Vzorové riešenia

9. ročník Náboja Junior

19. novembra 2021

Trojsten

FAKULTA MATEMATIKY, FYZIKY A INFORMATIKY
Univerzita Komenského v Bratislave

Poďakovanie

Námety úloh:

Alžběta Andrýsková, Anežka Čechová, Kateřina Charvátová, Robert Gemrot, Matej Hrmo, Soňa Husáková, Radek Kusek, Viktor Materna, Aleš Opl, Marián Poturnay, Patrik Švančara, Martin Vaněk

Autori zadaní a riešení úloh:

Jakub Hluško, Matej Hrmo, Nina Hronkovičová, Marián Poturnay, Patrik Rusnák, Ela Vojtková

Recenzenti:

Barbora Čemanová, Michal Farnbauer, Filip Hanzely, Matej Hrmo, Nina Hronkovičová, Marián Poturnay, Patrik Rusnák, Ela Vojtková

Preklady:

Alžběta Andrýsková, Anežka Čechová, Robert Gemrot, Filip Hanzely, Matej Hrmo, Patrik Kašpárek, Radek Kusek, Karolína Letochová, Viktor Materna, Marcel Palaj, Łukasz Popek, Marián Poturnay, Juraj Rosinský, Patrik Rusnák, Sabína Samporová, Tomáš Šimek, Patrik Švančara, Karolina Szulc, Mateusz Wojtas

Lokálni organizátori:

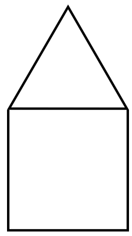
Michaela Dlugošová (SK), Radek Kusek (PL), Juraj Rosinský (FR), Patrik Švančara (CZ)

Úloha 1. Maťko má tri zmrzliny. Za prvú zaplatil 0,80 €, za druhú 0,70 € a za tretiu 1,05 €. Zaplatil päťeurovou bankovkou. Koľko eur mu zrmzlinár vydal?

Výsledok. 2,45

Riešenie. Maťko zaplatil bankovkou s hodnotou 5 € za tri zmrzliny, ktorých cena bola spolu 0,80 € + 0,70 € + 1,05 € = 2,55 €. Zmrzlinár mu teda vydal 5 € − 2,55 € = 2,45 €.

Úloha 2. Lucka chce nareslit' domček pozostávajúci zo základu tvaru štvorca a strechy tvaru rovnostranného trojuholníka tak ako na obrázku. Chce, aby strana štvorca bola dlhá 0,5 m. Lucka každú sekundu nakreslí čiaru s dĺžkou 1 dm. Koľko sekúnd jej bude trvať nakresliť obrázok domčeka?



Výsledok. 30

Riešenie. Štvorcová časť domčeka má všetky štyri strany rovnako dlhé s dĺžkou 0,5 m. Rovnako i trojuholníková časť má všetky strany rovnako dlhé. Keďže však jedna z úsečiek obrázka je zároveň stranou štvorca i trojuholníka, všetky úsečky na obrázku musia mať rovnakú dĺžku, a to 0,5 m. Obrázok pozostáva zo šiestich takýchto úsečiek, preto všetky úsečky obrázka majú spolu dĺžku $6 \cdot 0{,}5\,\mathrm{m} = 3\,\mathrm{m}$. Lucka nakreslí každú sekundu čiaru dlhú 1 dm, každých 10 sekúnd teda nakreslí čiaru dlhú $10 \cdot 1\,\mathrm{dm} = 10\,\mathrm{dm} = 1\,\mathrm{m}$. Musí však nakresliť trikrát toľko čiary, teda jej nakreslenie obrázka bude trvať $3 \cdot 10\,\mathrm{s} = 30\,\mathrm{s}$.

Úloha 3. Archimedes si zobral digitálnu váhu a postavil na ňu nádobu s objemom 1 l a hmotnosťou 250 g. Potom ju naplnil do polovice vodou a nakoniec do nádoby vhodil kus dreva s hmotnosťou 300 g a hustotou 600 kg/m^3, ktorý začal plávať na vode. Akú hmotnosť v gramoch Archimedovi ukáže váha?

Výsledok. 1 050

Riešenie. To, že drevo pláva, a teda naň pôsobí vztlaková sila smerom hore, nebude mať žiadny účinok. Váha totiž odmeria len tiaž nádoby, na ktorú nemá žiadny vplyv to, že na seba vnútri nádoby telesá pôsobia nejakými silami (pokiaľ sú v pokoji). Preto keďže nádoba váži 250 g, pol litra vody váži 500 g a drevo váži 300 g, tak nám váha ukáže $250\,\mathrm{g} + 500\,\mathrm{g} + 300\,\mathrm{g} = 1050\,\mathrm{g}$.

Úloha 4. Patrik si skladá rozvrh na jeden deň, v ktorom chce mať tri hodiny matematiky a dve hodiny fyziky. Koľko rôznych rozvrhov si môže poskladať?

Výsledok. 10

Riešenie. Vypíšme si všetky možnosti. Začneme tými, v ktorých máme matematiku ako prvú: MMFFF, MFMFF, MFFMF, MFFFM. Teraz sa pozrime na možnosti, kedy máme ako prvú fyziku: FMMFF, FMFMF, FMFFM, FFMMF, FFMFM, FFFMM. Počet všetkých možných Patrikových rozvrhov je teda 10.

Úloha 5. Slimák sa vydal na dlhú púť. Rozhodol sa prejsť cez 100-yardové ihrisko amerického futbalu. Koľko hodín mu to bude trvať, ak 1 palec prejde za 10 sekúnd?

Výsledok. 10

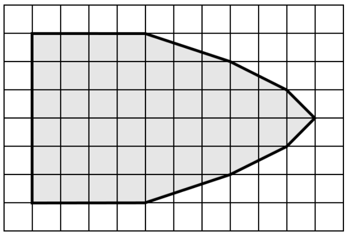
Riešenie. Jeden yard má 3 stopy a jedna stopa zase 12 palcov. Jeden yard má teda $3 \cdot 12 = 36$ palcov. Slimák musí prejsť 100 yardov, teda $100 \cdot 36 = 3\,600$ palcov. Každý palec mu trvá prejsť 10 sekúnd, prejsť celé ihrisko mu teda bude trvať $10 \cdot 3\,600 = 36\,000$ sekúnd. Každá hodina má 60 minút a každá minúta 60 sekúnd. Jedna hodina má teda $60 \cdot 60 = 3\,600$ sekúnd. Prejsť celé ihrisko teda slimákovi potrvá $36\,000 : 3\,600 = 10$ hodín.

Úloha 6. Jožko vynásobil číslo 111 111 111 sebou samým. Aký je ciferný súčet čísla, ktoré dostal?

Výsledok. 81

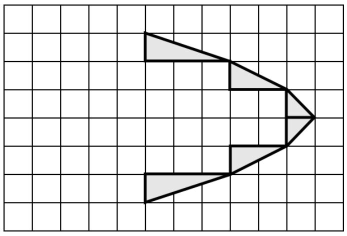
Riešenie. Keď vynásobíme číslo 111 111 111 samým sebou, tak dostaneme výsledok 12 345 678 987 654 321. Ciferný súčet tohto čísla je $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 81$.

Úloha 7. Zuzka si kreslila náboj. Nakreslila ho na štvorčekovú sieť tak, ako vidíš na obrázku. Koľko gramov farby Zuzka spotrebovala na nakreslenie náboja, ak na zafarbenie jedného štvorčeka minula 1 gram farby?



Výsledok. 46

Riešenie. Začnime tým, že spočítame, koľko štvorčekov je zafarbených celých. Takých štvorčekov je 40. Na ich zafarbenie Zuzka minula 40 gramov farby. Odstráňme z obrázku tieto štvorčeky:



Zostáva nám zistiť, koľko farby minie Zuzka na zostávajúcich 6 trojuholníkov. Všimnime si, že trojuholníky, ktoré sa nachádzajú nad sebou môžeme presunúť tak, že budú spoločne zakrývať jeden obdĺžnik zložený postupne z 3, 2 a 1 štvorčeka. Na ich zafarbenie tak Zuzka minie $3 + 2 + 1 = 6$ gramov farby. Na nakreslenie náboja preto Zuzka minula $40 + 6 = 46$ gramov farby.

Úloha 8. Adam sa raz ráno vybral na atletický štadión, ktorého jeden okruh má dĺžku 400 m. Počas prvých 20 minút bežal tak rýchlo, že keby bežal rovnako rýchlo celú hodinu, zabehol by 20 okruhov. Akou priemernou rýchlosťou v km/h bežal Adam počas prvých 20 minút behu?

Výsledok. 8

Riešenie. Za hodinu by zabehol 20 okruhov, a teda $20 \cdot 400\,\mathrm{m} = 8000\,\mathrm{m}$. Jeho rýchlosť bola teda 8 km/h. Ako je to však s jeho priemernou rýchlosťou? Keďže počas prvých 20 minút behu vôbec nemenil svoju rýchlosť, bola táto rýchlosť i jeho priemernou rýchlosťou. Preto mala Adamova priemerná rýchlosť za prvých 20 minút veľkosť 8 km/h.

