dodanie marmuru zawsze zmniejsza wysokość części nad wodą o 1,3 mm. Gdybyśmy wzięli sześcian z samym marmurem i zabrali marmur, to sześcian zawierający tylko lód miałby wysokość części nad wodą 2,6 mm + 1,3 mm = 3,9 mm. Dla sześcianu o boku długości a, objętości części podwodnej V' i wysokości części nad wodą $h = 3{,}9\,\mathrm{mm}$ otrzymujemy z zasady Archimedesa, że:

$$
\begin{aligned}
mg &= V'\rho_{wody}g \\
V\rho_{lodu} &= V'\rho_{wody} \\
Sa\rho_{lodu} &= S(a-h)\rho_{wody} \\
a\rho_{lodu} &= (a-h)\rho_{wody} \\
a(\rho_{wody} - \rho_{lodu}) &= h\rho_{wody} \\
a &= h\frac{\rho_{wody}}{\rho_{wody} - \rho_{lodu}} = 3{,}9\,\mathrm{mm}\frac{1000\,\mathrm{kg/m^3}}{1000\,\mathrm{kg/m^3} - 900\,\mathrm{kg/m^3}} = 39\,\mathrm{mm}
\end{aligned}
$$

Stąd sześcian Łucji miał bok długości 39 mm.

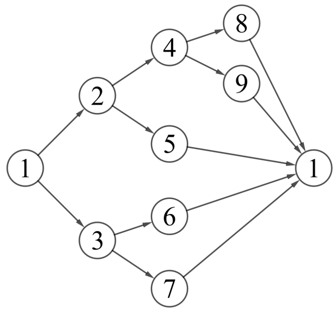
Zadanie 42. Marian zaczął tworzyć listę liczb: 1, 2, 4, 8, 16, 32 i tak dalej: każda kolejna liczba na liście jest dwukrotnością poprzedniej. Wypisał w ten sposób 555 liczb. Następnie stworzył drugą listę składającą się z pierwszych cyfr liczb z pierwszej listy. Druga lista zaczyna się zatem od liczb 1, 2, 4, 8, 1, 3 . . . , a kończy liczbami . . . 1, 3, 7, 1, 2, 5. Marian zauważył, że liczba 8 pojawia się na drugiej liście 30 razy i że ostatnia liczba na pierwszej liście ma 167 cyfr. Ile razy liczba 9 występuje na drugiej liście?

Wynik. 24

Rozwiązanie. Na pierwszy rzut oka wydaje się, że nie ma żadnej regularności w pojawianiu się kolejnych liczb na drugiej liście. Okazuje się, że jest jednak inaczej. Jeśli wypiszemy kilka liczb z drugiej listy, to zorientujemy się, że liczba 1 pojawia się wśród nich zaskakująco często. Ponadto po wystąpieniu jedynki liczby na drugiej liście rosną tak długo aż jedynka pojawi się ponownie.
Zastanówmy się jakie liczby mogą występować na drugiej liście po każdej ustalonej liczbie:

- Po liczbie 1 może występować tylko 2 lub 3.
- Po liczbie 2 może występować tylko 4 lub 5.
- Po liczbie 3 może występować tylko 6 lub 7.
- Po liczbie 4 może występować tylko 8 lub 9.
- Po liczbach 5, 6, 7, 8 i 9 może występować tylko 1 - zostaje wtedy zwiększona liczba cyfr odpowiedniej liczby z pierwszej listy.

Możliwe „następniki" poszczególnych liczb przedstawione są na poniższym rysunku:



Jedynki dzielą zatem liczby na drugiej liście na bloki. Ponadto prawie wszystkie bloki składają się z 3 liczb (wliczając samą jedynkę). Istnieją tylko dwa typy bloków zawierające 4 liczby: blok 1, 2, 4, 8 i blok 1, 2, 4, 9. Są to ponadto jedyne bloki zawierające liczby 8 i 9.
Zauważmy wreszcie, że gdy docieramy do liczby 1 na drugiej liście, to odpowiadająca jej liczba z pierwszej listy ma o jedną cyfrę więcej od poprzedzającej ją liczby - wynika to stąd, że 1 może pojawić się na drugiej liście tylko w wyniku zwiększenia liczby cyfr liczby z pierwszej listy.
Połączmy powyższe spostrzeżenia. Wiemy, że ostatnie trzy cyfry na drugiej liście to 1, 2, 5, składają się one zatem na pełny blok. Liczbom z pierwszego bloku odpowiadają jednocyfrowe liczby z pierwszej listy, a liczbom z ostatniego bloku odpowiadają 167-cyfrowe liczby z pierwszej listy. Stąd musi występować 167 bloków. Gdyby wszystkie z nich składały się z 3 liczb, to druga lista składałaby się w sumie z $3 \cdot 167 = 501$ liczb. Zatem $555 - 501 = 54$ bloków musi składać się z 4 liczb. Stąd 54 razy na drugiej liście pojawia się jedna z liczb 8, 9. Ponieważ liczba 8 pojawia się 30 razy, to liczba 9 pojawia się $54 - 30 = 24$ razy.