Úloha 9. Autobusy v meste premávajú kyvadlovo medzi dvomi konečnými zastávkami s intervalom 10 minút. Najmenej koľko autobusov je potrebných na obsluhu linky, ktorá má dĺžku 7200 m a na ktorej jazdia autobusy priemernou rýchlosťou 5 m/s?

Výsledok. 5

Riešenie. Jedna cesta autobusu medzi dvomi konečnými zastávkami trvá:

$$\frac{7200\,\mathrm{m}}{5\,\mathrm{m/s}} = 1440\,\mathrm{s} = 24\,\mathrm{min}.$$

Kým sa autobus dostane z jednej končenej na druhú a zase späť, tak mu to trvá $2 \cdot 24\,\mathrm{min} = 48\,\mathrm{min}$. Čiže od momentu, kedy vyrazil, do momentu, kedy sa vrátil, museli z konečnej odísť aspoň 4 ďalšie autobusy. Preto je na obsluhu tejto linky potrebných aspoň 5 autobusov.

Úloha 10. Jaro má na pracovnom stole v kancelárii tlačiareň, ktorá vytlačí 20 strán za minútu. V zasadacej miestnosti sa nachádza tlačiareň pre celú Jarovu firmu, ktorá vytlačí 25 strán za minútu. Jarovi trvá prejsť od svojho pracovného stola do zasadacej miestnosti 1 minútu, ale príkaz na tlač môže zadať už od svojho počítača. Koľko najmenej strán musí Jaro tlačiť, aby sa mu časovo oplatilo tlačiť v zasadacej miestnosti a nie vo svojej kancelárii?

Výsledok. 101

Riešenie. Pri tlačení v zasadačke Jaro stráca čas len cestou naspäť k svojmu stolu. Aby sa mu teda oplatilo ísť tlačiť do zasadačky, potrebuje dať tlačiť aspoň toľko strán, aby tlačiareň v nej skončila o viac ako minútu skôr, než keby to dal tlačiť u seba. To znamená, že ak by dal tlačiť rovnaký počet strán na oboch zároveň, tak v momente, keď tlačiareň v zasadačke dotlačí, tlačiareň na Jarovom stole má pred sebou ešte viac ako minútu tlače, teda viac ako 20 strán. Tlačiareň v zasadačke je o $25 - 20 = 5$ strán za minútu rýchlejšia, a teda ak mala nakonci náskok viac ako 20 strán, tak musela tlačiť viac ako 4 minúty, a teda vytlačila viac ako 100 strán, teda aspoň 101 strán. Preto aby sa Jaro vrátil skôr, musí tlačiť 101 strán.

Úloha 11. Pedro sa rozhodol, že so svojím obľúbeným prirozdeným číslom musí niečo začať robiť. Preto toto číslo zaokrúhlil na desiatky, stovky aj tisícky. Povšimol si, že vždy dostal rovnaký výsledok, ktorý nebol rovný nule. Aké najmenšie môže byť Pedrovo obľúbené číslo?

Výsledok. 995

Riešenie. Pri zaokrúľovaní na desiatky sa Pedrovo číslo zmení o najviac 5. Najmenšie nenulové prirodzené číslo, ktoré môže Pedro dostať po zaokrúhlení na tisícky, je číslo 1 000. Pedrovo obľúbené číslo tak muselo mať hodnotu aspoň $1\,000 - 5 = 995$ a ľahko overíme, že toto číslo spĺňa podmienky zo zadania.

Úloha 12. Nina behá okolo jazera s obvodom 6 km. Prvé kolo jej trvalo 40 minút. Po druhom kole si všimla, že jej priemerná rýchlosť počas oboch kôl bola 8 km/h. Koľko minút jej trvalo druhé kolo?

Výsledok. 50

Riešenie. Nina zabehla dve kolá, teda vzdialenosť $2 \cdot 6\,\mathrm{km} = 12\,\mathrm{km}$, priemernou rýchlosťou 8 km/h. Takže jej to muselo trvať:

$$\frac{12\,\mathrm{km}}{8\,\mathrm{km/h}} = 1{,}5\,\mathrm{h} = 90\,\mathrm{min}$$

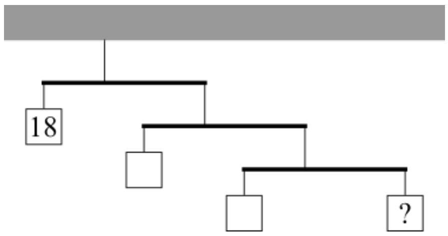
Keďže Nina zabehla prvé kolo za 40 minút, musela zabehnúť druhé kolo za $90 - 40 = 50$ minút.

Úloha 13. Andrej, Betka a Cyril hrali proti sebe šach. Žiadna partia sa neskončila remízou. Andrej vyhral 7-krát a prehral 10-krát. Betka vyhrala 8-krát a prehrala 9-krát. Cyril prehral 8-krát. Koľko hier vyhral Cyril?

Výsledok. 12

Riešenie. Situácia, že niekto prehral, nastala presne $10 + 9 + 8 = 27$-krát. Preto musel presne 27-krát aj niekto vyhrať. To znamená, že Cyril musel vyhrať $27 - 7 - 8 = 12$ hier.

Úloha 14. Patrik má tri ľahké závesné páky, ktorých dlhšie rameno je dvakrát dlhšie ako ich kratšie rameno. Na kratší koniec prvej páky Patrik zavesil závažie s hmotnosťou 18 kg. Na dlhší koniec prvej páky zavesil druhú páku, ktorá má na svojom dlhšom konci zavesenú tretiu páku. Potom Patrik zavesil na voľné konce všetkých pák závažia tak, aby bola sústava pák v rovnováhe. Koľko kilogramov váži závažie, ktoré Patrik zavesil na dlhší koniec tretej páky?



Výsledok. 1

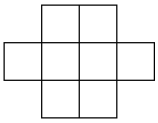
Riešenie. Dlhšie rameno každej z pák je dvakrát dlhšie ako jej kratšie rameno. Preto aby bola každá páka v rovnováhe, musí byť hmotnosť všetkého, čo je zavesené na kratšom ramene, dvakrát väčšia ako hmotnosť všetkého na dlhšom ramene. Na kratšom ramene prvej páky je závažie s hmotnosťou 18 kg. Na dlhšom ramene je zavesená druhá páka, ktorá tak musí mať hmotnosť (so všetkým, čo na nej je) $18\,\mathrm{kg} : 2 = 9\,\mathrm{kg}$. Na druhej páke máme opäť zavesené nejaké závažie a ďalšiu páku. Aby bolo závažie dvakrát ťažšie ako tretia páka, musí mať závažie hmotnosť 6 kg a tretia páka hmotnosť 3 kg. Napokon podobne rozdelíme aj hmotnosti medzi závažia na tretej páke. Tým zistíme, že závažie na dlhšom konci tretej páky musí mať hmotnosť 1 kg.

Úloha 15. Nad Kikiným pozmenkom včera rovnomerne pršalo. Kika má na svojej vodorovnej streche systém na zachytávanie vody. Systém pokrýva celú strechu s povrchom $100\,\mathrm{m}^2$. Počas celého dažďa systém zachytil 4000 l vody. O koľko milimetrov stúpla po daždi hladina v bazéne na Kikinej záhrade?

Výsledok. 40

Riešenie. Ak by voda neodtekala, po daždi by na streche zostal kváder vody. A keďže pršalo rovnomerne, tento kváder by mal rovnakú výšku ako prírastok vody do bazéna. Ak teda zistíme výšku mysleného kvádra vody na streche, bude táto výška rovnaká, ako zmena výšky vody v bazéne. Kváder má objem $4000\,\mathrm{l} = 4000\,\mathrm{dm}^3 = 4\,\mathrm{m}^3$. Obsah jeho podstavy je plocha strechy - $100\,\mathrm{m}^2$. Vieme, že objem kvádra sa rovná súčinu obsahu postavy a výšky. Teda jeho výška je $\frac{4\,\mathrm{m}^3}{100\,\mathrm{m}^2} = 0{,}04\,\mathrm{m} = 40\,\mathrm{mm}$ a táto je rovnaká ako výška prírastku hladiny bazéna.

Úloha 16. Sergej našiel na povale zvláštnu doštičku, ktorú vidíš na obrázku. Rozhodol sa do každého políčka vyryť jedno z čísel od 1 po 8. Chce to ale urobiť tak, aby rozdiel čísel v políčkach, ktoré sa dotýkajú (rohom alebo stranou), bol aspoň 2. Aký bude súčet čísel v políčkach, ktoré sa dotýkajú (rohom alebo stranou) políčka s číslom 4?



Výsledok. 22

Riešenie. Podmienku, že každé dve čísla v políčkach, ktoré sa dotýkajú, sa líšia o aspoň 2, môžeme povedať aj tak, že čísla líšiace sa o 1 spolu nesusedia.
Pozrime sa na druhé a tretie políčkou v prostrednom riadku. Každé s týchto políčok sa dotýka všetkých ostatných políčok okrem jedného. Preto do nich môžeme umiestniť len také čísla, ktoré majú medzi zvyšnými len jedno také, od ktorého sa líšia o 1. A to sú čísla 1 a 8. Keďže je táto doštička symetrická, je jedno, v akom poradí umiestnime tieto čísla, a tak ich umiestnime napríklad takto:

	1	8	

Čísla 1 a 8 majú len jedno číslo, od ktorého sa líšia o 1, a to čísla 2 a 7. Tie tak musíme umiestniť na zvyšné políčka prostredného riadka:

7	1	8	2

Políčko s číslom 2 sa nemôže dotýkať políčka s číslom 3, ktoré tak musí byť buď nad, alebo pod číslom 1. Z podobných dôvodov musí byť číslo 6 nad alebo pod číslom 8. Môžu nastať dve možnosti. Ak dáme aj číslo 3, aj číslo 6 spolu do niektorého riadka, tak v druhom budú musieť byť spolu vedľa seba čísla 4 a 5, čo nemôžu. Preto musia byť čísla 3 a 6 v rôznych riadkoch. Číslo 4 navyše nemôže byť v riadku spolu s číslom 3, a tak musí celá vyplnená doštička vyzerať takto (alebo s vymeneným prvým a tretím riadkom):

	3	5	
7	1	8	2
	4	6	

Z toho už poľahky vyčítame, že súčet čísel v políčkach, ktoré susedia s políčkom s číslom 4, musí byť $7+1+8+6=22$.

Úloha 17. Kubo sedí vo vlaku, ktorý si to uháňa rýchlosťou 108 km/h. Vtom vlak vošiel do tunela, ktorý má podľa Kubovej knižky dĺžku 2 km. Kubo si všimol, že koniec vlaku vyšiel z tunela o 75 s neskôr, ako do tunela vošla lokomotíva. Aká je dĺžka vlaku v metroch?

Výsledok. 250

Riešenie. Na úvod premeňme rýchlosť v kilometroch za hodinu na rýchlosť v metroch za sekundu:

$$108\,\mathrm{km/h} = 30\,\mathrm{m/s}$$

Vlak, ktorý sa pohybuje touto rýchlosťou, prejde za čas 75 s vzdialenosť $75\,\mathrm{s}\cdot 30\,\mathrm{m/s} = 2250\,\mathrm{m}$. Takže lokomotíva prešla od vojdenia do tunela vzdialenosť 2250 m. Keďže tunel bol dlhý len 2000 m, tak lokomotíva je po 75 sekundách už $2250\,\mathrm{m} - 2000\,\mathrm{m} = 250\,\mathrm{m}$ za tunelom. V tom čase ale vychádza z tunela koniec vlaku. Preto musí byť vlak dlhý 250 m.

Úloha 18. Ela má šesť obľúbených, rôzne dlhých ceruziek, ktoré majú v milimetroch celočíselné dĺžky. Priemerná dĺžka ceruzky je 12 mm. Akú najdlhšiu ceruzku v milimetroch môže Ela mať?

Výsledok. 57

Riešenie. Ak je priemer dĺžok Eliných ceruziek 12 mm, potom súčet ich dĺžok musí byť $6\cdot 12\,\mathrm{mm} = 72\,\mathrm{mm}$. Aby bola jedna ceruzka čo najdlhšia, ostatných 5 musí byť najkratších možných. Teda musia mať dĺžky postupne 1 mm, 2 mm, 3 mm, 4 mm, 5 mm, spolu 15 mm. Pre najdlhšiu ceruzku tak zostane $72\,\mathrm{mm} - 15\,\mathrm{mm} = 57\,\mathrm{mm}$.

Úloha 19. Marcel trénuje curling na zamrznutom jazere. Vezme curlingový kameň s hmostnosťou 18,6 kg a vypustí ho po ľade s počiatočnou rýchlosťou 2 m/s. Koeficient šmykového trenia kameňa a ľadu je 0.05. Ako ďaleko od bodu vypustenia v metroch sa kameň dokĺže?

Výsledok. 4

Riešenie. Podľa zákona zachovania energie musí byť zmena energie kameňa krytá prácou vonkajších síl. Kameň s hmotnosťou $m = 18{,}6\,\mathrm{kg}$ a rýchlosťou $v = 2\,\mathrm{m/s}$ má kinetickú energiu rovnú $E_k = \frac{1}{2}mv^2$. Vonkajšia sila, ktorá koná prácu, je v našej úlohe trecia sila F_t, ktorá je rovná súčinu normálovej sily a koeficientu šmykového trenia f. Normálová sila je v našom prípade reakciou na tiažovú silu F_G, ktorá je rovná súčinu hmotnosti m a tiažového zrýchlenia g. Ak teleso prejde dráhu s, trecia sila vykoná prácu $W = F_t s = F_G f s = mgfs$. Rýchlosť telesa pritom klesne na nulu, teda na konci pohybu má aj nulovú kinetickú energiu. Platí teda:

$$\begin{aligned}
\Delta E_k &= W \\
\frac{1}{2}m\Delta v^2 &= mgfs \\
\frac{1}{2}(v^2 - 0^2) &= fgs \\
\frac{1}{2}v^2 &= fgs \\
s &= \frac{v^2}{2fg}
\end{aligned}$$

To po dosadení hodnôt zo zadania znamená, že kameň sa dokĺže do vzdialenosti $s = \frac{(2\,\mathrm{m/s})^2}{2\cdot 0.05\cdot 10\,\mathrm{m/s^2}} = 4\,\mathrm{m}$.

Úloha 20. Ako tak Kaja kráčala po chodbách matfyzu, na jednej z tabúľ uvidela podivný obrazec. Obrazec pozostával z úsečky BC, na osi ktorej ležali body A a D tak, že bod D ležal v trojuholníku ABC. Veľkosť uhla BAC bola 40° a veľkosť uhla BDC bola 140°. Aká bola veľkosť uhla ACD v stupňoch?

Výsledok. 50

Riešenie. Vďaka tomu, že body A aj D ležia na osi strany BC, vidíme, že trojuholníky ABC a DBC sú rovnoramenné so základňou BC. Potom v trojuholníku ABC si vieme veľkosť uhlov pri základni dopočítať ako $\frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$ a v trojuholníku DBC ako $\frac{180^\circ - 140^\circ}{2} = 20^\circ$. Uhol ACD tak má veľkosť $|\measuredangle ACD| = |\measuredangle ACB| - |\measuredangle DCB| = 70^\circ - 20^\circ = 50^\circ$.

Úloha 21. Katka šla na výlet do hôr. V toľkej zime sa rozhodla uvariť si čaj. Má 0,5 l vody s teplotou 0 °C a čaj si varí nad táborovým ohňom s účinnosťou 0.5%. Koľko kilogramov dreva potrebuje na to, aby jej celá voda zovrela?

Výsledok. 2

Riešenie. Výhrevnosť dreva je 21 MJ/kg = 21 000 kJ/kg. Keďže účinnosť pálenia dreva na táborovom ohni je 0.5%, spálením jedného kilogramu získame 21 000 kJ/kg · 0.005 · 1 kg = 105 kJ energie. Energia, ktorú Katka potrebuje na zovretie vody, t.j. zvýšenie jej teploty z 0 °C na 100 °C, je (100 °C − 0 °C) · 4,2 kJ/(kg °C) · 0,5 kg = 210 kJ, čo je dvojnásobok zo 105 kJ, takže Katka potrebuje 2 kg dreva.

Úloha 22. Lenka si kúpila balíček exotických cukríkov, ktorý obsahoval iba ananásové a banánové cukríky. Ananásových cukríkov bolo dvakrát viac ako banánových. Ihneď dostala na cukríky chuť, a tak zjedla 17 ananásových a 17 banánových cukríkov. Po tom, ako ich zjedla, bolo ananásových cukríkov trikrát viac ako banánových. Koľko ananásových cukríkov bolo na začiatku v balíčku?

Výsledok. 68

Riešenie. Označme si počiatočný počet ananásových cukríkov ako A a počet banánových ako B. Na začiatku má Lenka dvakrát toľko ananásových cukríkov ako banánových, t.j. $A = 2 \cdot B$. Potom však zje 17 cukríkov z oboch príchutí a zostane jej $A - 17$ ananásových cukríkov a $B - 17$ banánových. Zo zadania však vieme, že ananásových cukríkov zostane trikrát toľko ako banánových, čiže $A - 17 = 3 \cdot (B - 17)$. Po dosadení $A = 2 \cdot B$ potom:

$$\begin{aligned}
2 \cdot B - 17 &= 3 \cdot (B - 17) \\
2 \cdot B - 17 &= 3 \cdot B - 51 \\
B &= 34
\end{aligned}$$

Takže banánových cukríkov bolo na začiatku 34. Ananásových bolo dvakrát toľko, čiže 68.

Úloha 23. Niekto ukradol náboj! Bol to niekto zo štvorice Majo, Maťo, Jerry alebo Marcel. Títo štyria podozriví povedali šerifovi nasledujúce informácie:

- Majo: *Náboj nemám. Náboj má Maťo.*
- Maťo: *Náboj má Marcel. Ak má Marcel náboj, tak Majo nemá náboj.*
- Jerry: *Presne jedna z mojich viet je pravdivá. Marcel povie buď dve pravdivé, alebo dve nepravdivé vety.*
- Marcel: *Každý podozrivý povedal aspoň jednu nepravdivú vetu. Ja náboj nemám.*

Koľko z viet, ktoré šerif dostal, bolo pravdivých? Nájdi súčin všetkých možností.

Výsledok. 20

Riešenie. Zamerajme sa najprv na prvý vetu od Jerry. Ak je pravdivá, tak toto musí byť tá jedina pravdivá, čiže jej druhá veta musí byť nepravdivá. Ak je prvá veta, ktorú Jerry povedala, nepravdivá, tak jej druhá veta nemôže byť pravdivá - prvá veta by tak totiž bola pravdivá. Z toho dostávame, že o druhej vete od Jerry vieme s istotou povedať, že je nepravdivá. O jej prvej vete ale nevieme povedať vôbec nič.
Druhá veta, ktorú Jerry povedala, je nepravdivá. Preto musel Marcel povedať jednu pravdivú a jednu nepravdivú vetu. Rozoberme prípady podľa toho, ktorá z jeho viet je pravdivá.
Ak je pravdivá veta, že „všetci podozriví povedali aspoň jednu nepravdivú vetu“, tak Marcelova veta, že nemá náboj, je nepravdivá. Preto musí mať náboj Marcel. Potom sú ale obe Maťove vety pravdivé, čo nemôže nastať, keďže Marcelova veta „všetci podozriví povedali aspoň jednu nepravdivú vetu“ je pravdivá.
Preto musí byť pravdivá Marcelova veta, že on nemá náboj, a musí existovať niekto, kto povedal dve pravdivé vety. To môžu spĺňať len Majo a Maťo. Marcel ale náboj nemá, a tak je Maťova prvá veta nepravdivá. Dve pravdivé vety tak musel povedať Majo. Z nich vyplýva, že náboj má Maťo.
Zostáva nám pozrieť sa na to, ktoré vety boli pravdivé. Povedali sme si, že obe Majove vety boli pravdivé. Z Maťových viet bola pravdivá iba druhá. Podobne aj z Marcelových viet bola pravdivá iba druhá. Napokon mohla byť prvá veta od Jerry aj pravda, aj lož. Takže mohlo zaznieť 4 alebo 5 pravdivých viet. Súčin možných počtov pravdivých viet tak je $4 \cdot 5 = 20$.

Úloha 24. Mary si kúpila 8 učebníc. Všetky učebnice mali tvar kvádra so stranami s dĺžkami 5 cm, 15 cm and 20 cm. Učebnice mali hustotu $1200\,\mathrm{kg/m^3}$. Predavač jej ich zabalil do vysokej krabice s vekom jednu na druhú tak, že sa učebnice dotýkali najväčšími stenami. Mary si krabicu doniesla domov a položila ju na zem a otvorila veko. Teraz by učebnice chcela uložiť na poličku vo výške 1,6 m nad zemou tak, aby sa všetky knihy dotýkali poličky jednou zo svojich najmenších stien. Akú prácu v Jouloch na to musí vykonať?

Výsledok. 216

Riešenie. Učebnice položené na podlahe tvoria kváder s výškou $8 \cdot 5\,\mathrm{cm} = 40\,\mathrm{cm}$, takže ich ťažisko sa nachádza $20\,\mathrm{cm} = 0{,}2\,\mathrm{m}$ nad podlahou. Oproti tomu učebnice položené na poličke budú tvoriť kváder s výškou 20 cm, takže ich ťažisko bude $10\,\mathrm{cm} = 0{,}1\,\mathrm{m}$ nad poličkou. Polička je vo výške 1,6 m nad zemou, teda rozdiel výšok ťažiska učebníc pred a po vyložení na poličku bude $1{,}6\,\mathrm{m} - 0{,}2\,\mathrm{m} + 0{,}1\,\mathrm{m} = 1{,}5\,\mathrm{m}$. Objem učebníc je $15\,\mathrm{cm} \cdot 20\,\mathrm{cm} \cdot 40\,\mathrm{cm} = 12\,000\,\mathrm{cm^3} = 12\,\mathrm{dm^3}$ a ich hustota je $1200\,\mathrm{kg/m^3} = 1{,}2\,\mathrm{kg/dm^3}$. Potom ich hmotnosť je $12\,\mathrm{dm^3} \cdot 1{,}2\,\mathrm{kg/dm^3} = 14{,}4\,\mathrm{kg}$. Rozdiel potenciálnej energie medzi počiatočnou a finálnou polohou potom bude $14{,}4\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} \cdot 1{,}5\,\mathrm{m} = 216\,\mathrm{J}$. Takže Mary musí vykonať prácu s veľkosťou 216 J.

Úloha 25. Juro nosí v batohu trojuholník ABC, ktorého strany majú v centimetroch celočíselné dĺžky. Strana AB nie je kratšia ako 21 cm, ale ani dlhšia ako 28 cm. Strana AC má dĺžku aspoň 11 cm, ale nie viac ako 18 cm. Strana BC nie je dlhšia ako 8 cm, ale určite má dĺžku aspoň 1 cm. Aký najväčší obvod v centimetroch môže Jurov trojuholník mať?

Výsledok. 51

Riešenie. Spomeňme si, že v trojuholníku platí trojuholníková nerovnosť, ktorá nám hovorí, že súčet dĺžok kratších dvoch strán musí byť väčšia ako dĺžka tretej strany. O dvoch kratších stranách BC a AC vieme, že ich dĺžka môže byť najviac 8 cm a 18 cm. Z toho vidíme, že aby mohol Jurov trojuholník vôbec existovať, musí jeho tretia strana mať menej ako $8\,\mathrm{cm} + 18\,\mathrm{cm} = 26\,\mathrm{cm}$, čiže maximálne 25 cm. Trojuholník s dĺžkami strán 8 cm, 18 cm and 25 cm už trojuholníkovú nerovnosť spĺňa, a teda jeho existencii nič nebráni. Na druhú stranu, jeho dve kratšie stranu majú svoju najväčšiu povolenú dĺžku a jeho tretia strana musí byť kratšia ako súčet dvoch predchádzajúcich, čiže obvod trojuholníka $8\,\mathrm{cm} + 18\,\mathrm{cm} + 25\,\mathrm{cm} = 51\,\mathrm{cm}$ je najväčší možný.

Úloha 26. Sabinka si kúpila nové auto. Jeho výhodou je, že premieňa energiu benzínu na kinetickú energiu auta vždy rovnako efektívne bez ohľadu na to, ako zrýchľuje. Sabinka sa v meste rozbehla z pokoja na rýchlosť 40 km/h, pričom spotrebovala 700 kJ energie. Potom vyšla na diaľnicu a zrýchlila na rýchlosť 120 km/h. Koľko kilojoulov energie spotrebovala pri tomto zrýchľovaní?

Výsledok. 5600

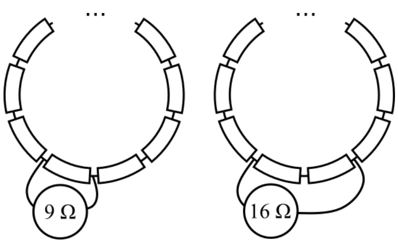
Riešenie. Kinetická energia telesa rastie s druhou mocninou rýchlosti. Preto na nadobudnutie 3-krát väčšej rýchosti treba $3 \cdot 3 = 9$-krát viac energie. Na zrýchlenie z nuly na 120 km/h tak Sabinka spotrebuje $9 \cdot 700\,\mathrm{kJ} = 6300\,\mathrm{kJ}$ energie. Pri druhom zrýchľovaní tak Sabinka spotrebovala $6300\,\mathrm{kJ} - 700\,\mathrm{kJ} = 5600\,\mathrm{kJ}$ energie.

Úloha 27. Radko si na papier napísal všetky prirodzené čísla od 1 do 100. Potom si na druhý papier napísal všetky kladné rozdiely všetkých dvojíc čísel na prvom papieri. Ktoré číslo sa na druhom papieri nachádza najčastejšie?

Výsledok. 1

Riešenie. Keď do dvojice zoberieme číslo 1 ako najmenšie číslo, tak na druhý papier napíšeme všetky čísla od 1 po 99. Ak by sme do dvojice zobrali číslo 2 ako najmenšie, napísali by sme na druhý papier všetky čísla od 1 do 98. Podobne by sme mohli pokračovať ďalej až by sme pre 99 ako najmenšie číslo napísali na druhý papier číslo 1. V každom prípade sme na druhý papier napísali číslo 1 a zvyšné čísla sme v nejakom momente prestali písať na druhý papier. Preto sa na druhom papieri nachádza najčastejšie číslo 1.

Úloha 28. Nina si vyrobila náhrdelník z niekoľkých rovnakých rezistorov tak, že rezistory vodivo zapojila do krúžku. Zapojila multimeter tak, že medzi svorkami multimetra bol len jeden rezistor. Multimeter nameral odpor 9 Ω. Keď multimeter zapojila tak, že medzi svorkami multimetra boli dva rezistory, multimeter nameral odpor 16 Ω. Z koľkých rezistorov sa skladá Ninin náhrdelník?



Výsledok. 10

Riešenie. Povedzme, že rezistorov je n a že každý z rezistorov má odpor R. Keď zapojíme multimeter medzi jeden rezistor, tak meriame odpor v obvode, kde máme paralelne zapojené rezistory. V jednej vetve máme 1 rezistor a v druhej vetve $n-1$ rezistorov. Podobne keď zapojíme multimeter medzi dva rezistory, tak máme v jednej vetve 2 rezistory a v druhej vetve $n-2$ rezistorov. To nás vedie k sústave rovníc:

$$\frac{1}{9\,\Omega} = \frac{1}{R} + \frac{1}{(n-1)R}$$
$$\frac{1}{16\,\Omega} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{(n-2)R}$$

Po prenásobení rovníc menovateľmi dostávame sústavu:

$$(n-1)R = (n-1)(9\,\Omega) + 9\,\Omega$$
$$(n-2)R = (n-2)(8\,\Omega) + 16\,\Omega$$

Keď roznásobíme zátvorky a rovnice upravíme, dostaneme:

$$nR - R = 9n\,\Omega$$
$$nR - 2R = 8n\,\Omega$$

Odčítajme teraz druhú rovnicu od prvej:

$$R = n\,\Omega$$

Takže číselná hodnota odporu rezistora v ohmoch sa rovná počtu rezistorov. Dosaďme túto informáciu do rovnice $nR - R = 9n\,\Omega$:

$$(n^2 - n)(\Omega) = (9n)(\Omega)$$
$$(n^2 - 10n)(\Omega) = 0$$
$$(n(n-10))(\Omega) = 0$$

Takže rezistorov je buď $n = 0$, alebo $n = 10$. Prípad $n = 0$ ale nedáva zmysel, a tak muselo byť rezistorov $n = 10$.

Úloha 29. Laura si nakreslila pravidelný osemuholník $ABCDEFGH$. Chce nakresliť 4 nepretínajúce sa úsečky (ani v krajných bodoch) tak, aby ich konce ležali vo vrcholoch osemuholníka. Koľkými spôsobmi to môže urobiť?

Výsledok. 14

Riešenie. Rozoberme prípady podľa toho, s ktorým vrcholom bude spojený vrchol A. Ak je vrchol A spojený s niektorým z vrcholov C, E alebo G, tak táto úsečka rozdelí zvyšné vrcholy na skupiny s nepárnym počtom vrcholov. Tie sa ale nedajú dať do dvojíc, a tak ani nakresliť medzi ne úsečky spĺňajúce podmienky zo zadania. Ak je vrchol A spojený s vrcholom B, tak nám zostáva na spojenie zvyšných 6 vrcholov. Na to máme týchto 5 možností:

$$(CD)(EF)(GH)$$
$$(CD)(EH)(FG)$$
$$(CF)(DE)(GH)$$
$$(CH)(DE)(FG)$$
$$(CH)(DG)(EF)$$

Podobných 5 možností by sme dostali, keby spojíme úsečkou vrchola A a H. Ak by sme s vrcholom A spojili vrchol D, tak by sme hneď museli nutne spojiť aj vrcholy B a C. Pre zvyšné 4 vrcholy nám zostanú tieto dve možnosti:

$$(EF)(GH)$$
$$(EH)(FG)$$

Rovnako dostaneme 2 možnosti aj ak spojíme vrcholy A a F. Tým sme rozobrali všetky možností, s ktorým vrcholom môže byť spojený vrchol A, a tak je všetkých spôsobov, ako môže Laura nakresliť úsečky, presne $5 + 5 + 2 + 2 = 14$.

Úloha 30. Archimedes si zobral digitálnu váhu a postavil na ňu nádobu s objemom 1 l a hmotnosťou 250 g. Potom ju naplnil do polovice vodou. Do nádoby s vodou vložil kameň na špagátiku tak, aby bol celý kameň pod vodou, ale aby sa nedotýkal nádoby. Váha ukázala hmotnosť 1 kg. Napokon Archimedes položil na váhu iba samotný kameň. Váha znova ukázala hmotnosť 1 kg. Akú hustotu v kg/m^3 mal Archimedov kameň?

Výsledok. 4000

Riešenie. Keď na váhu položíme nádobu s hmotnosťou $m_{nádoba} = 250\,\mathrm{g}$ a nalejeme do nej vodu s objemom $V = 0{,}5\,\mathrm{l}$, tak váha ukáže hmotnosť:

$$m_{spolu} = m_{nádoba} + \rho_{voda} V$$

Po vložení kameňa na šnúrke ukázala váha hmotnosť $m = 1\,\mathrm{kg}$. Čo spôsobilo, že sa zvýšila hmotnosť? Na kameň pôsobia dve sily - tiažová a vztlaková. Práve vztlakovou silou pôsobí voda na kameň. Zo zákona akcie a reakcie tak musí pôsobiť kameň na vodu rovnako veľkou silou opačného smeru. To je jediná sila, ktorá bude pôsobiť tak, že bude meniť hmotnosť, ktorú ukáže váha. Veľkosť sily F, na základe ktorej váha ukáže hmotnosť, sa tak rovná súčtu veľkostí tiažovej sily nádoby s vodou F_G a veľkosti vztlakovej sily vody na kameň F_{vz}:

$$\begin{aligned} F &= F_G + F_b \\ mg &= m_{spolu} g + V_{kameň} \rho_{voda} g \\ m &= m_{nádoba} + \rho_{voda} V + V_{kameň} \rho_{voda} \end{aligned}$$

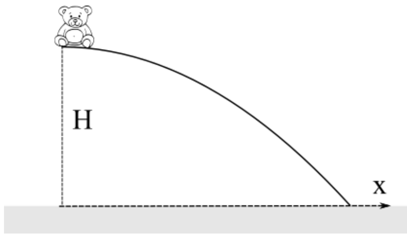
Odtiaľ dostávame, že kameň má objem:

$$V_{kameň} = \frac{m - m_{nádoba} - \rho_{voda} V}{\rho_{voda}}$$

Z druhého váženia vieme, že kameň má hmotnosť $m_{kameň} = 1\,\mathrm{kg}$. Kameň tak musí mať hustotu:

$$\rho_{kameň} = \frac{m_{kameň}}{V_{kameň}} = \frac{m_{kameň} \rho_{voda}}{m - m_{nádoba} - \rho_{voda} V} = \frac{1\,\mathrm{kg} \cdot 1000\,\mathrm{kg/m^3}}{1\,\mathrm{kg} - 0{,}25\,\mathrm{kg} - 1000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 0{,}0005\,\mathrm{m^3}} = 4000\,\mathrm{kg/m^3}$$

Úloha 31. Alex si položil svojho plyšového Macka Pú na vrch rampy, ktorá tvarom pripomínala krivku $h(x) = H - ax^2$, pre ktorú platí $a = 0{,}2/\mathrm{m}$ a $h(0) = H = 2{,}5\,\mathrm{m}$. Zabudol však, že trenie je zanedbateľné, a tak sa plyšák od neho rýchlo začal vzďaľovať. Akou rýchlosťou v m/s sa bude Macko Pú pohybovať, keď bude od Alexa vzdialený v horizontálnom smere $x = 3\,\mathrm{m}$?



Výsledok. 6

Riešenie. Pri tom, ako sa Macko Pú zosúva, sa zachováva celková mechanická energia. Úbytok potenciálnej energie Packa Pú sa preto musí rovnať jeho kinetickej energii. Úbytok výšky je $\Delta h = ax^2$. Preto musí platiť:

$$\begin{aligned}
\Delta E_p &= E_k \\
mg\Delta h &= \frac{1}{2}mv^2 \\
g\Delta h &= \frac{1}{2}v^2 \\
2g\Delta h &= v^2 \\
v &= \sqrt{2g\Delta h} \\
v &= \sqrt{2gax^2} \\
v &= x\sqrt{2ga}
\end{aligned}$$

Keď dosadíme hodnoty zo zadania, zistíme, že Macko Pú sa bude pohybovať rýchlosťou:

$$v = 3\,\mathrm{m} \cdot \sqrt{2 \cdot 10\,\mathrm{m/s^2} \cdot 0{,}2/\mathrm{m}} = 6\,\mathrm{m/s}$$

Úloha 32. Lukáš mal dokonale bielu kocku. Každú jej stenu zafarbil buď namodro, alebo naoranžovo. Urobil to tak, že žiadne dve protiľahlé steny nemali rovnakú farbu. Potom svoju kocku rozrezal na 125 menších rovnakých kocočiek. Koľko z malých kocočiek malo práve jednu stenu modrú a zároveň práve jednu stenu oražnovú?

Výsledok. 18

Riešenie. Tri zo stien pôvodnej kocky musia byť zafarbené modrou a tri oranžovou. Aby mali každé dve protiľahlé steny rôzne farby, tak všetky tri steny s rovnakou farbou musia mať spoločný vrchol. Pozrime sa, ktoré kocočky môžu mať jednu stenu modrú a jednu oranžovú. Takáto kocka musela mať nejakú hranu spoločnú s pôvodnou veľkou kockou - s tou, ktorú mali spoločnú modrá a oranžová stena. Pozdĺž každej takejto hrany pôvodnej kocky vznikne 5 kociek. Z nich ale 2 kocky mali spoločný vrchol s vrcholom pôvodnej kocky, a tak mali tri steny ofarbené nejakou farbou. Pozdĺž každej hrany pôvodej kocky, kde sa stretali modrá a oranžová stena, tak vzniknú $5 - 2 = 3$ kocky, ktoré majú práve jednu stenu modru a práve jednu stenu oranžovú. Takéto kocky vzniknú pozdĺž 6 hrán pôvodnej kocky. Takže kociek, ktoré majú práve jednu stenu modrú a práve jednu stenu oranžovú, je $6 \cdot 3 = 18$.

Úloha 33. Adam si naprogramoval počítač tak, že keď doň napíše nejaké prirodzené číslo, počítač vynásobí 2 021-krát toto prirodzené číslo a vypíše počet cifier výsledku. Keď Adam zadal číslo 2, tak počítač vypísal číslo 609. Keď zadal 3, počítať vypísal 965. Napokon zadal číslo 4, pre ktoré počítač vypísal číslo 1 217. Aké číslo vypíše počítač, keď doň Adam zadá číslo 5?

Výsledok. 1 413

Riešenie.
Číslo, ktoré vznikne tak, že vynásobíme b-krát číslo a, sa označuje $a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{b\text{-krát}}$.

Všimnime si, že keď vynásobíme 2 021 dvojok ($2^{2\,021}$) a 2 021 pätiek ($5^{2\,021}$), tak dostaneme rovnaký výsledok, ako keby sme vynásobili 2 021 desiatok ($10^{2\,021}$). O takomto čísle ale vieme veľmi dobre povedať, ako bude vyzerať – bude sa začínať cifrou 1, za ktorou bude nasledovať 2 021 núl, t.j. $1\underbrace{00\ldots0}_{2\,021\text{-krát}}$.

Zo zadania vieme, že číslo $2^{2\,021}$ má 609 cifier. Preto je určite väčšie ako číslo $1\overbrace{00\ldots0}^{608\text{-krát}}$ (tieto čísla sú rôzne, lebo číslo $2^{2\,021}$ nie je násobkom 5, a tak sa nemôže končiť cifrou 0). Zároveň je toto číslo menšie ako číslo $1\underbrace{00\ldots0}_{609\text{-krát}}$. Máme tak:

$$1\underbrace{00\ldots0}_{608\text{-krát}} < 2^{2\,021} < 1\underbrace{00\ldots0}_{609\text{-krát}}$$

Označme si n hľadaný počet cifier čísla $5^{2\,021}$. Podobne ako v predošlom odseku je toto číslo väčšie ako číslo $1\overbrace{00\ldots0}^{(n-1)\text{-krát}}$ (opäť sú rôzne, lebo číslo $5^{2\,021}$ nie je násobkom 2, a tak sa nemôže končiť cifrou 0). Zároveň je ale menšie ako číslo $1\underbrace{00\ldots0}_{n\text{-krát}}$. Takže platí:

$$1\underbrace{00\ldots0}_{(n-1)\text{-krát}} < 5^{2\,021} < 1\underbrace{00\ldots0}_{n\text{-krát}}$$

Teraz tieto veci dáme dokopy. Pozerajme sa na súčin $2^{2\,021}$ a $5^{2\,021}$. Ak obe čísla nahradíme menšími, dostaneme menší súčin. Preto máme:

$$1\underbrace{00\ldots0}_{608\text{-krát}} \cdot 1\underbrace{00\ldots0}_{(n-1)\text{-krát}} < 2^{2\,021} \cdot 5^{2\,021}$$

Podobne máme:

$$2^{2\,021} \cdot 5^{2\,021} < 1\underbrace{00\ldots0}_{609\text{-krát}} \cdot 1\underbrace{00\ldots0}_{n\text{-krát}}$$

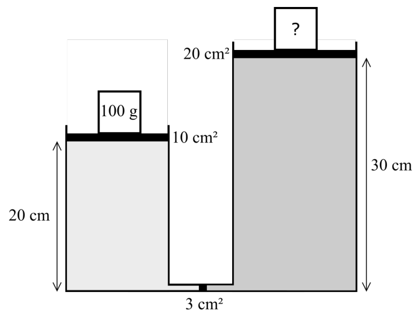
Keď si uvedomíme, že pri násobení čísel končiacich nulami sa sčítava počet núl, tak spolu máme:

$$1\underbrace{00\ldots0}_{(n+607)\text{-krát}} < 2^{2\,021} \cdot 5^{2\,021} < 1\underbrace{00\ldots0}_{(n+609)\text{-krát}}$$

Tým sme ohraničili súčin $2^{2\,021} \cdot 5^{2\,021}$ medzi číslo $1\overbrace{00\ldots0}^{(n+607)\text{-krát}}$ a číslo $1\overbrace{00\ldots0}^{(n+609)\text{-krát}}$. Jediné číslo v tomto rozmedzí začínajúce sa jednotkou, za ktorou sú samé nuly, je to s $n+608$ nulami. Vieme ale že $2^{2\,021} \cdot 5^{2\,021}$ má tento tvar, takže to musí byť zrovna toto číslo. Keďže ale vieme, že $2^{2\,021} \cdot 5^{2\,021} = 1\,\underbrace{00\ldots0}_{2021\text{-krát}}$, tak platí $n + 608 = 2\,021$.

Odtiaľ už dostávame, že hľadaný počet cifier $5^{2\,021}$ je $n = 2\,021 - 608 = 1\,413$.

Úloha 34. Maťko dostal na narodeniny spojené nádoby spojené nízkym pohyblivým piestom s plochou $3\,\mathrm{cm}^2$. Prvá je naplnená vodou a druhá olejom. Prvá nádoba má na hladine piest s plochou $10\,\mathrm{cm}^2$ vo výške 20 cm. Druhá nádoba má na hladine piest s plochou $20\,\mathrm{cm}^2$ vo výške 30 cm. Maťko položil na piest prvej nádoby závažie s hmotnosťou 100 g. Koľko gramov musí vážiť závažie, ktoré musí Maťko položiť na piest druhej nádoby, aby sa piesty nehýbali?



Výsledok. 60

Riešenie. Na to, aby sa piesty nehýbali, musí na piest spájajúci obe nádoby pôsobiť z oboch strán rovnaká sila. Keďže tento piest má z oboch strán rovnaký obsah, musia mať aj tlaky pôsobiace na tento piest rovnakú veľkosť. Tlak, ktorý pôsobí na malý piest zo strany nádoby s vodou, sa skladá z dvoch zložiek - z hydrostatického tlaku vodného stĺpca a z tlaku vyvolaného vonkajšou silou (tiažou telesa na prvom pieste). Hydrostatický tlak vodného stĺpca s výškou $h_1 = 20\,\mathrm{cm}$ je:

$$p_{h1} = h_1 \rho_{voda} g$$

Tlak vyvolaný tiažou telesa s hmotnoťou $m_1 = 100\,\mathrm{g}$ položeným na pieste s obsahom $S_1 = 10\,\mathrm{cm}^2$ je:

$$p_{t1} = \frac{m_1 g}{S_1}$$

Podobne, hydrostatický tlak vodného stĺpca oleja s výškou $h_2 = 30\,\mathrm{cm}$ a tlak vyvolaný tiažou telesa s neznámou hmotnosťou m_2 položenom na pieste s obsahom $S_2 = 20\,\mathrm{cm}^2$ sú:

$$p_{h2} = h_2 \rho_{olej} g$$
$$p_{t2} = \frac{m_2 g}{S_2}$$

Povedali sme si, že musí platiť $p_{h1} + p_{t1} = p_{h2} + p_{t2}$. Preto platí:

$$h_1 \rho_{voda} g + \frac{m_1 g}{S_1} = h_2 \rho_{olej} g + \frac{m_2 g}{S_2}$$
$$h_1 \rho_{voda} + \frac{m_1}{S_1} = h_2 \rho_{olej} + \frac{m_2}{S_2}$$

Odtiaľto vieme vyjadriť m_2:

$$m_2 = S_2 \left(h_1 \rho_{voda} - h_2 \rho_{olej} + \frac{m_1}{S_1} \right) = 20\,\mathrm{cm}^2 \cdot \left(20\,\mathrm{cm} \cdot 1\,\mathrm{g/cm}^3 - 30\,\mathrm{cm} \cdot 0{,}9\,\mathrm{g/cm}^3 + \frac{100\,\mathrm{g}}{10\,\mathrm{cm}^2} \right) = 60\,\mathrm{g}$$

Preto musí Maťko položiť na druhý piest závažie s hmotnosťou $60\,\mathrm{g}$.

Úloha 35. Do divadla včera prišlo 10 ľudí na hru s dvoma dejstvami. Pred prvým dejstvom všetci sedeli v prvom rade. V prestávke po prvom dejstve sa opäť usadili do prvého radu, no vymenili si miesta. Zistili, že iba dvaja z nich sedeli po výmene na svojom pôvodnom mieste. Navyše každý zo zvyšných ôsmich sedel na mieste niektorého svojho pôvodného suseda. Koľkými spôsobmi si mohli vymeniť miesta?

Výsledok. 15

Riešenie. Vyberme najprv fixne dvoch ľudí, ktorí zostali na svojich miestach. Títo ľudia rozdeľujú ostatných ôsmich na tri pomyselné skupiny - naľavo od oboch fixných sedadiel, v strede medzi fixnými sedadlami a napravo od oboch fixných sedadiel. Pri takomto rozdelení aj prázdnu skupinu považujeme za „skupinu“. Člen niektorej skupiny si tak môže sadnúť pred druhým dejstvom iba na sedadlo člena tej istej skupiny, aby sme mali istotu, že toto sedadlo patrilo jeho pôvodnému susedovi.

Pozrime sa teraz na jeden z krajov niektorej skupiny - sedadlo susedné kraju radu alebo niektorému fixnému sedadlu. Človek, ktorý pôvodne sedel na tomto sedadle, si môže sadnúť len na jedno iné sedadlo, pretože má v skupine len jedného suseda. A aby jeho pôvodné sedadlo nezostalo prázdne, tento sused si musí sadnúť na krajné sedadlo - čiže si sedadlá vymenia. Teraz ich už môžeme považovať tiež za fixných a tým pádom sa nám vytvorí nový „kraj“ skupiny. Teda v každej skupine vieme utvoriť dvojice ľudí, ktorí si jednoducho vymenia miesta. To ale znamená, že ľudí musí byť v každej skuine párny počet, inak by si niekto nevedel vymeniť miesto so svojou dvojicou.

Teraz môžeme „spojiť“ takéto dvojice ľudí s vymenenými sedadlami do jednej „spojenej osoby“. Otázkou už zostáva len to, koľkými spôsobmi dokážeme umiestniť dvoch pôvodne fixných ľudí medzi štyri spojené osoby? Spolu máme šesť miest na umiestnenie ľudí. Prvého fixného človeka tak môžeme umiestniť na 6 miest a druhého následne už len na 5 miest, teda by sme mali $6 \cdot 5 = 30$ možností. Ale pri takomto ukladaní sme zarátali každé rozmiestnenie dvakrát, pretože ak vymeníme pôvodne fixné osoby, nedostaneme novú možnosť - to, ktoré sedadlá sú fixné sa nezmení. To znamená, že si ľudia v divadle mohli vymeniť miesta 15 spôsobmi.

Úloha 36. Jonáš má dve pružiny. Jednu s tuhosťou $3\,\mathrm{N/cm}$ a druhú s tuhosťou $6\,\mathrm{N/cm}$. Tieto dve pružiny spojil za sebou do jednej. Akú výslednú tuhosť v N/cm má táto pružina?

Výsledok. 2

Riešenie. Keď budeme spojené pružiny naťahovať silou F, tak obe pružiny budú naťahované touto silou F. Pružina s tuhosťou $k_1 = 3\,\mathrm{N/cm}$ sa tak predĺži o $\frac{F}{k_1}$. Podobne sa pružina s tuhosťou $k_2 = 6\,\mathrm{N/cm}$ predĺži o $\frac{F}{k_2}$. Keď označíme hľadanú tuhosť spojených pružín k, tak spojené pružiny sa musia predĺžiť o $\frac{F}{k}$, čo musí byť súčet predĺžení jednotlivých pružín. Takže musí platiť:

$$\frac{F}{k} = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2}$$
$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$
$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

Preto majú spojené pružinky tuhosť:

$$k = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2} = \frac{3\,\mathrm{N/cm} \cdot 6\,\mathrm{N/cm}}{3\,\mathrm{N/cm} + 6\,\mathrm{N/cm}} = 2\,\mathrm{N/cm}$$

Úloha 37. Jaro dostal na Vianoce hru. Tá sa hrá na hracej doske, ktorá pozostáva z 2 020 políčok usporiadanych na kružnici. Položí svoju figúrku na jedno políčko. Následne vykonáva ťahy v smere hodinových ručičiek. V prvom ťahu posunie figúrku o 2 políčka, v druhom o 4 políčka, v treťom o 6 políčok a tak ďalej, v každom ťahu posunie figúrku o vzdialenosť o dve políčka väčšiu než v predošlom. Koľko najemenej ťahov Jaro spraví, než figúrka opäť zastane na políčku, na ktoré ju na začiatku položil?

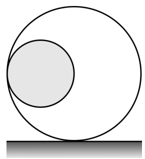
Výsledok. 100

Riešenie. Po tom, ako Jaro vykoná n ťahov, tak sa figúrka pohne o $2+4+6+\cdots+2n$ políčok. Keď z týchto čísel vyjmeme dvojku a použijeme vzťah pre súčet prvých n prirodzených čísel, dostaneme:

$$2+4+6+\cdots+2n = 2\cdot(1+2+3+\cdots+n) = 2\cdot\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$$

Na to, aby Jaro dostal figúrku po posunutí sa o $n(n+1)$ políčok na políčko, kde figúrka začínala, musí byť číslo $n(n+1)$ deliteľné 2 020. Prvočíselný rozklad čísla 2 020 je $2\,020 = 2\cdot 2\cdot 5\cdot 101$. Špeciálne tak musí byť číslo $n(n+1)$ deliteľné prvočíslom 101. Najmenšie n, pre ktoré sa to stane, je $n = 100$, kedy je $n+1 = 101$. Vtedy je navyše aj $n = 100$ násobkom $2\cdot 2\cdot 5 = 20$. Takže pre $n = 100$ je číslo $n(n+1)$ deliteľné 2 020. Tým sme ukázali, že po 100 ťahoch sa figúrka vráti na začiatok a že po menej ťahoch sa jej to nepodarí. Preto spraví Jaro najmenej 100 ťahov.

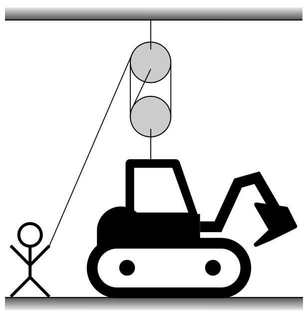
Úloha 38. Kúzelník Jano magicky uzavrel malú guľôčku s polomerom 20 cm a hmotnosťou 0,5 kg do väčšej, dutej gule s polomerom 40 cm a rovnakou hmotnosťou tak, ako vidíš na obrázku. Potom zrušil magické zaklínadlo, ktoré držalo malú guľôčku na mieste. O koľko centimetrov sa posunula väčšia guľa od pôvodného dotykového bodu s podlahou po tom, čo sa situácia ustálila?



Výsledok. 10

Riešenie. Jediné vonkajšie sily, ktoré pôsobia na jednotlivé gule, sú tiažová sila a normálová sila od podložky. Tie pôsobia v zvislom smere. Preto sa ťažisko celej sústavy nemôže hýbať v inom ako zvislom smere. V momente, keď sa sústava ustáli, tak bude ťažisko nad dotykovým bodom. Celá úloha preto je len o tom, že potrebujeme zistiť, o koľko je vo vodorovnom smere na začiatku vzdialené ťažisko od dotykového bodu väčšej gule. Ťažisko väčšej gule je nad dotykovým bodom, čiže vo vodorovnom smere vzdialené 0 cm. Ťažisko menšej guľôčky je vzdialené 20 cm. Keďže obe gule majú rovnakú hmotnosť, tak ich ťažisko sa nachádza v strede úsečky, ktorá spája tieto ťažiská. Preto sa ťažisko celej sústavy nachádza vzdialené vo vodorovnom smere 10 cm od dotykového bodu. Väčšia guľa sa tak ustáli 10 cm od pôvodného dotykového bodu s podložkou.

Úloha 39. Staviteľ Bob by si chcel zjednodušiť prácu na stavbe. Miešačka Julča mu poradila, aby postavil kladkostroj, ktorý vidíš na obrázku. Lano v kladkostroji bolo niekoľkokrát ovinuté okolo oboch kladiek, pričom lano na kladkách neprešmykovalo. Bob dokáže ťahať za lano najviac silou 800 N. Potrebuje kladkostrojom zdvihnúť báger Bedricha, ktorý váži 3500 kg. Koľkokrát najmenej musí byť lano ovinuté okolo spodnej kladky, aby sa to Bobovi podarilo?



Výsledok. 22

Riešenie. Bob bude ťahať lano silou $F = 800\,\mathrm{N}$. Lano tak bude v každom mieste napínané silou F. Špeciálne bude napínané silou F aj pri spodnej kladke, a to aj keď ide akoby od hornej hladky smerom nadol a aj keď ide akoby od spodnej kladky smerom nahor. V oboch týchto miestach tak bude lano pôsobiť na kladku silou $2F$ smerom nahor. Toto bude platiť pri každom ovinutí lana okolo spodnej kladky. Ak bude ovinutí n, tak sila na spodnú kladku smerom nahor bude môcť byť aspoň $2nF$. Na zdvihnutie bagra s hmotnosťou $m = 3500\,\mathrm{kg}$ je potrebné, aby táto sila na kladku bola väčšia ako tiaž bagra. Preto musí platiť:

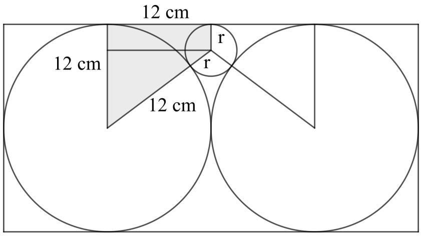
$$2nF \geq mg$$
$$n \geq \frac{mg}{2F} = \frac{3500\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{m/s^2}}{2 \cdot 800\,\mathrm{N}} = 21.875$$

Z toho dostávame, že ovinutí lana okolo spodnej kladky musí byť aspoň 22.

Úloha 40. Laura chce nakresliť nový návrh na vlajku olympijských hier. Preto si nakreslila obdĺžnik so stranami dlhými 24 cm a 48 cm. Potom doň nakreslila dve kružnice s polomerom 12 cm tak, že tieto kružnice sa zvonka dotýkali. Napokon nakreslila menšiu kružnicu, ktorá sa dotýkala oboch kružníc a dlhšej strany obdĺžnika. Koľko centimetrov meria polomer tejto menšej kružnice?

Výsledok. 3

Riešenie. Označme r dĺžku polomeru menšej kružnice. Keď si nakreslíme obrázok, tak si vieme vyznačiť viaceré dĺžky:

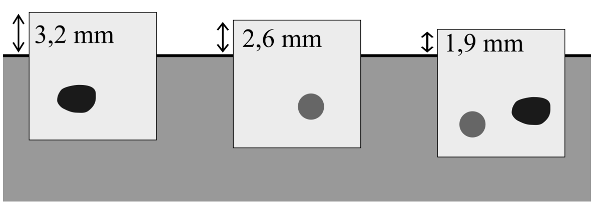


Všimnime si najmä zvýraznený pravouhlý lichobežník. Jeho základne sú polomermi veľkej a malej kružnice. Rameno kolmé na základňu má tiež dĺžku rovnú polomeru veľkej kružnice. Napokon posledné rameno má dĺžku rovnú súčtu dĺžok polomeru malej a veľkej kružnice. Rozdeľme tento lichobežník na obdĺžnik a pravouhlý trojuholník. V pravouhlom trojuholníku majú jednotlivé strany dĺžky 12 cm, $12\,\mathrm{cm} - r$, $12\,\mathrm{cm} + r$. Tento trojuholník je pravouhlý, a tak v ňom musí platiť Pytagorova veta. Preto platí:

$$(12\,\mathrm{cm})^2 + (12\,\mathrm{cm} - r)^2 = (12\,\mathrm{cm} + r)^2$$
$$144\,\mathrm{cm}^2 + 144\,\mathrm{cm}^2 - r \cdot (24\,\mathrm{cm}) + r^2 = 144\,\mathrm{cm}^2 + r \cdot (24\,\mathrm{cm}) + r^2$$
$$144\,\mathrm{cm}^2 = 2 \cdot r \cdot (24\,\mathrm{cm})$$
$$r = 3\,\mathrm{cm}$$

To znamená, že polomer menšej kružnice je $r = 3\,\mathrm{cm}$.

Úloha 41. Lucka sa hrá s ľadom. Vezme malý kamienok a zamrazí ho do ľadovej kocky. Potom vezme misku vody a položí na hladinu kocku. Z kocky však z vody trčí kúsok vysoký 3,2 mm. Tak Lucka ľad vezme malú guľôčku a zamrazí ju do ľadovej kocky s rovnako dlhou stranou, ako mala predošlá. Keď túto kocku položí do vody, z vody už vytŕča len kúsok vysoký 2,6 mm. Lucka však stále nie je spokojná. Roztopí preto obe kocky a následne gulôčku aj kamienok spolu zamrazí do tretej kocky s rovnako dlhou stranou, ako mali prvé dve. Keď kocku položí do vody, z vody trčí kúsok vysoký 1,9 mm. Ako dlhú stranu v milimetroch mali kocky?



Výsledok. 39

Riešenie. Tým, že Lucka do kocky zamrazí kamienok alebo guľôčku, tak nezvýši objem kocky, ale hmotnosť zväčší. Pri tom sa zmení priemerná hustota kocky ľadu. Ak sa kocka nepotopí, tak je objem ponorenej časti kocky priamo úmerný jej priemernej hustote, takže aj výška ponorenej časti je úmerná priemernej hustote. Navyše, pridanie kamienka, resp. guľôčky do kocky spôsobí vždy rovnaké zvýšenie priemernej hustoty. Teda vždy rovnako zvýši výšku ponorenej časti, čo ale znamená, že vždy rovnako zníži výšku neponorenej časti.
Keď sme mali v kocke ľadu len kamienok a pridali sme guľôčku, tak sa výška neponorenej časti znížila o 3,2 mm − 1,9 mm = 1,3 mm. Takže pridanie guľôčky spôsobuje zmenšenie výšky neponorenej časti o 1,3 mm. Keby sme si zobrali

kocku, v ktorej by bola len guľôčka, a vybrali by sme z nej guľôčku, tak kocka s čistého ľadu by mala výšku neponorenej časti 2,6 mm + 1,3 mm = 3,9 mm.
Pre kocku ľadu so stranou dlhou a, objemom ponorenej časti V' a výškou neponorenej časti $h = 3{,}9\,\mathrm{mm}$ navyše máme z Archimedovho zákona, že:

$$
\begin{aligned}
mg &= V'\rho_{voda}g \\
V\rho_{ľad} &= V'\rho_{voda} \\
Sa\rho_{ľad} &= S(a-h)\rho_{voda} \\
a\rho_{ľad} &= (a-h)\rho_{voda} \\
a(\rho_{voda}-\rho_{ľad}) &= h\rho_{voda} \\
a &= h\frac{\rho_{voda}}{\rho_{voda}-\rho_{ľad}} = 3{,}9\,\mathrm{mm}\frac{1000\,\mathrm{kg/m^3}}{1000\,\mathrm{kg/m^3}-900\,\mathrm{kg/m^3}} = 39\,\mathrm{mm}
\end{aligned}
$$

Preto museli mať Luckine kocky stranu dlhú 39 mm.

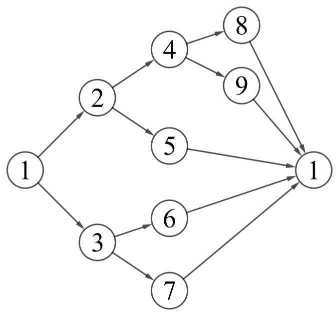
Úloha 42. Majo začal písať stĺpec čísel: 1, 2, 4, 8, 16, 32 a tak ďalej, každé číslo dvakrát väčšie než to nad ním. Takto napísal 555 čísel. Potom do druhého stĺpca napísal prvé cifry čísel v prvom stĺpci. Druhý stĺpec tak začínal číslami 1, 2, 4, 8, 1, 3 ... a končil číslami ... 1, 3, 7, 1, 2, 5. Povšimol si, že číslo 8 je v druhom stĺpci napísané 30-krát a že posledné číslo prvého stĺpca má 167 cifier. Koľkokrát je v druhom stĺpci napísané číslo 9?

Výsledok. 24

Riešenie. Na prvý pohľad sa zdá, že v správaní sa prvých cifier čísel v prvom stĺpci nie je nič zvláštne. Opak je však pravdou. Keď si vypíšeme prvých niekoľko čísel v druhom stĺpci, tak si môžeme všimnúť, že sa v ňom podozrivo často vyskytuje číslo 1. Od neho potom čísla rastú, až kým sa znova nevrátia na číslo 1.
Zamerajme sa tak na to, aké číslo môže nasledovať po akom:

- Po čísle 1 môže nasledovať iba niektoré z čísel 2 alebo 3.
- Po čísle 2 môže nasledovať iba niektoré z čísel 4 alebo 5.
- Po čísle 3 môže nasledovať iba niektoré z čísel 6 alebo 7.
- Po čísel 4 môže nasledovať iba niektoré z čísel 8 alebo 9.
- Po číslach 5, 6, 7, 8 a 9 môže nasledovať iba číslo 1, lebo určite dôjde k prechodu cez desiatku.

To, ktoré číslo môže ísť za ktorým, je vystihnuté na nasledujúcom obrázku:



Tu vidíme, že jednotky budú rozdeľovať čísla v druhom stĺpci na skupinky. Čo je však dôležitejšie, skoro všetky skupinky budú obsahovať presne 3 čísla (vrátane čísla 1). Sú len dve skupinky, ktoré obsahujú 4 čísla - skupinka 1, 2, 4, 8 a skupinka 1, 2, 4, 9. Zároveň sú toto jediné skupinky, ktoré obsahujú čísla 8 a 9.
Zostáva si uvedomiť ešte jednu dôležitú myšlienku. Keď sa v druhom stĺpci dostaneme na číslo 1, tak príslušné číslo v prvom stĺpci bude mať o jednu cifru viac ako predošlé číslo v prvom stĺpci - to preto, lebo číslo 1 ako prvá cifra vzniká po prechode desiatkou.
Teraz dáme všetko dokopy. Vieme, že posledné cifry v druhom stĺpci sú 1, 2, 5, takže sa nám zvládne ukončiť skupinka. Prvej skupinke zodpovedali v prvom stĺpci čísla, ktoré boli jednociferné, a poslednej skupinke zodpovedali čísla, ktoré boli 167-ciferné. Takže všetkých skupín musí byť práve 167. Keby všetkých 167 obsahovalo 3 čísla, tak by v nich bolo spolu $3 \cdot 167 = 501$ čísel. 4 čísla tak musí obsahovať $555 - 501 = 54$ skupiniek. Čiže 54-krát sa musí v druhom stĺpci objaviť niektoré z čísel 8 alebo 9. Keďže 8 sa objaví 30-krát, tak číslo 9 sa musí objaviť $54 - 30 = 24$-krát.